

TAKASHI SAKAI

MINORU TANAKA

THE
**GEODESIC
THEORY OF
FINSLER
GEOMETRY**

SORIN V. SABAU

KEI KONDO

SHIN-ICHI OHTA

AUGUST 31, 14:00 ~ SEPTEMBER 1, 10:00 ~ SEPTEMBER 2, 10:00 ~ 2011
BLDG. No.3, ROOM 108, FACULTY OF SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY

SUPPORTED BY GRANT-IN-AID FOR YOUNG SCIENTISTS (B) 23740048 (SHIN-ICHI OHTA)

研究集会「測地線論的フィンスラー幾何」

2011年 8月31日～9月2日

京都大学 北部キャンパス 理学部3号館 108 ([地図](#), [MAP](#))

プログラム

- 8月31日 14:00～14:50 田中 實 (東海大学)
「測地線論史 1」
- 15:10～16:00 酒井 隆
「測地線論史 2」
- 16:20～17:10 太田 慎一 (京都大学)
「フィンスラー幾何入門 1」
- 9月1日 10:00～10:50 酒井 隆 (2)
「測地線論史 3」
- 11:10～12:00 太田 慎一 (2)
「フィンスラー幾何入門 2」
- 14:00～14:50 酒井 隆 (3)
「測地線論史 4」
- 15:10～16:00 近藤 慶 (東海大学)
「フィンスラー幾何におけるトポノゴフの比較定理 1
(角度と測地変分の長さの比)」
- 16:20～17:10 ソリン サバウ (東海大学 (札幌校舎))
「On the cut locus of Riemann-Finsler surfaces」
- 9月2日 10:00～10:50 太田 慎一 (3)
「重みつきリッチ曲率の応用と展望」
- 11:10～12:00 近藤 慶 (2)
「フィンスラー幾何におけるトポノゴフの比較定理 2
(Berwaldの場合)」
-

オーガナイザー：近藤 慶，太田 慎一，ソリン サバウ，田中 實

本研究集会は，以下の資金の援助を受けています。

日本学術振興会 科学研究費 基盤(C)「大域リーマン・フィンスラー幾何学」

(課題番号：22540097，研究代表者：ソリン サバウ)

日本学術振興会 科学研究費 若手(B)「測度距離空間の幾何学と最適輸送理論」

(課題番号：23740048，研究代表者：太田 慎一)

序文

松本誠先生によると、フィンスラーは、変分問題の幾何学可を目的としてフィンスラー多様体を導入したそうである。実際、ツェロメロの航行問題を見ると、リーマン幾何学の範疇では取り扱いが出来ない問題で、まさにフィンスラーが定義したフィンスラー多様体における最短線を求める問題である。この研究集会の目的は、リーマン幾何における測地線論的手法を用いて、フィンスラー幾何の研究を行なうための提案である。どの程度、測地線論的手法が有効であるか我々はわからないが、一つの試みである。将来、強力な手法に育つ事を期待している。

酒井隆先生には、力作の測地線論史を3回にわたり、講演していただき、ここで感謝の意を表したい。また、この研究集会の参加者にも、忍耐強く我々の講演を聴いてくださり感謝したい。

2011年12月XX日

太田慎一、近藤慶、ソリン・サバウ、田中 實

測地線論史 I

Cohn-Vossen(1902-1936) の仕事の紹介

田中 實
東海大学 (理)

2011/8/31

Cohn-Vossen は大域リーマン幾何学のパイオニアの一人であり、特に、測地線論において、その後の測地線論の研究に多大な影響を与えた研究者である。ヒルベルトとの共著である直観幾何学 (みすず書房) の本の著者として知られた研究者である。彼の伝記 ([CV0]) によれば、ロシアにおける大域微分幾何の研究に大きな影響をあたえ、特に彼の凸曲面の一意性定理の研究は、A.D. Aleksandrov や A.V. Pogorelov により引き継がれた。測地線論に関する、彼の主な論文は、[CV1] と [CV2] である。歴史的には、1931 年に、Hopf-Rinow の定理が証明され、翌年、J.H.C. Whitehead により、凸球の存在が証明された直後の仕事である。ここでは、完備非コンパクト 2 次元リーマン多様体の全曲率に関する Cohn-Vossen の研究結果を紹介し、その結果がどのように次世代の幾何学者に影響を与えたかを述べる。

定義 1 多様体 M が有限連結であるとは、コンパクト 2 次元多様体 N と N の有限個の点 p_1, \dots, p_k が存在して、 M が $N \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ と同相であることを言う。

定義 2 2 次元リーマン多様体 M の全曲率 $c(M)$ とは、

$$\int_M G_+ dM < \infty \quad \text{or} \quad - \int_M G_- dM < \infty$$

であるとき、

$$c(M) := \int_M G_+ dM + \int_M G_- dM$$

なる値を言う。ここで、 G は、 M のガウス曲率、 dM は M の面積素、 $G_{\pm} := \frac{1}{2}(G \pm |G|)$ を表す。

2 次元完備リーマン多様体 M が全曲率 $c(M)$ をもてば、 $c(M) \in [-\infty, \infty]$ の値をとり得るが、有限連結な場合は、次の定理より $c(M) < \infty$ であることがわかる。

定理 1(Cohn-Vossen) もし、 M が全曲率 $c(M)$ をもてば、 $c(M) \leq 2\pi\chi(M)$ を満たす。
($\chi(M)$: オイラ標数)

系 2(Cohn-Vossen) $\int_M G_+ dM < \infty$ である。

注意 M が無限連結、完備 2 次元リーマン多様体で、全曲率 $c(M)$ をもてば、 $c(M) = -\infty$ であることが、1952 年に、Huber([Hu]) により証明された。

今後は、断らない限り、 M は、2 次元完備非コンパクトなリーマン多様体を表すものとする。

定理 3(Cohn-Vossen) M は向き付け可能で、非負ガウス曲率をもてば

1. M はユークリッド平面に同相かまたは、
2. $M = S^1 \times R$ (flat cylinder と等長的である)。

注意 後に、この定理は、Gromoll-Meyer(1969) や Cheeger-Gromoll(1972) により高次元の多様体に対して拡張された。(定理 GM, 定理 CG1 を参照せよ。)

定義 3 測地線 $\gamma: R \rightarrow M$ が直線であるとは、任意の $s, t \in R$ に対して、 $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$ が成り立つときを言う。

定理 4(Cohn-Vossen) M は、ユークリッド平面と同相で、直線を含むと仮定する。もし、全曲率をもてば、 $c(M) \leq 0$ である。

系 5 さらに、 M のガウス曲率が非負ならば、 M は、ユークリッド平面と等長的である。

注意これは、Toponogov splitting theorem(1964) や Cheeger-Gromoll splitting theorem (1971) として、拡張された。(定理 T と定理 CG2 を参照せよ。)

定理 GM M を完備非コンパクトな n 次元リーマン多様体で、各点における断面曲率が正であるとすると、 M は R^n と微分同型である。

定理 CG1 M を完備非コンパクトな n 次元リーマン多様体で、各点における断面曲率が非負であるとする。このとき、魂 (Soul) と呼ばれるコンパクト、全凸 (totally convex) な部分多様体 S が存在して、 M は S の法束 (normal bundle) と微分同型である。

定理 T M を完備な非負断面曲率をもつ n 次元リーマン多様体とするとき、もし、 M が直線を含むならば、全測地的部分多様体 N が存在して、 M は $N \times R$ なるリーマン積と等長である。

定理 CG2 M を完備な非負リッチ曲率をもつ、 n 次元リーマン多様体とするとき、もし、 M が直線を含むならば、ある全測地的部分多様体 N が存在して、 M は $N \times R$ なるリーマン積と等長である。

Cohn-Vossen 後の発展

Cohn-Vossen とは独立に、Fiala([F]) と Hartman([Ha]) が有限の全曲率をもつユークリッド平面と同相なリーマン多様体上の等周不等式を以下の定理で示されるような形で証明していた。

定理 6(Fiala-Hartman) M を完備なユークリッド平面と同相なリーマン多様体とする。 C を M 内の滑らかな単純閉曲線とする。もし、 M が有限の全曲率 $c(M)$ をもてば、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2A(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2A(t)}{L(t)^2} = 2\pi - c(M)$$

が成り立つ。ここで、 $A(t), L(t)$ は、 C の t -距離球の面積と、この境界曲線の長さを表す。

塩濱勝博氏は、Cohn-Vossen と Hartman の手法をさらに発展させ、定理 6 を以下の定理のように拡張した。

定理 7(Shiohama) M を完備、非コンパクト、有限連結な 2 次元リーマン多様体とする。 C を M 内の滑らかな単純閉曲線とする。もし、 M が全曲率 $c(M)$ をもてば、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2A(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2A(t)}{L(t)^2} = 2\pi\chi(M) - c(M)$$

が成り立つ。

ここで、 $A(t), L(t)$ は、 C の t -距離球の面積と、この境界曲線の長さを表す。

注意 この定理の意味する事は、Cohn-Vossen の上記定理 1 の図形的意味を明らかにした事である。すなわち、全曲率は、位相不変量ではないが、 $2\pi\chi(M) - c(M)$ は、 M の end の形にのみ依存する幾何学量である事を明らかにしている。全曲率に関する研究のその後の発展に関して、詳しくは、[SST] を参照されたい。

Cohn-Vossen の結果を一般次元のリーマン多様体（さらには、フィンスラー多様体）にまで拡張することは、現在でも興味ある問題である。最後に、このような問題に、チャレンジする若い研究者が現れることを期待する。

参考文献

[CV0] <http://www.gap-system.org/history?Biographies/Cohn-Vossen.html>

- [CV1] S. Cohn-Vossen, *Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen*, Compositio Math. **2**,(1935),63-113.
- [CV2] Cohn-Vossen, *Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfach zusammenhängenden offenen vollständigen Flächen*, Recueil Math. Moscow **43** (1936), 139-163.
- [Hu] H. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment.Math. Helv.**32** (1952),13-72.
- [GM] D. Gromoll and W. Meyer, *On complete manifolds of positive curvature*, Ann. Math.(2) **75** (1969), 75-90.
- [CG1] J. Cheeger and D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of non-negative curvature*, Ann. Math. **96**(1972), 413-443.
- [CG2] J. Cheeger and D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative curvature*, J.Differential Geometry **6** (1972), 119-128.
- [T] V.A. Toponogov, *Riemannian spaces containing straight lines*.(Russian) Dokl.Akad.Nauk SSSR **127** (1959) 977-979.
- [F] F. Fiala, *Le problème isopérimétrique sur surfaces ouvertes à courbure positive*, Comment.Math.Helv. **13** (1941), 293-346.
- [Ha] P. Hartman, *Geodesic parallel coordinates in the large*, Amer.J.Math. **86** (1964), 705-727.
- [SST] K. Shiohama, T. Shioya and M. Tanaka, *The Geometry of Total Curvature on Complete Open Surfaces*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 159, Cambridge University Press, (2003)

測地線論史 II

酒井 隆

1 Introduction

測地線概念は、Euclid の原論における「直線」にその端を發する。Euclid は、現実の世界に現れる図形から抽象することにより理想化した図形として得られた点・直線・平面等の概念を基に、それらの間に成り立つ最も基本的な性質を公理・公準として認め、それらから論理に基づいた明確な議論によって図形に関する非常に多くの定理を導いて (すなわち、公理的な立場を取ることに) 幾何学を展開した (紀元前 3 世紀)。特に、直線 (線分) や、それから作られる図形 (角, 3 角形, 多角形等) は円と共に Euclid 幾何で最も重要な役割を果たした。

Euclid は、(曲)線を「長さがあつて幅のない」図形、直線を「点がある上に均等にのっている」ような線 (真っ直ぐな線を意味していると思われる) と定義し、2 点 A, B を結ぶ唯一の直線が存在することを公準とした。線分 AB の長さを 2 点 A, B の距離として、距離に関する 3 角不等式 ([命題 20 : 3 角形の 2 辺の和は他の 1 辺より大] で、2 点 A, B を結ぶ最短線は線分 AB に限ることをいう) を示すのに、Euclid は 3 角形の辺と角の大小関係 (命題 18) を用いる (これは [命題 16 : 3 角形の外角は内対角より大きい] より従う) が、結局 2 辺挟角の 3 角形の合同に関する定理 (命題 4) に帰着され、3 角不等式の証明に平行線の公理 (第 5 公準) は用いていない。

Euclid の原論の第 5 公準に関する批判は、永い年月を経て非 Euclid 幾何の発見につながり、幾何学における直線・平面・空間の概念を根本的に考え直すことが必要になった。非 Euclid 幾何では直線の挙動は Euclid 幾何のものとは異なるが、同様に基本的な役割を果たす。なお、平行線の公理 (或いはその否定による公理) により、3 角形の内角の和、また 2 辺挟角の 3 角形の対辺を具体的に定めることができる (余弦公式)。

また、R. Decartes の解析幾何の立場から言えば、距離に関する 3 角不等式とその等号成立条件や余弦公式は、距離が内積から決まるノルムによって与えられることを用いて簡単に示せる¹。この場合、直線 (測地線) のパラメータ表示²は、Euclid 空間ではパラメータ t の 1 次関数を用いて、双曲幾何 (球面幾何) の Lorentz 空間モデル (Euclid 空間の超球面モデル) ではパラメータ t の双曲線関数 (3 角関数) を用いて具体的に与えられる³。

Euclid 空間内の曲面は、まず L. Euler, G. Monge 等によって微積分を用いて調べられた。18 世紀初頭には、曲線の長さに関する変分法を用いて、曲面上の最短線は (弧長をパラメータに取れば) 加速度ベクトルが常に曲面の法線方向を向く測地的曲率が 0 の曲線であり、初速を与えると真っ直ぐ

¹例えば ABC に対する余弦公式 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ は $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = ab \cos C$ と $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ から直ちに得られる。なおベクトル空間、アフィン空間を用いた Euclid 幾何の公理的構成は比較的新しく H. Weyl による。

²空間 M のパラメータ曲線は写像 $c: \mathbf{R} \rightarrow M$ として与えられる。すなわち、数直線 \mathbf{R} の概念がまず必要になるが、運動学的な時間の概念の抽象として用いられた。パラメータ表示による一般の連続曲線の明確な定義は C. Jordan に始まる。

³ $\gamma(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b}$: Euclid 空間; $\gamma(t) = \sinh t\mathbf{a} + \cosh t\mathbf{b}$ ($\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = -1, \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0, \mathbf{b} \circ \mathbf{b} = 1$: 双曲空間); $\gamma(t) = \sin t\mathbf{a} + \cos t\mathbf{b}$ ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$: 球面)

進む曲線を意味することが J. Bernoulli I や Euler 等には知られていた。このような測地的曲率が 0 の曲線は測地線 (geodesic) と呼ばれた。

C. F. Gauss は彼の曲面論 ([Gau],1827) において、第 1 基本形式のみから定まる曲面の内在的性質を曲面の幾何として取り扱った。その際、(Gauss) 曲率が曲面の幾何の最も基本的な概念であるが、測地線も内在的な概念であること (測地線の微分方程式が第 1 基本量のみを用いて表される) を示した。また、曲面上の任意の点を始点として無数の長さの等しい最短線を引けば、その端点を結んで得られる曲線は各最短線と直交すること (Gauss の補題)、最短線の変分 (Jacobi 場) と曲率との関係について述べ、ハイライトとして測地 3 角形に対する Gauss-Bonnet の定理を与えている⁴。

B. Riemann の就職講演 ([R],1854) では、幾何学の基礎としてどのような空間やその上のどのような計量の基準を考えるべきかを論じた性格からいって、特に測地線について系統だって述べられてはいない。しかし、測地線が始点と始方向を与えると決まることを用いて (正規) 座標系を導入し、線素 (Riemann 計量) の Taylor 展開の 2 次の項が曲率を定める事を述べている。また (Riemann 多様体の) 点 p の接空間の 2 次元平面 (断面) σ に対して、その各方向に測地線を引いて得られる曲面の p における Gauss 曲率として σ の断面曲率を与えている。

Riemann 幾何学はまず絶対微分学として Levi-Civita 等によって発展したが、19 世紀においても楕円面上の測地線の C. Jacobi ([J],1839) による研究を始め、曲面上の測地線の大域的な挙動は v. H. von Mangoldt ([Mar],1881) 等によって調べられてきた。

20 世紀に入る前後に、その後の測地線の研究に大きな影響を及ぼした H. Poincaré ([Po],1905) と J. Hadamard ([Had],1898) の論文が現れた。Poincaré は天体力学 (3 体問題) における周期軌道の存在や軌道の漸近挙動に興味を持ったが、その複雑さの故にまず問題の本質が現れる場合として卵形面における閉測地線の存在を力学系の立場から問うた。ここでは幾つかの問題提起や解決のためのアイデアが示され、G. Birkhoff が続いた。この論文ではまた切断跡 (cut locus) の概念が導入され、共役跡 (conjugate locus) の構造にも触れられている。

これより少し前に、J. Hadamard は 3 次元空間内の負曲率曲面上の閉測地線や測地線の漸近挙動を調べたが、曲面の位相が重要な役割を果たすことを認識していた。この論文は後の負曲率 (非正曲率) Riemann 多様体の研究に大きな影響を与えた。また、Hadamard は測地流の (両側に無限に延びる) 軌道を基本群の生成元系をアルファベットとする語を用いて表現し、後の Morse による記号力学への道を開いた。

他方、数学の厳密化が進むにつれて原論における種々の不備が指摘された。19 世紀末に至って Hilbert は公理的な立場を徹底し、点、直線、平面を無定義要素とし、それらの間に結合公理、順序公理、合同公理、平行線公理、連続性公理と呼ばれる 5 種類の公理群を与えた⁵ ([H])。無定義要素の性質が公理群によって規定されるという形式的な立場であるが、諸公理の関係、独立性、無矛盾性が検討された。例えばこの観点から Hilbert は、直線が 2 点を結ぶ最短線であるような幾何、すなわち、3 角形の合同公理の代わりに「3 角形の 2 辺の和は他の 1 辺より大である」を公理とする幾何学

⁴Gauss は非 Euclid 幾何について熟考を重ねていたが、それに関して沈黙を守った理由の一つに、双曲幾何全体のモデルを Euclid 空間内の曲面として実現できなかったためという説がある。双曲幾何を体系として初めて発表したのは、ハンガリーの J. Bolyai (1831)、ロシアカザンの N. I. Lobachevski (1829) であるが、当時の数学の中心から離れた場所にいたこと、また、Bolyai の父親が Gauss を学友であり、Lobachevski のカザン大学での先生 M. Bartels が Gauss を小学校時代に教えていたことは興味深い。Gauss は両方の著書を読んで、彼の意見を述べている。

⁵また、これ等すべての公理を満たす幾何学は Decartes の解析幾何のモデルに一致することが示された。

はどのようなものかを問題とした。Minkowski 幾何⁶、や Hilbert 幾何はその例であるが、Hilbert はその様な幾何をすべて決定できるかを問うた (Hilbert の第 4 問題⁷)。H. Busemann はさらに完備多様体の測地線の持つ性質を公理とする一般の G 空間⁸の概念を導入した。

その後の測地線の研究は歴史的には主として変分学と力学系の立場から研究された。変分学の観点からは、測地線は多様体の種々の曲線族のなかで (局所) 最短である曲線として捉えられる。例えば、閉測地線は閉曲線の族における長さ (或いはエネルギー積分) の臨界点として捉えられ、その研究は Poincaé, Birkhoff に始まり L. Lusternik-L. Schnirelmann, M. Morse 等により大きく進展した。さらに、その手法は大域変分学として確立された。

力学系の観点からは、測地線は (単位) 接束上の測地流の軌道として捉えられる。特に、負曲率閉曲面 (多様体) 上の測地流のエルゴード性に関連して、G. D. Birkhoff, M. Morse, E. Hopf, D. V. Anosov 等によって研究された。この場合も測地線論を超えて一般の力学系としての研究は A. N. Kolmogorov, S. Smale, V. I. Arnold, Ya Sinai, R. E. Bowen, A. B. Katok 等によって 20 世紀に大きく進展したが、測地流はそこで重要な例を与えた。

また、測地線の挙動は Riemann 多様体の幾何学的な性質 (特に、曲率) や位相的な性質に深く関連しており、また直観と結びついているため 20 世紀における Riemann 多様体の幾何学的構造・位相構造の研究に広く応用された。Cohn-Vossen, H. Hopf, S. B. Myers, H. E. Rauch に始まる大域の微分幾何学の研究は M. Berger, W. Klingenberg, J. Cheeger, D. Gromoll, 塩浜勝博等に引き継がれて大きな発展を遂げた。

以下 Riemann 幾何学における測地線の研究の歴史についての解説を試みる。第 2 節では測地線に関する基本的な概念や性質について証明抜きで簡単に述べた。詳しいことは多くのテキストがあるので参照されたい ([B1],[Ch-Eb],[Ga-H-La],[Gr-K-Mey],[Kas],[K2],[Mi],[Sa2],[S],[Shio])。第 3 節ではコンパクト Riemann 多様体上の閉測地線の存在問題を扱った。この問題は Poincaré 以来、測地線論の歴史の中で大域の変分学と結びついて中心的な役割を果たしてきた。第 4 節では、双曲的力学系の発展の中で重要な役割を果たしたコンパクト負曲率空間の測地流について主として述べた。

勿論すべてに亘って述べることは不可能であり、限られた範囲しか扱っていないことをお断りしたい。Jacobi 場や測地 3 角形の比較定理とその曲率と位相の関連への応用に関しては多くのテキストがありここでは簡単に述べるにとどめた (上記以外に §§2.5 に文献を挙げた。また田中實氏の解説「測地線論史 I」を参照されたい)。また、 C_l 多様体, Blaschke 予想, 逆問題, 幾何学的不等式との関連についてはそれぞれが大きなトピックであり、ここでは詳しく述べる余裕がないため省略した。

先に触れた Finsler 多様体, G 空間や、さらに曲率が下或いは上から押さえられた Riemann 多様体の拡張である Alexandrov 空間, CAT 空間は Riemann 多様体の種々の立場での一般化であり、測地線はやはり大きな役割を果たすがこれらについても殆ど述べる事ができなかった。

⁶狭義凸のノルムで定められた幾何。滑らかな Minkowski 幾何を局所モデルとする多様体上の幾何が Finsler 幾何である。

⁷ D を実射影空間 P^n の部分集合で $D = P^n$ であるか、 P^n のアフィン部分空間 A^n の開凸集合のいずれかであるとする。問題は「 D 上の完備連続な距離 $d(x, y)$ で、 P^n の直線上 (長さに関して) 加法的であり、かつ強い意味での 3 角不等式を満たすようなものを決定せよ」であるが、H. Busemann, A. V. Pogorelov 等を経て Z. I. Szabó([Sz]) により解決された。[Ko] 第 4 章に解説があるが、非常に多くのこのような距離がある。 $D = P^n$ の場合すべての直線は同じ長さの閉曲線になる。

⁸有限コンパクト (有界無限集合は集積点を持つ) 距離空間 (X, d) で次を満たす: (i) 任意の異なる 2 点 x, z に対して $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$ を満たす点 $z \neq x, y$ が存在する。このとき (xyz) と書く。(ii) 任意の $p \in X$ に対して $\epsilon > 0$ が存在して、任意の異なる 2 点 $x, y \in B_\epsilon(p)$ に対して (xyz) を満たす点 z が存在する。(iii) $(xy_1), (xy_2)$ で $d(y, z_1) = d(y, z_2)$ ならば $z_1 = z_2$ 。

2 Riemann 幾何における測地線

2.1 測地線の方程式, 第 1 変分公式, 測地流

(M, g) を滑らかな (特に断らなければ, C^∞ 級を意味する) n 次元連結 Riemann 多様体とする ($g(v, v) = \langle v, v \rangle$ と書く). M の (区分的に) 滑らかな曲線の長さがその接ベクトルのノルムの積分として与えられ, M の 2 点 p, q に対してその距離 $d(p, q)$ が p, q を結ぶ曲線の長さの下限として定義された. M の 2 点 p, q を結ぶ最短線 (その長さが距離 $d(p, q)$ に等しい曲線) を求めようとするれば, 変分学の立場からは p, q を結ぶ (区分的に) 滑らかな曲線全体のなす空間

$$\mathcal{C}_{pq} = \{c : I = [0, 1] \rightarrow M \mid c(0) = p, c(1) = q\}$$

を考え, $c \in \mathcal{C}_{pq}$ にその長さ⁹

$$L(c) = \int_0^1 |\dot{c}(t)| dt \quad (\text{或いはエネルギー積分 } E(c) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{c}(t)|^2 dt)$$

を対応させる汎関数の危点の満たす必要条件 (Euler-Lagrange 方程式) をまず求める. $\gamma \in \mathcal{C}_{pq}$ とし, 区間 $[0, 1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ を $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ ($0 \leq i \leq N-1$) が滑らかであるように取って置く. 連続写像 $\alpha : [0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ は $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}] \times (-\epsilon, \epsilon)}$ ($0 \leq i \leq N-1$) が滑らかで, $\alpha(t, 0) = \gamma(t)$ を満たすとき γ の変分, $\alpha_s(t) := \alpha(t, s)$ と置いて得られる曲線 $\alpha_s; s \in (-\epsilon, \epsilon)$ を γ の変分曲線という. $X(t) = \partial\alpha(t, 0)/\partial s \in T_{\gamma(t)}M$ と置けば, $X(t)$ は γ に沿うベクトル場で, 変分曲線 $s \mapsto \alpha_s$ の $s = 0$ での接ベクトルに対応し, α の変分ベクトル場と呼ばれる. 特に $\alpha(0, s) = p, \alpha(1, s) = q$ を満たすときは, $s \mapsto \alpha_s \in \mathcal{C}_{pq}$ は γ を通る \mathcal{C}_{pq} の “滑らかな” 曲線とみなせる. この場合は $X(0) = X(1) = 0$ に注意する. まず, 一般の変分の場合に $dE(\alpha_s)/ds|_{s=0}$ を求めよう. $\gamma \in \mathcal{C}_{pq}$ の任意の変分 α に対して X をその変分ベクトル場とすると, エネルギー積分に対して次の第 1 変分公式が成り立つ¹⁰:

$$\begin{aligned} \frac{dE(\alpha_s)}{ds}\Big|_{s=0} &= \sum_{i=1}^{N-1} \langle X(t_i), \dot{\gamma}(t_i - 0) - \dot{\gamma}(t_i + 0) \rangle \\ &+ \{ \langle X(1), \dot{\gamma}(1) \rangle - \langle X(0), \dot{\gamma}(0) \rangle \} - \int_0^1 \langle X(t), \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (1)$$

左辺を $DE_\gamma(X)$ と書いて, X による E の第 1 変分という. 曲線 γ の \mathcal{C}_{pq} に属する変分に対応する変分ベクトル場全体を \mathcal{C}_{pq} の γ における接空間 $T_\gamma \mathcal{C}_{pq}$ とみなせば, $\gamma \in \mathcal{C}_{pq}$ が危点の条件「任意の変分ベクトル場 $X \in T_\gamma \mathcal{C}_{pq}$ に対して $\frac{dE(\alpha_s)}{ds}\Big|_{s=0} = 0$ 」を満たすには, γ が滑らかで Levi-Civita 接続の共変微分 ∇ を用いて表される微分方程式

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0, \quad (2)$$

⁹ $|\dot{c}(t)| = \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}$ は接ベクトル $\dot{c}(t)$ の長さである. $L(c) \leq \sqrt{2E(c)}$ で, 等号成立はちょうど c が定速 ($|\dot{c}(t)|$ が定数) のときである. 特に, 定速最短線は E の最小値を与え, 逆に E の最小値を取る $\gamma \in \mathcal{C}_{pq}$ は定速最短線である.

¹⁰ パラメータの範囲は便宜上 $[0, 1]$ に取ったが, 一般に $[a, b]$ としても同じである. 長さ $L(c)$ を対応させる \mathcal{C}_{pq} の関数を考えた場合は (長さはパラメータの取り方によらないので) $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ が弧長に比例するパラメータを持つ (すなわち, 定速) とすれば, $\frac{dL(\alpha_s)}{ds}\Big|_{s=0}$ に対して同じ右辺の式を得る.

の解である¹¹ことが必要十分である。このとき、接ベクトル $\dot{\gamma}_u$ の長さは一定 (定速という) で、 $|u|$ に等しい。局所チャート (U, φ, x^a) に関して $x^a(t) = x^a(\gamma(t))$ と置くと、(2) は次の形にかける：

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = - \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^a \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \quad (a = 1, \dots, n; \Gamma_{jk}^a \text{ は Christoffel の記号})$$

これは自分自身に沿って平行な (すなわち、真っ直ぐな) 曲線を意味し、この微分方程式を満たす γ は測地線 (geodesic) と呼ばれる。(2) は 2 階の非線形常微分方程式系であり、初期条件 $\gamma(0) = p (= \tau_M u)$, $\dot{\gamma}(0) = u$ を満たす解 $\gamma_u(t)$ が唯一つ (局所的に) 存在し、 $\gamma_u(t)$ は t と u に滑らかに依存する。したがって次を得る。

命題 1. $\gamma \in C_{pq}$ がエネルギー積分 E の危点であるための必要十分条件は、 γ が測地線であることである。特に、 $\gamma \in C_{pq}$ が p, q を結ぶ定速最短線ならば測地線である。

一般には、測地線はすべてのパラメータに対して定義される (すなわち、いくらでも延ばせる) とは限らない。コンパクト Riemann 多様体 (M, g) ならば、任意の測地線はすべてのに対してパラメータに対して定義される¹²。

次に、測地線を力学系の立場から見た測地流について簡単に述べる。測地線は M 上 2 階の常微分方程式系の解であるが、力学系の観点からはこれを M の接バンドル TM (あるいは余接バンドル T^*M) におけるベクトル場 (1 階の常微分方程式系) の積分曲線とみなす。すなわち $t \in \mathbf{R}$ に対して $\phi^t : TM \rightarrow TM$ を $\phi^t(u) = \dot{\gamma}_u(t)$ と定義すれば、これは測地流 (geodesic flow) と呼ばれる TM の局所 1 係数変換群 ($\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$: 流れともいう) を定め、対応する TM 上のベクトル場 ξ を測地スプレーと呼ぶ¹³。測地流に関する解説書として [Pa], [Su] を挙げておこう。

TM 上のシンプレクティック構造は Levi-Civita 接続を用いて次のように記述される： $v \in T_p M \subset TM$ に対して $T_v TM$ の垂直部分 $V_v = T_v T_p M$ が v を通る $\tau_M : TM \rightarrow M$ のファイバー $\tau_M^{-1}(p) (= T_p M)$ の v における接空間として与えられる、他方、 $\xi \in T_p M$ の水平リフト $\tilde{\xi} \in T_v TM$ を、 ξ に接する M の曲線 $x(t) (x(0) = \xi)$ に沿って v を平行移動して得られる $v(t)$ を v を通る TM の曲線と見て、その接ベクトル $\dot{v}(0)$ として定義する。このような水平リフト全体 H_v は $T_v TM$ の n 次元部分空間で、 $D\tau_M : H_v \rightarrow T_p M$ は同型写像を与える。よって、 $T_v TM = H_v \oplus V_v$ と直和分解され、 $T_v TM$ の元は $\tilde{X} = (X_h, X_v)$ の形に表される¹⁴。例えば、測地スプレーは $v \in TM$ で $(v, 0)$ と表される。このとき TM のシンプレクティック形式 ω は

$$\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \langle X_h, Y_v \rangle - \langle X_v, Y_h \rangle \quad (3)$$

¹¹ 変分学の立場からは、Lagrangian として TM 上の関数 $E(v) = g(v, v)/2; v \in TM$ を取り、 C_{pq} 上の関数 $E(c) = \int_0^1 E(\dot{c}(t)) dt$ (エネルギー積分) の Euler-Lagrange 方程式 $\partial E(x, \dot{x}) / \partial x^i = d/dt(\partial E(x, \dot{x}) / \partial \dot{x}^i)$ を Levi-Civita 接続の共変微分を用いて表したものに他ならない。

¹² この性質を持つ Riemann 多様体 (M, g) は完備であるという。§§2.3 参照。

¹³ 古典力学の観点からは TM の Lagrangian \mathcal{L} の Legendre 変換を考えて、Euler-Lagrange 方程式を余接バンドル T^*M の標準的なシンプレクティック構造に関する Hamilton ベクトル場に変換する。 \mathcal{L} としてエネルギー E をとれば、Legendre 変換は Riemann 計量 g による接バンドル TM と T^*M との同一視 \sharp に他ならない。このとき、Hamilton 関数は T^*M 上のエネルギー $E(\alpha) = g^{ij} \alpha_i \alpha_j / 2$ である。

¹⁴ これより、 TM, UM 上に g から佐々木計量と呼ばれる Riemann 計量が入る。以下 TM, UM の距離 d は佐々木計量から誘導されるものとする。

によって与えられる。このシンプレクティック構造に関して、エネルギー $E(v) = g(v, v)/2$ を Hamiltonian とする Hamilton ベクトル場が測地スプレーに他ならない。測地流は TM のシンプレクティック形式を保ち、したがって TM の Liouville 測度 $\Omega := \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (n 回の外積) を保つ。 E は測地流の第 1 積分なので、測地流のエルゴード性等を考えるときは測地流を M の単位接束 $UM = \{v \in TM \mid E(v) = 1/2\}$ (あるいは一般に $TM^e := E^{-1}(e) \subset TM$, $e > 0$) に制限することが多い。特に、コンパクト (一般に完備) Riemann 多様体 (M, g) の場合は、測地流 ϕ^t はすべての $t \in \mathbf{R}$ に対して UM 全体で定義され、 $\{\phi^t : UM \rightarrow UM\}$ は UM の微分同相写像の Liouville 測度を保つ 1 径数変換群を与える¹⁵。

次は、コンパクト Riemann 多様体の殆どすべての始方向 v に対して、測地線 $\gamma_v(t)$ は $t \rightarrow \infty$ につれてその方向までこめていくだけでも v に近づくことを意味する。一見意外に思われるが、測地流 ϕ^t が UM の Liouville 測度を保つことの結果である：

命題 2 (Poincaré 再帰定理). (M, g) をコンパクト (一般に体積有限の完備) Riemann 多様体とする。このとき殆どすべての $v \in UM$ に対して、数列 $t_i \rightarrow \infty$ で $\lim \dot{\gamma}_v(t_i) = v$ を満たすものが存在する¹⁶。

測地線はこの様に変分学・力学系の立場から捉えられるが、Riemann 多様体の一点から走る測地線の挙動を調べるには Riemann 幾何学の基本的な知識が必要であり、その挙動には Riemann 多様体の幾何学的な性質 (特に、曲率)、また位相的な性質が関わる。逆に、測地線は Riemann 幾何学の研究において、常に重要な手法を与え大きな役割を果たしてきた。

2.2 指数写像と正規座標系, Jacobi 場, 測地線の局所最短性

$u \in T_p M$ を始方向とする測地線は $a \in \mathbf{R}$ に対して $\gamma_{au}(t) = \gamma_u(at)$ を満たす。これと $U_p M$, $p \in M$ のコンパクト性から、 $\delta > 0$ が存在して $\gamma_u(1)$ が $T_p M$ の原点 0_p を中心とする半径 δ の距離開球 $\bar{B}_\delta(0_p)$ の任意の元 u に対して定義される。 $\exp_p u := \gamma_u(1)$ と定義することにより、 $\bar{B}_\delta(0_p)$ を含む $T_p M$ のある開集合 D で定義された指数写像 \exp_p を得る：

$$\exp_p t u = \gamma_u(t), \quad \exp_p 0_p = p. \quad (4)$$

$\exp_p|_{B_\epsilon(0_p)}$ が M の p を含む開集合¹⁷ B の上への微分同相写像となるように $\epsilon > 0$ を選べる。そこで、 $T_p M$ の正規直交基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ をひとつ選び、 $q \in B$ に対して $(\exp_p|_{B_\epsilon(0_p)})^{-1}(q) = x^i(q)e_i$ と表し $\varphi(q) = (x^1(q), \dots, x^n(q))$ と定義すれば、微分同相写像 $\varphi : B \rightarrow B_\epsilon(0; \mathbf{R}^n)$ を得る。こうして p の周りの正規座標系と呼ばれる局所チャート (B, φ, x^i) が、測地線を用いて与えられた。

指数写像を考えることにより、測地線の局所的最短性が得られる。

定理 3. $\exp_p : B_\epsilon(0_p; T_p M) \rightarrow B \subset M$ は微分同相写像であるとする。このとき、任意の $q \in B$ に対

¹⁵ η を測地スプレーの UM への制限の双対 1 形式とする。これは測地流 ϕ^t で不変な UM の 1 形式で接触形式と呼ばれる。このとき、 $\eta \wedge (d\eta)^n$ を UM の Liouville 測度というが、 ϕ^t -不変で UM の佐々木計量の Riemann 測度と (定数を除いて) 一致する

¹⁶主張より弱い、「任意の $v \in UM$ の任意の近傍 U に対してある $n > 0$ が存在して $\phi^n U \cap U \neq \emptyset$ 」を示しておく： $U, \phi^1 U, \phi^2 U, \dots, \phi^n U, \dots$ は同じ体積を持つからすべて互いに素ではあり得ない。よって、 $k > l$ が存在して $\phi^k U \cap \phi^l U \neq \emptyset$ 、すなわち $n = k - l$ とおけば $\phi^n U \cap U \neq \emptyset$ 。

¹⁷実際、 $B = B_\epsilon(p; M) := \{x \in M \mid d(x, p) < \epsilon\}$ である。ここで、 $B_r(x; X)$ は距離空間 X の x を中心とし半径 r の距離開球を表す。

して p, q を結ぶ最短測地線 $\gamma \in C_{pq}$ が唯一存在し, γ は $\gamma_{pq}(t) := \exp_p tu; u = (\exp_p|_{B_\epsilon(o_p)})^{-1}(q)$ ($0 \leq t \leq 1$) で与えられる. 特に, $\exp_p(B_\epsilon(o_p; T_pM)) = B_\epsilon(p; M)$ である.

Riemann 多様体 M の指数写像 $\exp_p : D(\subset T_pM) \rightarrow M$ は, p を始点とする測地線が M 上どの様に走っていくかを表し, Riemann 計量の性質を反映する. その挙動を調べるのに, \exp_p の $u \in D$ における微分 $D\exp_p(u)$ を求める. $T_u(T_pM)$ を T_pM と同一視し, u で $v \in T_pM$ に接する T_pM の曲線 $s \rightarrow u + sv$ を取れば, $s \rightarrow \exp_p(u + sv)$ の $s = 0$ での接ベクトルが $D\exp_p(u)v$ である. さて, $\alpha(t, s) = \gamma_{u+sv}(t) = \exp_p t(u + sv)$ は測地線 γ_u の測地線から成る変分であり, その変分ベクトル場 $Y(t) = \partial\alpha/\partial s(t, 0)$ に対して $Y(1) = D\exp_p(u)v$ を得る. 一般に, 測地線 $\gamma(t)$ の測地線による変分 α の変分ベクトル場を $Y(t)$, $\nabla = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}$ と置くととき, $Y(t)$ は次を満たす:

$$\begin{aligned} \nabla\nabla Y(t) &= \nabla_{\partial\alpha/\partial t}\nabla_{\partial\alpha/\partial t}\partial\alpha/\partial s = \nabla_{\partial\alpha/\partial t}\nabla_{\partial\alpha/\partial s}\partial\alpha/\partial t = \\ R(\dot{\gamma}(t), Y(t))\dot{\gamma}(t) + \nabla_{\partial\alpha/\partial s}\nabla_{\partial\alpha/\partial t}\partial\alpha/\partial t &= R(\dot{\gamma}(t), Y(t))\dot{\gamma}(t). \end{aligned}$$

上の $D\exp_p(u)v$ の場合, $Y(t)$ はさらに初期条件 $Y(0) = 0$, $\nabla_{\dot{\gamma}(0)}Y = v$ を満たす. 測地線 $\gamma(t)$ に沿うベクトル場 $Y(t)$ は微分方程式

$$\nabla\nabla Y(t) + R(Y(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = 0 \quad (5)$$

を満たすとき γ に沿う Jacobi 場という. (5) は測地線の方程式を線形化した 2 階線形常微分方程式系で, 初期条件 $Y(0), \nabla Y(0)$ を与えると測地線 $\gamma(t)$ が定義されている範囲で一意的な解を持つ. 特に, 測地線 $\gamma(t)$ に沿う Jacobi 場全体は $2n$ 次元ベクトル空間をなす. また, $f(t) := \langle Y(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$ は (4) より $f''(t) \equiv 0$ を満たし, $f(t) = \langle Y(0), \dot{\gamma}(0) \rangle + \langle \nabla Y(0), \dot{\gamma}(0) \rangle t$ と書け t の 1 次式である. これを $D\exp_p(u)v$ に適用して次の Gauss の補題を得る:

補題 4. $\exp_p : D \rightarrow M$ を指数写像とする. $u \in D, v \in T_pM$ に対して, $Y(t)$ を γ_u に沿う初期条件 $Y(0) = 0, \nabla Y(0) = v$ を満たす Jacobi 場とすれば, $D\exp_p(u)v = Y(1)$ であり, 次が成立する:

$$D\exp_p(u)u = \dot{\gamma}_u(1), \quad \langle D\exp_p(u)v, \dot{\gamma}_u(1) \rangle = \langle v, u \rangle. \quad (6)$$

特に, $\langle v, u \rangle = 0$ であれば, $D\exp_p(u)v$ は $\dot{\gamma}_u(1)$ に直交する. なお, $t > 0$ に対して $D\exp_p(tu)v = Y(t)/t$ で, これより $\lim_{t \downarrow 0} Y(t)/t = \nabla Y(0) = v$.

注意 5. $\phi^t : TM \rightarrow TM$ を測地流とすると, $\phi^t(u) = \dot{\gamma}_u(t)$ であった. その微分 $D\phi^t : T_uTM \rightarrow T_{\phi^t(u)}TM$ は $\tilde{X} = (A, B) \in H_u \oplus V_u =: T_uTM$ に対して $D\phi^t(\tilde{X}) = (Y(t), \nabla Y(t))$ で与えられる. ここで $Y(t)$ は初期条件 $Y(0) = A, \nabla Y(0) = B$ を満たす γ_u に沿った Jacobi 場である. もし $TM^e = \{v \in TM \mid E(v) = e\}$ に制限すれば, $u \in T_eM$ に対して $T_uTM^e = \{(A, B) \in H_u \oplus V_u \mid A, B \perp u\}$ に注意すれば, 上の Jacobi 場は γ_u に垂直なものを考えることになる.

$u \in D$ で微分 $D\exp_p(u) : T_pM \rightarrow T_{\exp_p(u)}M$ の階数 $\text{rk}D\exp_p(u) < n$ となるためには, 補題 4 より γ_u に沿う恒等的に 0 でない Jacobi 場 Y で $Y(0) = Y(1) = 0$ となるものが存在することが必要十分である. さて, p を始点とする測地線 γ に対して, γ に沿う恒等的に 0 でない Jacobi 場 $Y(t)$ で,

$Y(0) = Y(t_0) = 0 (t_0 > 0)$ を満たすものが存在するとき, $\gamma(t_0)$ を γ に沿った p の共役点, t_0 を p の共役値, そのような Jacobi 場のなすベクトル空間の次元 $n(t_0)$ を共役点 $\gamma(t_0)$ の重複度という¹⁸. 上の γ_u の場合には, p の共役点 $\exp_p u$ の重複度は $D\exp_p(u)$ の零数 (核の次元) に等しい. 測地線の局所最短性から共役点は離散的に現れることを注意しよう. もし, $q = \gamma(l)$ が γ に沿っての共役点でなければ, $v \in T_p M$ に対して $Y(0) = 0, \nabla Y(0) = v$ を満たす γ に沿った Jacobi 場 Y の l における値 $Y(l)$ を対応させる線形写像 $\phi: T_p M \rightarrow T_q M$ は単射で, 従って全単射になる. 特に, 任意の $w \in T_q M$ に対して $Y(0) = 0, Y(l) = w$ を満たす γ に沿った Jacobi 場 Y が唯一つ存在する.

次に, 測地線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ の変分 α が与えられたとき, 変分曲線 α_s に対してエネルギー積分の第 2 変分 $d^2 E(\alpha_s)/ds^2|_{s=0}$ を求める¹⁹.

命題 6 (第 2 変分公式). 測地線 γ の変分 α に対する変分ベクトル場を $X \in T_\gamma C_{pq}$ とする. このとき, 次式が成立する:

$$\frac{d^2 E(\alpha_s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \int_0^1 \{ \langle \nabla X(t), \nabla X(t) \rangle - \langle R(X(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), X(t) \rangle \} dt \quad (7)$$

測地線 $\gamma \in C_{pq} = \{c: [0, 1] \rightarrow M \mid c(0) = p, c(1) = q\}$ は, C_{pq} 上のエネルギー積分 E の臨界点であった. γ が E の極小値を取るかどうかを調べるために, 多変数微分法の場合にならって第 2 変分公式から得られる E のヘッシアン $D^2 E$ を考える. すなわち, $X, Y \in T_\gamma C_{pq}$ に対して

$$\begin{aligned} D^2 E(X, Y) &= \int_0^1 \{ \langle \nabla X(t), \nabla Y(t) \rangle - \langle R(X(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), Y(t) \rangle \} dt \\ &= - \int_0^1 \langle \nabla^2 X(t) + \langle R(X(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), Y(t) \rangle dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \langle \nabla X(t_i - 0) - \nabla X(t_i + 0), Y(t_i) \rangle \\ &\quad + \langle \nabla X(1 - 0), Y(1) \rangle - \langle \nabla X(+0), Y(0) \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

は $T_\gamma C_{pq}$ 上の対称な双 1 次形式で, γ の指数形式ともいう ($0 = t_0 < \dots < t_N = 1$ は ∇X の不連続点を表す). 測地線の局所最短性に関して次が基本的である.

定理 7. $\gamma \in C_{pq}$ を測地線とすると, 次が成り立つ.

(1) もし, どの $\gamma(t)$ ($0 < t \leq 1$) も γ に沿う p の共役点でないならば, C_{pq} における γ の (一様位相に関する) 近傍 \mathcal{U} が存在して, 任意の $c \in \mathcal{U}$ に対して $L(c) \geq L(\gamma)$ が成り立つ. さらに, 等号が成り立てば c は γ からパラメータ変換によって得られる.

(2) もし, γ に沿う p の共役点 $\gamma(t_0), 0 < t_0 < 1$, が存在すれば, γ の変分曲線 α_s が存在して, $L(\alpha_s) < L(\gamma)$ が十分小さな $|s| > 0$ に対して成り立つ.

測地線 $\gamma \in C_{pq}$ に対して, $q = \gamma(1)$ が p の共役点でないための必要十分条件は γ の指数形式 $D^2 E$ が非退化となることであった. さらに γ の指数形式 $D^2 E$ の退化空間は γ に沿った $Y(0) = Y(1) = 0$

¹⁸ $q = \gamma(t_0)$ が γ に沿う p の共役点ならば, p は γ^{-1} に沿う q の共役点である.

¹⁹ パラメータの範囲は $[0, 1]$ としているが, 任意の $[a, b]$ に対しても同様に成り立つ.

を満たす Jacobi 場全体からなり、その次元 (零数) $\text{null}\gamma$ は $q = \gamma(1)$ の共役点としての重複度に等しい。 D^2E の指数 $\text{ind}\gamma$ は $T_\gamma C_{pq}$ の部分空間でその上で D^2E が負定値となるようなものうち極大となる部分空間の次元として定義される。 $T_\gamma C_{pq}$ を折れ線からなる有限次元多様体で近似することにより、 $\text{ind}\gamma$ は有限で D^2E の負の固有値の重複度を込めた総数に等しいことが分かる。 指数は C_{pq} 上の関数 E の危点 γ に関する不変量として Morse 理論で重要な役割を果たす。 なお $\text{ind}_0\gamma := \text{ind}\gamma + \text{null}\gamma$ を γ の拡大指数 (extended index) という。

次の Morse 指数定理は、指数を共役点を用いて表すことが出来ることを主張する。

定理 8. (M, g) を Riemann 多様体, $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ を p, q を結ぶ測地線とする。 $\gamma(s_1), \dots, \gamma(s_k)$ ($0 < s_1 < \dots < s_k < 1$) を $\gamma|_{(0, 1)}$ に沿っての p の共役点, $n(s_j)$ ($j = 1, \dots, k$) を $\gamma(s_j)$ の重複度とする。 このとき γ の指数 $\text{ind}\gamma$ は有限で

$$\text{ind}\gamma = \sum_{j=1}^k n(s_j), \quad (9)$$

すなわち、 γ の指数は $\gamma|_{(0, 1)}$ に沿っての p の共役点の重複度を込めた個数に等しい。

第 2 変分公式には断面曲率が現れており、断面曲率の言葉で測地線の指数を評価することができるとする。 (M, g) の断面曲率 K は $0 < \delta \leq K \leq 1$ を満たすとする。 このとき M を定曲率 $1, \delta$ の球面と比較することにより次を得る (Morse-Schoenberg 比較定理; $k \in \mathbf{N}$) :

$$\begin{aligned} L(\gamma) < k\pi &\Rightarrow \text{ind}_0\gamma \leq (k-1)(n-1) \\ L(\gamma) \leq k\pi &\Rightarrow \text{ind}\gamma \leq (k-1)(n-1) \\ L(\gamma) > k\pi/\sqrt{\delta} &\Rightarrow \text{ind}\gamma \geq k(n-1) \\ L(\gamma) \geq k\pi/\sqrt{\delta} &\Rightarrow \text{ind}_0\gamma \geq k(n-1). \end{aligned}$$

2.3 完備性 (Hopf-Rinow の定理)

一般には測地線はすべてのパラメータに対して定義される (無限に伸ばせる) とは限らないし、与えられた 2 点を最短測地線で結ぶことがいつでもできるわけではない (すなわち、一般には指数写像 $\exp_p : D \rightarrow M$ の定義域は $D = T_p M$ とは限らないし、また M の上への写像であるとも限らない)。例えば、 $(\mathbf{R}^n, g_{\text{can}})$ から原点 0 を除いたリーマン多様体 M に対して、 $\mathbf{x} (\neq 0)$ と $-\mathbf{x}$ を結ぶ最短線は存在しない。しかし、これは無理に 1 点を除いたためで、 (M, d) は距離空間として完備ではない。 (M, d) が完備な Riemann 多様体は次のような良い性質を持つことが分かる (Hopf-Rinow の定理) :

定理 9. 連結 Riemann 多様体 (M, g) に対して、次の (1) ~ (6) は同値であり、このとき g は完備リーマン計量²⁰であるという。

(1) (M, d) は完備である (任意の Cauchy 列は収束列である)。

(2) 任意の点 $p \in M$ に対して次が成り立つ: 任意の $u \in T_p M$ に対して測地線 $\gamma_u(t)$ はすべての $t \geq 0$ に対して定義され、 \exp_p は $T_p M$ 全体で定義される。

²⁰完備性の概念は Riemann 多様体の大域的な性質に興味を持たれるようになった段階で初めて明確になった。H. Hopf はその先駆者であるが、[Ho-Ri] では曲面の場合に示された。一般の Riemann 多様体に対しては [My2] で示された。

(3) ある点 $p \in M$ に対して次が成り立つ: 任意の $u \in T_p M$ に対して測地線 $\gamma_u(t)$ はすべての $t \geq 0$ に対して定義され, \exp_p は $T_p M$ 全体で定義される.

(4) 任意の点 $p \in M$ に対して次が成り立つ: $\bar{B}_r(p; M) (= \{q \in M \mid d(p, q) \leq r\})$ は任意の $r > 0$ に対してコンパクトである.

(5) ある点 $p \in M$ に対して次が成り立つ: $\bar{B}_r(p; M)$ は任意の $r > 0$ に対してコンパクトである.

(6) 測地流 (UM, ϕ^t) がすべて $t \in \mathbf{R}$ のに対して UM 全体で定義される.

完備連結多様体 M の任意の 2 点を結ぶ最短測地線が存在し, 各点 $p \in M$ での指数写像 \exp_p は $T_p M$ 全体から M の上への写像である. 特に, M がコンパクトならば M 上の任意の Riemann は完備であり, 直径 $d(M) = \sup\{d(p, q) \mid p, q \in M\} < +\infty$ で $d(M) = d(p, q)$ を満たす点 $p, q \in M$ が存在する.

以下, Riemann 多様体 (M, g) は完備である場合のみ考える. まず点 $p \in M$ を始点とする測地線の挙動を調べよう. $u \in U_p M$ を始方向とする正規測地線 γ_u は, 十分小さな $t > 0$ に対して $\gamma_u|_{[0, t]}$ が p と $\gamma_u(t)$ を結ぶ (パラメータを除き唯一の) 最短線であるという性質を持つ. しかし, t が例えば M の直径 $d(M)$ を超えれば $\gamma_u|_{[0, t]}$ は最短線ではない. そこで, $u \in U_p M$ に対し

$$i_p(u) := \sup\{t > 0 \mid \gamma_u|_{[0, t]} \text{ は } p \text{ と } \gamma_u(t) \text{ を結ぶ最短線である}\} \quad (10)$$

と置く. このとき, 次が成り立つ.

補題 10. 完備リーマン多様体に対して $i_p(u) < +\infty$ ならば, $t_0 = i_p(u)$ と置くととき, $\gamma_u|_{[0, t_0]}$ は最短線で, 次のいずれかが成り立つ:

1. $\gamma_u(t_0)$ は $\gamma_u|_{[0, t_0]}$ に沿って p の第 1 共役点である.
2. $v \in U_p M, v \neq u$ が存在して, $\gamma_u(t_0) = \gamma_v(t_0)$ を満たす.

逆に, $u \in U_p M$ に対して $\gamma_u|_{[0, t_0]}$ が最短線で, (1) か (2) が成り立てば $t_0 = i_p(u)$ である. さらに, $UM \ni u \mapsto i_p(u) \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ は連続である.

さて, $p \in M$ に対して $i_p(u) < +\infty$ のとき, $\exp_p i_p(u)u = \gamma_u(i_p(u))$ を γ_u に沿う p の切断点 (最小点) といい, p の切断点全体の集合 C_p を p の切断跡 (cut locus) という. また, $i_p(u)u \in T_p M$ を γ_u に沿う p の接切断点 (接最小点) といい, p の接切断点全体の集合 \tilde{C}_p を p の接切断跡 (tangent cut locus) という. $(\mathbf{R}^n, g_{\text{can}})$ や (H^n, g_{can}) では, 任意の点 p に対して $C_p = \emptyset$ である. (S^n, g_{can}) では $C_p = \{-p\}$ は p の対蹠点からなり, $(\mathbf{R}P^n, g_{\text{can}})$ では $C_p = \{q \in \mathbf{R}P^n \mid d(p, q) = \pi/2\}$ は全測地的超平面として与えられる実射影超平面 $\mathbf{R}P^{n-1}$ である²¹.

$q \in M \setminus C_p$ は p と唯一の最短正規測地線²²で結べ, $q \in C_p$ が p と唯一の最短正規測地線 γ で結ばれれば, γ に沿っての p の第 1 共役点である. さて

$$\tilde{I}_p := \{tu \mid 0 \leq t < i_p(u), u \in U_p M\}$$

²¹ この事実は階数 1 のコンパクト正曲率対称空間である一般体上の射影空間 $\mathbf{K}P^n$ に対しても成立する. 球面やこれらの射影空間の標準的な Riemann 計量に関してすべての測地線は同じ長さの閉測地線になる.

²² 正規とは弧長をパラメータに持つ測地線を意味する.

とおき、 $\mathcal{I}_p := \exp_p \tilde{\mathcal{I}}_p$ を p の内部集合という。このとき $\exp_p|_{\tilde{\mathcal{I}}_p} : \tilde{\mathcal{I}}_p \rightarrow M \setminus C_p$ は微分同相写像であることは容易に分かる。特に、 $\mathcal{I}_p = M \setminus C_p$ は n 次元開円板に同相であり、また $\exp_p(\partial\tilde{\mathcal{I}}_p) = C_p$ で、 C_p は閉集合である。

M がコンパクトならば、 $\tilde{\mathcal{I}}_p$ の境界 $\partial\tilde{\mathcal{I}}_p = \tilde{C}_p$ は S^{n-1} に同相で、 M は p の切断跡 C_p に写像 $\exp_p : \tilde{C}_p \rightarrow C_p$ により n 次元円板を接着させて得られる。また、 C_p は $M \setminus \{p\}$ の強変位レトラクトになっている。このように、 C_p は M の位相の本質的な部分を含むといえる。

$p \in M$ に対し、 $i_p := \inf_{u \in U_p M} i_p(u)$ を M の p における単射半径という。これは p における正規座標近傍の大きさを表し、 p を始点とする測地線の第 1 共役値の最小値と、 p を基点とする自明でない測地ループ²³の長さの最小値の小さい方で与えられる。完備リーマン多様体 M の単射半径は $i_M := \inf_{p \in M} i_p$ で与えられる。一般には $i_M = 0$ となり得るが、 M の正規座標近傍の大きさの様な評価を与え、計量構造と多様体の構造の関連を調べる際に重要な役割を果たす。特に、 M がコンパクトならば i_M は正で、 M の測地線の第 1 共役値の最小値と自明でない閉測地線²⁴の長さの最小値の小さい方で与えられる。

関連して次が成り立つ ($\epsilon = i_M$ と取れる) :

- M をコンパクト Riemann 多様体とすると、正数 $\epsilon = \epsilon(M)$ で次の性質をもつものが存在する : 任意の 2 点 $p, q \in M$ が $d(p, q) < \epsilon$ を満たせば、 p, q を結ぶ最短測地線が唯一つ存在し、 p, q に滑らかに依存する。特に、 $d^2(p, q)$ は $\{(p, q) \in M \times M \mid d(p, q) < \epsilon\}$ 上滑らかな関数である。

2. 4 Jacobi 場と測地 3 角形の比較定理

完備端連結定曲率 k のリーマン多様体 M_k^n は最も標準的なリーマン多様体であり、その上の測地線やヤコビ場の挙動はよく分かっている。 n 次元リーマン多様体 M の断面曲率 K が定数 $\delta(\Delta)$ に対して、常に $K \geq \delta(K \leq \Delta)$ を満たすとき、或いはリッチ曲率 $\rho(u)$ が常に $\rho(u) \geq (n-1)\delta$ を満たすとき、 M の幾何学的量を定曲率空間の対応する量と比較する H. E. Rauch に始まる比較定理と呼ばれる手法がある。以下関数 s_δ を次で与える :

$$s_\delta(x) = \sin(\sqrt{\delta}x)/\sqrt{\delta} \ (\delta > 0), \quad s_0(x) = x, \quad s_\delta(x) = \sinh(\sqrt{-\delta}x)/\sqrt{-\delta} \ (\delta < 0).$$

- M の断面曲率は $K \geq \delta$ を満たすとする。正規測地線 $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ に沿う $p = \gamma(0)$ の第 1 共役値を t_0 とすれば、 $0 < t_0 \leq \pi/\sqrt{\delta}$ である²⁵。 γ に沿う γ に垂直なヤコビ場 $Y(t)$ が $Y(0) = 0$ を満たせば、 $t \rightarrow |Y(t)|/s_\delta(t)$ は $0 < t < t_0$ で単調減少であり、特に次が成立する :

$$|Y(t)| \leq |\nabla Y(0)|s_\delta(t), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (11)$$

- $K \leq \Delta$ とし、 $\gamma, Y(t)$ は (1) の通りとする。このとき、 $t_0 \geq \pi/\sqrt{\Delta}$ で、 $t \rightarrow |Y(t)|/s_\Delta(t)$ は

²³測地線 $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ は $\gamma(l) = \gamma(0)$ を満たすとき測地ループ、 $\gamma(l) = \gamma(0), \dot{\gamma}(l) = \dot{\gamma}(0)$ を満たすとき閉測地線であるという。これらは自明な点曲線を含む。

²⁴測地線 $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ は $\gamma(0) = \gamma(l), \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(l)$ を満たすとき閉測地線であると言う。

²⁵ $\delta \leq 0$ の場合は、 $\pi/\sqrt{\delta} = +\infty$ と考える。 $\Delta \leq 0$ の場合も同様。

$0 < t < \pi/\sqrt{\Delta}$ で単調増加である．特に次が成立する：

$$|Y(t)| \geq |\nabla Y(0)|_{s_\Delta(t)}, \quad 0 \leq t \leq \pi/\sqrt{\Delta}. \quad (12)$$

- M のリッチ曲率 $\rho(u) \geq (n-1)\delta$ とし， γ は (1) の通りとする．このとき， $0 < t_0 \leq \pi/\sqrt{\delta}$ で，超曲面 $N_t := \exp_p\{v \in T_p M \mid |v| = t\}$ の $\gamma(t)$ における面積要素²⁶ $\theta(t)dS^{n-1}$ に対して， $t \rightarrow \theta(t)/s_\delta^{n-1}(t)$ は $0 < t < t_0$ で単調減少である．特に次が成立する：

$$\theta(t) \leq s_\delta^{n-1}(t), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (13)$$

また， $p \in M$ からの距離関数を $r(q) = d(p, q)$ とするとき，その Laplacian に対して

$$\Delta r(q) \geq -(n-1)(c_\delta/s_\delta)(r(q)); \quad q \in \mathcal{I}_p \setminus C_p.$$

が成り立つ．特に， $\rho(u) \geq 0$ なら $\Delta r(q) \geq -(n-1)/r(q); q \in \mathcal{I}_p \setminus C_p$ である．

応用として，測地 3 角形やヒンジ (hinge) に関する比較定理がある．Riemann 多様体 M の測地 3 角形 T とは， M の頂点と呼ばれる異なる 3 点 $\{p_i\}_{i=1}^3$ と，辺と呼ばれる p_{i+1}, p_{i+2} を結ぶ最短測地線 γ_i ($i = 1, 2, 3$ で 3 を法として考える) からなる図形である．頂点 p_i ($i = 1, 2, 3$) において $\gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}^{-1}$ (の始方向) がなす角 α_i を 3 角形 T の角という． M の断面曲率が $K \geq \delta$ や $K \leq \Delta$ を満たすとき， T_δ や T_Δ で完備単連結定曲率モデル平面 M_δ^2 や M_Δ^2 の T と同じ辺長を持つ測地 3 角形を表す²⁷．次に， M のヒンジ (測地 2 辺形) $H = H(p; \gamma, \tau)$ とは，頂点 p と，それぞれ $p, q; p, r$ を結ぶ 2 本の最短測地線分 γ, τ からなる図形で， γ, τ が p でなす角を H の角という．定曲率モデル平面 M_δ^2 で， H と同じ辺長と角をもつヒンジを H_δ で表す．測地 3 角形は 3 つのヒンジを与え，ヒンジ H の 2 辺の終点 q, r を最短測地線で結んで閉じれば測地 3 角形 T_H を得る．このとき M の測地 3 角形とヒンジに関して次が成り立つ ($\dim M \geq 2$ とする)．

- (Rauch 比較定理) 完備連結 Riemann 多様体 M は $K \leq \Delta$ を満たすとする． M の測地 3 角形 T で次の条件を満たすものを考える： T は各頂点の内部集合に含まれ，その周長 $l(T)$ は $l(T) < 2\pi/\sqrt{\Delta}$ を満たすとする ($\Delta \leq 0$ ならこの条件は不要)．このとき，対応する M_Δ^2 の測地 3 角形 T_Δ が存在して，その角を α_i^Δ ($i = 1, 2, 3$) とするとき， $\alpha_i \leq \alpha_i^\Delta$ ($i = 1, 2, 3$) が成り立つ．同様に， M のヒンジ H で次の条件を満たすものを考える： H を閉じて得られる測地 3 角形 T_H は頂点 p の内部集合に含まれ，周長は $l(T_H) < 2\pi/\sqrt{\Delta}$ を満たす．このとき M_Δ^2 で，同じ辺長と角を持つヒンジ $H_\Delta = (\tilde{p}; \tilde{\gamma}, \tilde{\tau})$ を考えれば， $d(q, r) \geq d(\tilde{q}, \tilde{r})$ を満たす (\tilde{q}, \tilde{r} はそれぞれ $\tilde{\gamma}, \tilde{\tau}$ の終点である)．
- (Toponogov 比較定理) 完備連結 Riemann 多様体 M は $K \geq \delta$ を満たすとする．このとき， M の測地 3 角形 T に対してその周長は $l(T) \leq 2\pi/\sqrt{\delta}$ を満たす．また，対応する M_δ^2 の測地 3 角

²⁶ $T_p M$ の正規直交基底 $\{e_1 = \dot{\gamma}(0), e_2, \dots, e_n\}$ に対して， Y_i ($2 \leq i \leq n$) を $Y_i(0) = 0, \nabla Y_i(0) = e_i$ を満たす Jacobi 場とすると， $\theta(t) = (\det(\langle Y_i(t), Y_j(t) \rangle)_{2 \leq i, j \leq n})^{1/2}$ で与えられる．

²⁷完備単連結定曲率モデル空間 M_k^n の任意の測地 3 角形 (ヒンジ) は， M_k^2 に等長的な 2 次元全測地的部分多様体に含まれるので， M_k^n のモデル 3 角形 (ヒンジ) は M_k^2 で考えてよい．

形 T_δ が存在して、その角を α_i^δ ($i = 1, 2, 3$) とするとき $\alpha_i \geq \alpha_i^\delta$ ($i = 1, 2, 3$) が成り立つ。同様に、 M のヒンジ H に対して、同じ辺長と角を持つ M_δ^n のヒンジ $H_\delta = (\tilde{p}; \tilde{\gamma}, \tilde{\tau})$ を考えれば、 $d(q, r) \leq d(\tilde{q}, \tilde{r})$ を満たす (\tilde{q}, \tilde{r} はそれぞれ $\tilde{\gamma}, \tilde{\tau}$ の終点である)。

- $n(\geq 2)$ 次元完備連結 Riemann 多様体 M^n は $\rho(u) \geq (n-1)\delta$ を満たすとする。このとき、次の Bishop-Gromov の定理が成立する ($v_\delta^n(r)$ はモデル空間 M_δ^n の半径 r の距離球の体積を表す) :
 - (1) $\text{vol}B_r(p; M) \leq v_\delta^n(r)$ ($\delta > 0$ ときは $r \leq \pi/\sqrt{\delta}$ とする) であり、等号は $B_r(p; M)$ がモデル空間 M_δ^n の半径 r の距離球に等長的なとき、かつそのときに限り成立する。特に $\delta > 0$ の場合、 $\text{vol}M \leq v_\delta^n(\pi/\sqrt{\delta}) = \text{vol}S^n(\delta)$ で、等号は M が球面 $S^n(\delta)$ に等長的なときかつそのときに限り成立する。
 - (2) $r \rightarrow \text{vol}B_r(p; M)/v_\delta^n(r)$ はすべての $r \geq 0$ に対して単調減少である。特に、任意の $0 \leq r \leq R$ に対して次が成り立つ :

$$\frac{\text{vol}B_R(p)}{v_\delta^n(r)} \leq \frac{\text{vol}B_R(p)}{\text{vol}B_r(p)} \leq \frac{v_\delta^n(R)}{v_\delta^n(r)} \leq \frac{v_\delta^n(R)}{\text{vol}B_r(p)}.$$

2. 5 切断跡と単射半径評価

切断跡 (cut locus) の概念は最初、凸曲面に対して H. Poincaré ([Po]) により、一般の場合 J. H. C. Whitehead ([Wh]) によって導入された。S. B. Myers は解析的な閉曲面 S に対して 1 点 p の切断跡 C_p の構造を詳細に調べ、 C_p は有限グラフの構造を持つことを示した。その端点は p の共役点で、 p に向かって振り返った p の第一共役跡の尖点になっている。また向き付け可能のときはグラフとしての第 1Betti 数は S のそれに等しい。特に単連結の場合は C_p は樹 (tree: 1 点の場合を含む) である ([My2])²⁸。その後、M. Berger と共に球面定理の証明に取り組んだ W. Klingenberg は切断跡を取り上げ単射半径の評価を与えたが、切断跡は多様体の位相構造と密接に関連することもあり再び多くの人の興味を引くことになった。

例えば、次は F. Warner による ([War]) :

- 包含写像 $\iota: C_p \hookrightarrow M$ はホモトピー群の間の同型写像 $\iota_*: \pi_i(C_p, q) \rightarrow \pi_i(M, q)$ ($1 \leq i \leq n-2$) および全射 $\iota_*: \pi_{n-1}(C_p, q) \rightarrow \pi_{n-1}(M, q)$ を導く。
- ホモロジー群・コホモロジー群に関しては同型写像

$$\iota_*: H_i(C_p, \mathbf{Z}) \rightarrow H_i(M, \mathbf{Z}) \quad (\iota^*: H^i(M, \mathbf{Z}) \rightarrow H^i(C_p, \mathbf{Z})); \quad 1 \leq i < n-1$$

を得る。もし、 M が向き付け可能ならば $i = n-1$ に対しても ι_*, ι^* は同型写像になる。 M が向き付け不可能の場合には、次の完全系列が成立する :

$$\begin{cases} 0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_{n-1}(C_p, \mathbf{Z}) \rightarrow H_{n-1}(M, \mathbf{Z}) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow H^{n-1}(M, \mathbf{Z}) \rightarrow H^{n-1}(C_p, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0. \end{cases}$$

なお、 $H_n(C_p, \mathbf{Z}) \cong 0 \cong H^n(C_p, \mathbf{Z})$ である。

²⁸ 2 次元完備 Riemann 多様体における測地線や切断跡については [Shi-Shio-Ta] に詳しい解説がある。

測地線 γ に沿って $p = \gamma(0)$ の切断点 $q = \gamma(t)$ は p の (第 1) 共役点であるか, p, q を結ぶ他の最短線が存在するような点であった. \tilde{Q}_p^1 で p を始点とする測地線に沿った p の第 1 接共役跡 (第 1 接共役点の集合), $Q_p^1 := \exp_p \tilde{Q}_p^1$ を p の第 1 共役跡とする. 一般には, 切断跡 C_p と Q_p^1 の関係は簡単ではない.

- F. Warner は Morse 理論を用いて次を示した :

M を完備単連結 Riemannian 多様体, $p \in M$ とする. もし, 任意の $w \in \tilde{Q}_p^1$ の重複度 $n(w) \geq 2$ ならば, $\tilde{C}_p = \tilde{Q}_p^1$ である (特に, $C_p = Q_p^1$) である. 逆に, $C_p = Q_p^1$ ならば M は単連結である.

- A. Weinstein は S^2 以外の任意のコンパクト多様体 M に対して, Riemannian 計量 g で, ある点 $p \in M$ に対して $Q_p^1 \cap C_p = \phi$ であるようなものを構成した ([We2]). S^2 の場合は, 任意の Riemannian 計量と任意の点 $p \in S^2$ に対して $C_p \cap Q_p^1 \neq \phi$ である.

1 点の切断跡 C_p を具体的に定めるのは容易でない. コンパクト対称空間・ある種の斉次空間 ([Sa2],[Sa3],[Tak]), 回転面のクラス ([Ta3]), 楕円面を含む Liouville 多様体のクラス等 ([It-Ki1], [It-Ki2]) の場合は詳細な構造が知られている. また, 切断跡 C_p の構造について J. J. Hebda, V. Ozol, K. Sugahara, J. Itoh, Itoh-Tanaka 等の多くの研究がある. 例えば C_p の Hausdorff 次元は整数であることが知られている ([It-Ta1]). また, Alexandrov 曲面の 1 点の切断跡については [Shi-Ta] を参照されたい.

一般のコンパクト多様体の 1 点の切断跡の構造に関しては, M. Buchner は実解析的な Riemann 多様体場合は 3 角形分割可能なことを示した ([Buc1]). 特異点理論と関連して次が知られている: コンパクトな多様体上の一般的な Riemann 計量に対して, 1 点 p の切断跡は 3 角形分割可能になり, Riemann 計量の変形に関して安定である ([Wa]). また, Weinstein は一般的な Riemann 計量に対して, 1 点の共役跡の局所構造を定め ([We2]), Buchner は 6 次元以下の場合の一般的な Riemann 計量に関する切断跡の局所構造の分類を行った ([Buc2]).

他方, H. Gluck–D. Singer は任意の C^∞ 級多様体 M とその任意の点 $p \in M$ に対し, M 上の C^∞ 級 Riemann 計量で C_p が 3 角形分割可能でない様なものを構成できることを示し, さらに \mathbf{R}^3 の凸回転閉曲面でその空でない開集合の点の切断跡が 3 角形分割可能でない例を構成した ([Gl-Si]).

完備 Riemannian 多様体 (M, g) に対して, 点 p からの距離関数 $f := d_p$ ($d_p(x) := d(p, x)$) は最も基本的な関数であり, 各 $q (\neq p)$ において任意の $\xi \in U_q M$ に対して, 第 1 変分公式より方向微分

$$f'_q(\xi) = -\cos \alpha,$$

を持つ: ここで, α は ξ と q から p への (弧長パラメータの) 最短測地線のなす角の下限である. $q (\neq p)$ が p の切断跡 C_p に属さなければ, p, q を結ぶ唯一本の正規最短測地線 γ が存在し, d_p は q で微分可能でその勾配ベクトル $\nabla d_p(q)$ は $\dot{\gamma}(l), l = d(p, q)$ で与えられる. 特に, $|\nabla d_p(q)| = 1$ である. 他方 $q \in C(p)$ の場合は, d_p は q で微分可能とは限らない.

さて, $q (\neq p)$ が $f = d_p$ の危点であることを次のように定義する: 任意の $\xi \in U_q M$ に対して q から p への最短測地線 γ でその始方向が ξ と角 $\alpha \leq \pi/2$ をなす ($\langle \dot{\gamma}(0), \xi \rangle \geq 0$). 危点 $q (\neq p)$ は p の切断跡の元で, そこでは f は微分可能でないことに注意されたい (なお, p はの唯一の f の最小点で

あり, f の危点であると考え). また, $q (\neq p)$ が f の危点でないことは, q から p への (弧長パラメータの) 最短測地線の始方向ベクトルの集合が開半空間に含まれることを意味する. 危点の概念は Grove–Shiohama, M.Gromov([Gro-Shi], [G3]) 等による.

q が危点でなければ, $-f$ に対する擬勾配ベクトル場を構成して q の近傍を M のアイソトピーによって p に近づけることができる. これは Morse 理論で危点を含まない場合の d_p のレベルの変形に対応し, Riemann 幾何学における曲率と位相の関連に関して重要な役割を果たした ([Ch2], [Gro], [Gro-Pe]). 他方, 危点を通過する時の d_p のレベルの変化を調べるには, 一般的な Riemannian 計量に関する p の切断跡 C_p の構造を理解する必要があるが, よく分かっていない.

次に単射半径評価について述べる. 完備 Riemann 多様体 M の $p \in M$ における単射半径 $i_p = i_p(M)$ は $\sup\{r > 0; \exp_p | B_r(p) \text{ は微分同相}\}$ に等しく, M の単射半径 $i_M := \inf\{i_p; p \in M\}$ は正規座標系が有効な距離球の大きさの一般的な評価を与える. M がコンパクトなら $i_M > 0$ であるが Riemann 不変量によるその評価は, 曲率と位相の問題で重要な役割を果たした: まず, Klingenberg は球面定理の証明に際して次の単射半径 $i(M)$ の評価を与えた:

- M をコンパクト単連結偶数次元 Riemann 多様体でその断面曲率が正定数 Δ に対して $0 < K_\sigma \leq \Delta$ を満たすとする. このとき $i_M \geq \pi/\sqrt{\Delta}$ が成り立つ.

しかし, 奇数次元の場合は Berger 球面の場合 $\delta \leq K_\sigma \leq 1$ で $\delta < 1/9$ ならば $i_M < \pi$ となるので, $i_M \geq \pi$ となるには δ/Δ がある正定数で下から押えられている必要がある²⁹. Klingenberg はまた閉曲線の空間における Morse 理論を用いて次を示した:

- M をコンパクト単連結 Riemann 多様体でその断面曲率が正定数 δ, Δ に対して $\delta \leq K_\sigma \leq \Delta$ を満たすとする. このとき $\delta/\Delta > 1/4$ ならば $i_M \geq \pi/\sqrt{\Delta}$ が成り立つ.

Berger の剛性定理の証明では, $\delta/\Delta \geq 1/4$ の仮定の下で単射半径評価 $i_M \geq \pi/\sqrt{\Delta}$ を得る必要があった. Klingenberg の与えた最初の証明は理解が難しかったが, その後 [Ch-Gr],[K-Sa] による証明がある. さらに U. Abresh–W. Meyer は $\delta/\Delta \geq 1/4 - \epsilon$ の場合に単射半径評価を改良し, 球面定理に応用した:

- M をコンパクト単連結 Riemann 多様体でその断面曲率が正定数 δ, Δ に対して $\delta \leq K_\sigma \leq \Delta$ を満たすとする. このとき $\delta/\Delta > 0.117$ ならば $i_M \geq \pi/\sqrt{\Delta}$ が成り立つ.

一般に, 単射半径は Riemann 多様体の次元, 断面曲率の範囲, 直径の上限, 体積の下限によって下から評価されることが J. Cheeger によって示された ([Ch1]). M^n をコンパクト Riemann 多様体とする. $\delta \leq K_\sigma \leq \Delta$ が成り立てば, 単射半径の下からの評価について

- $i_M \geq \min\{\pi/\sqrt{\Delta}, \pi(\text{Vol } M/\alpha_n) \cdot (s_\delta(\min(d(M), \pi/2\sqrt{\delta}))^{1-n})\}$

が成り立つ. ここで α_n は定曲率 1 の球面 S^n の体積を表す. これは断面曲率の範囲, 直径の上限, 体積の下限を与えたとき, これ等を満たす n 次元コンパクト Riemann 多様体の位相に関する有限性定理で基本的な役割を果たす.

²⁹ 奇次正曲率多様体の分類に関する Allof–Wallach 等による例から $\delta \leq K_\sigma \leq 1$ で $\delta < 16/29 \cdot 37$ なら i_M を下から正定数で抑えることはできないことが分かる.

測地線や距離球に関する比較定理 (§§2.4) や単射半径評価は, Riemann 多様体の幾何学的な性質 (特に, 曲率) と位相的な性質の関連を問う大域 Riemann 幾何学で重要な役割を果たしたが, 詳しいことは先に挙げたテキストや [Kar],[Kas],[Ch2],[F],[Shi],[Ba5] 等を参照されたい.

2. 6 例

ここでは例として楕円面の測地線について述べる. 楕円面の測地線の研究は Jacobi([J]) に始まるが, 詳しい証明等は [K2],[It-Ki1],[It-Ki2],[B3],[B4] 等を参照されたい.

$a > b > c > 0$ に対して \mathbf{R}^3 内の楕円面 $M = M(a, b, c)$:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

を考えよう. まず, 座標平面との交線として得られる 3 つの主楕円は E の閉測地線を与える (これ等の楕円の平面曲線としての法ベクトルが楕円面の法ベクトルを与える). それ以外の測地線を調べるのに, M の楕円座標系 (u, v) が便利である. M の 3 つの主楕円以外の点 (x, y, z) を通ってちょうど 1 個ずつの一葉双曲面と二葉双曲面

$$H_u^1: \frac{x^2}{a-u} + \frac{y^2}{b-u} + \frac{z^2}{c-u} = 1 \quad (u \in (c, b); \text{一葉双曲面})$$

$$H_v^2: \frac{x^2}{a-v} + \frac{y^2}{b-v} + \frac{z^2}{c-v} = 1 \quad (v \in (b, a); \text{二葉双曲面})$$

が通っている. これを u, v について解くと

$$x^2(u, v) = \frac{a(a-u)(a-v)}{(a-b)(a-c)}, \quad y^2(u, v) = \frac{b(b-u)(v-b)}{(a-b)(b-c)}, \quad z^2(u, v) = \frac{c(u-c)(v-c)}{(a-c)(b-c)}$$

で, これ等 2 つの双曲面と楕円面の (座標平面に関して対称な) 8 個の交点を与えている. なお, $u = c(v = a)$ の場合は $z = 0(x = 0)$ で $xy(yz)$ -平面と楕円面の交線である主楕円を表す. $u = b$ または $v = b$ の場合は xz -平面と楕円面の交線である主楕円を表す. 楕円座標 (u, v) に関して線素は

$$ds^2 = (v-u)(Udu^2 + Vdv^2); \quad U = \frac{u}{4(a-u)(b-u)(u-c)}, \quad V = \frac{v}{4(a-v)(v-b)(v-c)}$$

で与えられる. 次の事実が以下重要な役割を果たす:

- M は 4 つの臍点 (umbilic : 主曲率が等しい点) を持つ. これらは $(u, v) = (b, b)$ に対応する点で, 主楕円 $y = 0$ 上にあり $x^2 = a(a-b)/(a-c), y = 0, z^2 = c(b-c)/(a-c)$ で与えられる. それらはまた xz -平面上の双曲線 $x^2/(a-b) - z^2/(b-c) = 1$ と楕円面の交点にもなっている.
- u -曲線, v -曲線が M の曲率線 (接ベクトルが主曲率方向) を与える.
- M の Gauss 曲率は $K(u, v) = abc/u^2v^2$ で与えられ次を満たす.

$$\min K = \frac{c}{ab} = K(a, b) \leq K(a, v) \leq \frac{b}{ac} = K(a, c) \leq K(u, c) \leq K(b, c) = \frac{a}{bc}.$$

- 楕円座標 (u, v) に関し, (座標平面を通らない) 測地線に対して (c, b) または (b, a) に属する定数 μ が存在して

$$\frac{\sqrt{U}}{\sqrt{\mu-u}}\dot{u} \mp \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{v-\mu}}\dot{v} = 0$$

を満たす. このとき $\mu = (v-u)(vU\dot{u}^2 + uV\dot{v}^2)$ である.

これより, 測地流は TM で次の 2 つの第 1 積分を持つ:

$$E(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = (v-u)(U\dot{u}^2 + V\dot{v}^2)/2, \quad F(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = (v-u)(vU\dot{u}^2 + uV\dot{v}^2).$$

測地流 ϕ^t を T^*M で考えれば, 上の第 1 積分は次の形に書ける:

$$E^*(u, v, \alpha, \beta) = \frac{1}{2(v-u)} \left(\frac{\alpha^2}{U} + \frac{\beta^2}{V} \right), \quad F^*(u, v, \alpha, \beta) = \frac{1}{v-u} \left(\frac{v\alpha^2}{U} + \frac{u\beta^2}{V} \right).$$

このとき, $\mu \in (c, b)$ または (b, a) に対して決まる U^*M の ϕ^t 不変集合 $\{F^* = \mu\}$ は 2 つの互いに交わらないトーラス T_μ^\pm よりなる (\pm は軌道の向きに応じて決まる). ϕ^t の T_μ^\pm における軌道を射影 $\tau^*: U^*M \rightarrow M$ で写したものが M の $F = \mu$ を満たす測地線 γ を与える.

$\mu \in (c, b)$ の場合, 測地線 γ は $u = \mu$ で定義される 2 つの v -曲線 (M と一葉双曲面 H_μ^1 との交線) の間を振動しながら z 軸の周りに単調に巻きつく. T_μ^\pm は z 軸の周りを回る向きによって区別される. なお, $\mu \rightarrow c$ のとき, T_μ^\pm は $z = 0$ で定義される主楕円 $\gamma_{z=0}$ (最長のもの) の単位接ベクトル (向きに応じて 2 つある) からなる 2 つの円周のどちらかに退化する.

次に $\mu \in (b, a)$ の場合, 測地線 γ は $v = \mu$ で定義される 2 つの u -曲線 (M と二葉双曲面 H_μ^2 との交線) の間を振動しながら x 軸の周りに単調に巻きつく. T_μ^\pm は x 軸の周りを回る向きによって区別される. なお, $\mu \rightarrow c$ のとき, T_μ^\pm は $x = 0$ で定義される主楕円 $\gamma_{x=0}$ (最短のもの) の単位接ベクトル (向きに応じて 2 つある) からなる 2 つの円周のどちらかに退化する.

さらに, T_μ^\pm の座標系を適当に選んで, 測地流 (の T_μ^\pm への制限) は単位正方形から得られる平坦トーラスの直線流と同値になり, その傾き $\omega = \omega(\mu)$ は μ のみによって決まり楕円積分を用いて表すことが可能である. $P(t, \mu) = t(t-\mu)(c-t)(b-t)(a-t)$ とおくと

$$\omega(\mu) = \pm \frac{\int_b^a \{t/\sqrt{P(t, \mu)}\} dt}{\int_c^\mu \{t/\sqrt{P(t, \mu)}\} dt} \quad (\mu \in (c, b)), \quad \omega(\mu) = \pm \frac{\int_c^b \{t/\sqrt{P(t, \mu)}\} dt}{\int_b^\mu \{t/\sqrt{P(t, \mu)}\} dt} \quad (\mu \in (b, a))$$

と表される. 特に, $\omega(\mu)$ が有理数ならば対応する測地線はすべて同じ長さの閉測地線となる. $\omega(\mu)$ は μ に関して狭義単調減少で, $\mu \in (c, b)$ ($\mu \in (b, a)$) ならば $\omega(\mu) > 1$ ($\omega(\mu) < 1$) で $\lim_{\mu \rightarrow b} \omega(\mu) = 1$ を満たすことが分かる.

最後に, U^*M の ϕ^t 不変集合 $\{F^* = b\}$ は $\tau^*: U^*M \rightarrow M$ で M に写したとき M の臍点を通る様な測地線となる ϕ^t の流線からなる. 特に, $\{F^* = b\}$ は中間主楕円 $\gamma_{y=0}$ (楕円面と xz -面の交線) の単位接ベクトルからなる (向きに応じて 2 つある) 円周を含み, これらが ϕ^t の $U^*M \cap \{F^* = b\}$ における周期点の全体を与える. それ以外の ϕ^t の軌道は M における直径端点の関係にある 2 組の臍点の対 $\{q, q'\}, \{r, r'\}$ のうちの一对を通る測地線に対応する. これらの測地線は q から q' を経て q に戻る (あるいは r から r' を経て r に戻る) 同じ長さの測地ループを与えるが, 閉測地線にはならない. これ等を用いて以下が成立することが分かる:

- 最短主楕円 $\gamma_{x=0}$ および最長主楕円 $\gamma_{z=0}$ は安定³⁰閉測地線であり, $\gamma_{x=0}$ は指数 1, $\gamma_{z=0}$ は 3 以上の奇数を指数として持つ. 中間主楕円 $\gamma_{y=0}$ は双曲的で指数 2 を持つ.
- 測地流 (ϕ^t, UM) の周期点は UM で稠密である.
- 3 つの主楕円は単純閉測地線を与えるが, それ以外に単純閉測地線が存在するための条件が知られている. 例えば, Gauss 曲率 K が $\min K : \max K \geq 1/16$ (すなわち $a \leq 4c$) を満たせば, 主楕円以外の単純閉測地線は存在しない.
- 臍点の切断跡はそれと直径端点に位置にある臍点 1 点からなる. それ以外の点 p の切断跡 C_p はその直径端点を中心とする曲率線からなる線分で, 端点は共役点である. 第 1 共役跡はそれ以外に 2 つ計 4 つの尖点を持つ (The last geometric statement of Jacobi). 証明は [It-Ki2] 参照.
- さらに M. Morse により次が知られている: 任意の $L > 0$ に対して $\epsilon > 0$ が存在して, $1 - \epsilon < c < b < a < 1 + \epsilon$ を満たす楕円面 $M = M(a, b, c)$ の主楕円以外の閉測地線は長さ $\geq L$ 以上を持つ.

上の楕円面の場合 UM で考えた測地流の周期点は UM で稠密であった (球面の定曲率の計量の場合は周期点の集合は UM に一致した. また, §4.2 で見るが, コンパクト負曲率多様体の測地流の周期点も UM で稠密である). しかし, 一般にはそうではないことを A. Weinstein が示した ([We3]). 以下それについて説明する. 定曲率 $K \equiv 1$ の回転面は xz -平面の曲線

$$x = a \cos u, z = \pm \int_0^u \sqrt{1 - a^2 \sin^2 t} dt; 0 \leq u \leq \pi/2$$

を z 軸の周り回転して得られることが知られている. $a = 1$ の場合は単位球面であるが, $0 < a < 1$ の場合は紡錘形 S で 2 つの頂点 (z 軸との交点) を特異点 (錐点) として持つ. いま十分小さな $\epsilon > 0$ を取り, $0 \leq u \leq \pi/2 - \epsilon$ で定義される S の部分 M' (S から 2 つの頂点を中心とするキャップを除いた部分) を考える. 回転面の測地流もエネルギー以外に (Clairaut) 第 1 積分 F を持ち³¹, 測地線の挙動は F を用いて調べることができ, 次が成り立つことが分かる.

$\mu^2 = a^2$ を除いて $UM \cap \{F = \mu\}$ の流線は平坦トーラスの傾き $\omega(\mu)$ の直線流に同値であり³², 今の場合 $\omega(\mu) = 1/a$ となり μ に依らないことが分かる. 特に, $\mu^2 < a^2$ ならば $v \in UM \cap \{F = \mu\}$ に対して測地線 γ_v は半径 $|\mu|$ の (xy -平面に関して対称な) 2 つの平行円の間を z 軸の周りを回りながら振動する. 他方, a (同じことであるが赤道の長さを L とするとき, $L/2\pi$) が有理数 (無理数) ならば, すべての測地線は同じ長さの閉測地線である (赤道以外の M' に留まるどの測地線も決して閉測地線にならない). そこで, a を無理数に取り, この紡錘形の回転面の頂点の近傍を滑らかなキャップで置き換えて得られる回転面を考える. このとき, $p \in M'$ が赤道からあまり離れておらず, $v \in U_p M$ が p を通る平行円となす角があまり大きくなければ, 測地線 γ_v はずっと M' に留まり, 決して閉測地線にはならない. よって ϕ^t に関して周期的でない UM の元全体は正の測度を持つ. なお, ずっと

³⁰安定・双曲的閉測地線については §3.1 を参照.

³¹ $v \in U_p M$ に対して $r(p)$ で p と z 軸の距離, $\mu(v)$ で v と p を通る平行円となす角を表す. このとき, $F(v) = r(p) \cos \mu(v)$ が第 1 積分を与える. $F(v)^2 \leq a^2$ に注意.

³² $\mu = \pm a$ の場合は, 赤道の接ベクトルから成る 2 つの円周を表す.

M' に留まる M の測地線は閉測地線になり得ない。他方、2つの頂点を通る子午線は M の閉測地線をなし、これらは M 全体を覆う。

楕円面・回転面の測地流は多くの第一積分を持ち、それらから測地線の挙動が決まる完全可積分系の例になっている。これについては [Ki] を参照されたい。

3 閉測地線

この節では、主としてコンパクト Riemann 多様体上の閉測地線の存在問題について述べる。

3.1 変分法と力学系から見た閉測地線

Poincaré は、 \mathbf{R}^3 の卵形面 S (正曲率で Gauss 写像によって球面に微分同型) 上に単純 (自分自身と交わらない) 閉測地線 γ が存在すれば、 γ は S を2つの領域 D_1, D_2 に分けそれらの全曲率は Gauss-Bonnet の定理によってともに 2π に等しい (或いは、 γ の Gauss 写像による像は球面 S^2 を同じ面積の領域に分ける) ことに注目し、逆にこのような Gauss 写像による像が S^2 を同じ面積の領域に分けるような単純閉曲線の族を考えて、その中で長さ最小の曲線を考えれば単純閉測地線が得られるであろうと予測し、種々の考察を行った ([Po])。その様な最短の閉曲線 γ は向きを適当に選べば、測地曲率 $\kappa_g \geq 0$ を満たし Gauss-Bonnet より $\int_\gamma \kappa_g ds = 0$ であるから $\kappa_g \equiv 0$ を得るであろうと考えた。しかし厳密な証明は長い時間を要し、[Cr1], [Hass-Mor] で与えられた³³ :

定理 11. S を Gauss 曲率 $K \geq 0$ の滑らかな 2次元球面とすれば、 S を2つの全曲率 2π の領域に分ける最短の単純閉曲線 γ が存在し、 γ は単純閉測地線である。

一般に、コンパクト Riemann 多様体 (M, g) 上閉測地線の存在を示そうとすると、 $\mathcal{C}_M = \{c : S^1 = I/\{0, 1\} \rightarrow M \mid c(0) = c(1)\}$ を M 上の (区分的に) 滑らかな (パラメータ) 閉曲線全体のなす空間 (コンパクト開位相を与える) として、その上のエネルギー積分 E (或いは長さ L) の危点を求める問題とみる変分学の立場がある。この場合の第1変分公式は (1) と同様に (変分ベクトル場 X は $X(0) = X(1)$ を満たす事に注意して)

$$DE_\gamma(X) = - \int_0^1 \langle X(t), \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) \rangle dt + \sum_{i=1}^{N-1} \langle X(t_i), \dot{\gamma}(t_i - 0) - \dot{\gamma}(t_i + 0) \rangle + \langle X(0), \dot{\gamma}(1) - \dot{\gamma}(0) \rangle$$

で与えられるから、 E 値が正の E の危点が閉測地線 γ (すなわち、 $\gamma(0) = \gamma(1), \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(1)$ を満たす測地線) を特徴づける。ただし、点曲線からなる自明な閉測地線が $E(c) = 0$ の最小値を与える曲線として危点に含まれる。いま \mathcal{C}_M^0 で点曲線からなる \mathcal{C}_M の部分空間を表す。

次に、 ϕ^t を Riemann 多様体 (M, g) の TM 上の測地流とすれば、閉測地線 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ は $u = \dot{\gamma}(0) \in T_p M$ とするとき、 $\phi^1(u) = u$ すなわち $t \rightarrow \phi^t(u)$ が ϕ^t の周期軌道であることとして特徴

³³E. Calabi は定理の仮定を満たす (凸曲面) S に対してその長さ最小の閉測地線は単純であることを示した ([Ca-Cao]) が、これからも定理が従う。なお一般には、長さ最小の閉測地線は必ずしも単純ではない。

づけられる。このとき、 γ の Poincaré 写像 \mathcal{P} が次の様に定義される³⁴ : u を通り測地流に横断的な $TM^e (e = E(u))$ の (局所) 超曲面 \mathcal{N} を $T_u\mathcal{N} = V \oplus V (\subset T_uTM^e; \text{ここで } V \text{ は } T_pM \text{ における } u \text{ の直交補空間})$ を満たすように選ぶ。 $v \in \mathcal{N}$ に対して $t \rightarrow \phi^t v$ は $t = 1$ に近い t の値で \mathcal{N} とちょうど 1 点で横断的に交わるので、この点を $\mathcal{P}(v)$ と定義するのである。

さて \mathcal{P} の微分 $P = DP(u) : V \oplus V \rightarrow V \oplus V$ を線形 Poincaré 写像という。 P は $(A, B) \in V \oplus V \cong T_u\mathcal{N}$ を $(Y(1), \nabla Y(1))$ に写像する。ここで $Y(t)$ は $Y(0) = A, \nabla Y(0) = B$ を満たす γ に沿った Jacobi 場である。 $T_u\mathcal{N}$ は TM のシンプレクティック形式を制限して得られる 2 形式によりシンプレクティックベクトル空間であり、 P は $T_u\mathcal{N}$ のシンプレクティック線形写像となることが Jacobi 場の性質を用いて容易に分かる。特に λ が P の固有値ならば、 $\bar{\lambda}, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}$ も P の固有値となる。さて、 P が $|\lambda| = 1$ を満たす固有値 λ を持たないとき、 P (或いは閉測地線 γ) は双曲的であるという。 P が 2 次元の回転部分と固有値が ± 1 の部分の直和に分解されるとき、 P (或いは閉測地線 γ) は楕円・放物的であるといい、 P が 2 次元の回転部分のみの直和にかけるとき P (或いは閉測地線 γ) は安定であるという (安定性は $\dot{\gamma}$ の近くの測地流の軌道はすべての t に対して $\dot{\gamma}$ の近くに留まることを意味する)。

なお、Poincaré は上記の論文で、また卵形面 S 上には単純安定閉測地線が存在することを予想したが、一般には反例が示された³⁵。

再び、 (\mathcal{C}_M, E) に戻る。閉測地線 γ はエネルギー積分 E の (正の E 値の) 危点として特徴づけられたが、前と同様に γ における Hesse 形式 $I = D^2E(\gamma)$ を考えることができる : すなわち、 $X, Y \in T_\gamma^\perp\mathcal{C}_M = \{X : \gamma \text{ に沿ったベクトル場} \mid X(1) = X(0), \langle X(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \equiv 0\}$ に対して

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= \int_0^1 \{ \langle \nabla X(t), \nabla Y(t) \rangle - \langle R(X(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), Y(t) \rangle \} dt \\ &= - \int_0^1 \langle \nabla^2 X(t) + \langle R(X(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), Y(t) \rangle \rangle dt + \sum_{i=1}^{N-1} \langle \nabla X(t_i - 0) - \nabla X(t_i + 0), Y(t_i) \rangle \\ &\quad + \langle \nabla X(1 - 0), Y(1) \rangle - \langle \nabla X(+0), Y(0) \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

は $T_\gamma^\perp\mathcal{C}_M$ 上の対称な双 1 次形式で、 γ の指数形式ともいう ($0 = t_0 < \dots < t_N = 1$ は ∇X の不連続点を表す)。 I の零数を $\text{Null}\gamma$ ³⁶ で表す、 I の退化空間は γ に沿って (γ に垂直な) $Y(0) = Y(1), \nabla Y(0) = \nabla Y(1)$ を満たす周期的 Jacobi 場 $Y(t)$ からなる。閉測地線 γ の指数 $\text{Ind}\gamma$ は I が負定値となる $T_\gamma^\perp\mathcal{C}_M$ の極大な部分空間の次元として、また拡大指数 $\text{Ind}_0\gamma$ は I が半負定値となる $T_\gamma^\perp\mathcal{C}_M$ の極大な部分空間の次元として定義される³⁷。 I が非退化のとき (すなわち $\text{Null}\gamma = 0$ のとき)、閉測地線 γ は非退化であるという³⁸。 γ を $\mathcal{C}_{pp}; p = \gamma(0)$ の測地線と見た時の零数 $\text{null}\gamma$ 、指数 $\text{ind}\gamma$ との関係は

$$\begin{aligned} \text{ind}\gamma &\leq \text{Ind}\gamma \leq \text{ind}\gamma + n - 1 \\ \text{ind}\gamma + \text{null}\gamma &\leq \text{Ind}_0\gamma \leq \text{ind}\gamma + \text{null}\gamma + n - 1 \end{aligned} \quad (15)$$

³⁴ UM 上の測地流の場合は、長さ T の閉測地線の始方向 v は $\phi^T v = v$ 、すなわち周期 T の ϕ^t の周期点として特徴づけられる。このときも Poincaré 写像はパラメータの範囲を $[0, T]$ にして同様に定義される。

³⁵ [Gry] で Gauss 曲率 $K > 0$ である S^2 上の C^∞ 級 Riemann 計量でその単純閉測地線はすべて双曲的であるものが構成された。

³⁶ $\dot{\gamma}$ は $T_\gamma\mathcal{C}_M$ 上の $D^2E(\gamma)$ の零化空間に属するので $\text{Null}\gamma + 1$ が $T_\gamma\mathcal{C}_M$ 上の $D^2E(\gamma)$ の零数に等しい。

³⁷ $\text{Ind}\gamma$ は $T_\gamma\mathcal{C}_M$ 上の $D^2E(\gamma)$ の指数に等しい。 $\text{Ind}_0\gamma = \text{Ind}\gamma + \text{Null}\gamma$ である。

³⁸ γ の $SO(2)$ 軌道が E の非退化危多様体であるといってもよい

で与えられる. よって (M, g) の断面曲率 K が $0 < \delta \leq K \leq 1$ を満たすときには, Morse-Schoenberg 比較定理より次を得る:

$$\begin{aligned}
L(\gamma) < k\pi &\Rightarrow \text{Ind}_0\gamma \leq k(n-1) \\
L(\gamma) \leq k\pi &\Rightarrow \text{Ind}\gamma \leq k(n-1) \\
L(\gamma) > k\pi/\sqrt{\delta} &\Rightarrow \text{Ind}\gamma \geq k(n-1) \\
L(\gamma) \geq k\pi/\sqrt{\delta} &\Rightarrow \text{Ind}_0\gamma \geq k(n-1).
\end{aligned} \tag{16}$$

なお, 閉測地線の場合も Morse 指数定理と同様に $\text{Ind}\gamma$ を共役点の重複度と補正項を用いて表す事ができる (測地線の指数定理全般については [Sa1] 参照).

3.2 閉測地線の存在問題

\mathcal{C}_M は無限次元であるが, これを測地線分からなる多角形のなす (有限次元) 空間で近似する方法が Birkhoff, Morse により与えられた: $\mathcal{C}_M^e = \{c \in \mathcal{C}_M \mid E(c) \leq e\}$, $0 < 2\epsilon < i_M$ (§§2.3 の最後の注意参照) とすれば, S^1 の分割 $\Delta: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ を十分細かく取るとき, $c \in \mathcal{C}_M^e$ に対して

$$d(c(t_{i-1}), c(t_i)) \leq L(c|[t_{i-1}, t_i]) \leq \sqrt{2(t_i - t_{i-1})E(c|[t_{i-1}, t_i])} \leq \sqrt{2(t_i - t_{i-1})E(c)} \leq \epsilon$$

と出来る. そこで $c \in \mathcal{C}_M^e$ に対して, $c(t_{i-1}), c(t_i)$ を結ぶ最短測地線 $\gamma_i: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M$ ($i = 1, \dots, N$) を取り ($c(t_0) = c(t_N)$ であった), これらをつないで得られる測地多角形 c_Δ を考えれば, c_Δ はその頂点 $\{p_i = c(t_i)\}_{i=0}^{N-1}$ によって決まり

$$E(c_\Delta) = \sum_{i=1}^N \frac{d^2(c(t_{i-1}), c(t_i))}{2(t_i - t_{i-1})} \leq E(c) \leq e$$

である. 逆に, $e > 0$ に対して S^1 の分割 Δ を $\max_i(t_i - t_{i-1}) < \epsilon^2/2e$ を満たすように選ぶ. $\mathbf{p} := (p_0, \dots, p_{N-1}) \in M^{(N)} = M \times \dots \times M$; $p_N = p_0$ に対して

$$E(\mathbf{p}) := \sum_{i=1}^N \frac{d^2(p_{i-1}, p_i)}{2(t_i - t_{i-1})} \tag{17}$$

と定義する. \mathbf{p} が $E(\mathbf{p}) \leq e$ を満たせば, $d(p_{i-1}, p_i) < \epsilon$ ($i = 1, \dots, N; p_N = p_0$) で, 上と同様にし測地多角形 $c_\Delta(p_0, \dots, p_{N-1})$ が定まり, そのエネルギー積分は (17) で与えられる. よって測地多角形 $c_\Delta, c \in \mathcal{C}_M^e$ と $\mathbf{p}, E(\mathbf{p}) \leq e$ を同一視できる. このとき

$$\mathcal{P}_N^e = \{\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_{N-1}) \in M^{(N)} \mid E(\mathbf{p}) \leq e\}$$

は $M^{(N)}$ のコンパクトな領域で, E はその内部で滑らかな関数となりその危点は M の閉測地線を与える³⁹. 上の操作で \mathcal{P}_N^e は \mathcal{C}_M に埋め込まれるが, 各 $s \in [0, 1]$ に対して, $[t_{i-1}, st_{i-1} + (1-s)t_i]$ ($1 \leq i \leq N$) では c に等しく, $[st_{i-1} + (1-s)t_i, t_i]$ では $c(st_{i-1} + (1-s)t_i), c(t_i)$ を結ぶ最短測地線とな

³⁹第1変分公式: $DE(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N-1} \langle X_i, \dot{\gamma}_i(t_i) - \dot{\gamma}_{i+1}(t_i) \rangle + \langle X_0, \dot{\gamma}_N(1) - \dot{\gamma}_0(0) \rangle$ を用いよ.

る曲線 c_Δ^e を考えることによって c を c_Δ に連続的に変形することができる。すなわち \mathcal{P}_N^e は \mathcal{C}_M^e の変形レトラクトで \mathcal{C}_M^e と同じ位相を持つ。

まず、簡単な応用例として Hilbert, Hadamard, E. Cartan に遡る結果を挙げる。

定理 12. M をコンパクトで非単連結な Riemann 多様体とすれば、その自明でない自由ホモトピー類 \tilde{c} には閉測地線が存在する。

実際、 $e > 0$ を選んで \tilde{c} の代表元を含む \mathcal{P}_N^e の連結成分 (コンパクト) を取り、そこでの最小値 $e_0 (< e)$ を取る点を γ とする。 $e_0 = 0$ なら γ は点曲線であるから $e_0 > 0$ で、(e を適当に選んで) γ は \mathcal{P}_N^e の内点であるとして良い。特に、 γ は E の危点でしたがって閉測地線である⁴⁰。

単連結の場合は、Birkhoff に始まり、Morse, Lusternik-Schnirelmann 等により発展した min-max 法と呼ばれる手法が有効である。次は Lusternik-Fet による：

定理 13. コンパクト単連結 Riemann 多様体 M には自明でない閉測地線が存在する。

M は単連結で可縮でないから、ある $2 \leq k \leq n = \dim M$ に対して $\pi_k(M) \neq 0$ である。 $F : (I^k, \partial I^k) \rightarrow (M, p)$ を自明でないホモトピー類の代表元とする ($I^k = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$)。このとき、 $\tilde{F} : (I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \rightarrow (\mathcal{C}_M, \mathcal{C}_M^0)$ を

$$\tilde{F}(t_1, \dots, t_{k-1})(t) = F(t_1, \dots, t_{k-1}, t)$$

で与えれば、代数的位相幾何学によりこれは $\pi_{k-1}(\mathcal{C}_M, \mathcal{C}_M^0)$ の自明でないホモトピー類の代表元を定義することが分かる⁴¹。ここで、上で述べた測地多角形による近似により、 \tilde{F} は $e > 0$ を十分大きくとり $\pi_{k-1}(\mathcal{P}_M^e, \mathcal{P}_M^0)$ の自明でないホモトピー類の代表元であるとしてよい。そこで、 $[\tilde{F}]$ の値を

$$\kappa := \inf \left\{ \max_{I^{k-1}} E(\tilde{F}(t_1, \dots, t_{k-1})) \mid \tilde{F} \in [\tilde{F}] \right\}$$

定義すれば ($e > \kappa$) $\kappa > 0$ である。実際 $\kappa = 0$ ならば、十分小さな $\epsilon > 0$ に対して \mathcal{P}_M^ϵ は \mathcal{P}_M^0 に変形できるので、 $[\tilde{F}]$ が自明でないことに反する。このとき、 E 値が κ の危点、すなわち長さ $\sqrt{2\kappa}$ の閉測地線が存在する。そうでないとして矛盾を示す。 \mathcal{P}_M^ϵ の危点の集合はコンパクトであるから、 $\delta > 0$ が存在して $\mathcal{P}_M^{\kappa+2\delta} \setminus \text{Int} \mathcal{P}_M^{\kappa-2\delta}$ には E の危点が存在せず、したがって $\epsilon_1 > 0$ を選んで $\mathcal{P}_M^{\kappa+\delta} \setminus \text{Int} \mathcal{P}_M^{\kappa-\delta}$ 上 $|\nabla E| \geq \epsilon_1 > 0$ とできる。よって $-\nabla E$ の生成する flow にそって $\mathcal{P}_M^{\kappa+\delta} \setminus \text{Int} \mathcal{P}_M^{\kappa-\delta}$ を $\mathcal{P}_M^{\kappa-\delta}$ に含まれるように変形することが出来る。すなわち、 $[\tilde{F}]$ の代表元を $\mathcal{P}_M^{\kappa-\delta_1}$ 内にとることが出来る。これは κ の定義に矛盾する。これで定理が証明できた。

注意 14. (1) k は $\pi_k(M) \neq 0$ となる最初の値とする。Morse 理論を用いると上で得られた閉測地線の指数は $\text{Ind} \leq k - 1$ を満たすことが分かる ([Mi], Lemma 22.5)。

(2) Birkhoff は曲線の長さを減少させる \mathcal{C}_M の次の変形を考えた：上で $t_i = i/N (i = 0, \dots, N)$ を選び、 $c \in \mathcal{C}_M^e$ に対して第一段階の変形 \mathcal{D}_1 として $c((i-1)/N), c(i/N)$ を結ぶ最短測地線を取り ($i = 1, \dots, N$)、これらを結んで得られる測地多角形 c_1 (条件 $c_1(i/N) = c(i/N)$ で決まる) を

⁴⁰最小値を与える点の存在を保証して示すので mini 法と呼ばれる。この定理は Riemann 被覆空間を用いても証明される。

⁴¹2次元の場合は $k = 2$ で、点曲線 p から始まりそれに終わる M 全体を覆う M の閉曲線の1径数族である。

対応させる. 次に第二段階の変形 \mathcal{D}_2 として, c_1 に対して $c_1((2i-1)/2N), c_1((2i+1)/2N)$ を結ぶ最短測地線を取り ($i = 1, \dots, N : \text{mod } 1$ で考える), これらを結んで得られる測地多角形 c_2 (条件 $c_2((2i-1)/2N) = c_1((2i-1)/2N)$ で決まる) を対応させる. $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ とすれば, 変形 \mathcal{D} は閉測地線 γ を固定し, それ以外の閉曲線の長さを必ず減少させるという性質を持つ. *Birkhoff* はこの変形を用いて S^2 (さらに S^n) 上の任意の *Riemann* 計量に対して閉測地線の存在を示した.

(3) 関数解析の立場から H^1 級の曲線からなる *Hilbert* 多様体 $H^1(S, M)$ を考えれば, エネルギー積分 E はその上の滑らかな関数で *Palais-Smale* の条件を満たし, したがって無限次元 *Morse* 理論を展開することができる. この立場は, *W. Klingenberg, D. Gromoll-W. Meyer* 等によって採られた.

(4) 定理 12, 13 は *Finsler* 計量に対しても成り立つ.

さて 2 個以上の閉測地線の存在を示そうとすると, 次の点が問題となる. まず, 閉測地線 γ が与えられると γ を $k (\in \mathbf{N})$ 回廻って得られる閉曲線 $\gamma^k (\gamma^k(t) = \gamma(kt); 0 \leq t \leq 1$ で定義し, kt は $\text{mod } 1$ で考える) もまた E の危点として現れることを注意しよう. これらは危点としては異なるが, 幾何学的には同じとみなすのが自然で, 他の測地線を何回か廻ったものではない素閉測地線がどれだけあるかを考える必要がある (単純閉測地線は勿論素である). また, γ の向きを変えたり γ に沿って始点を平行移動したりして得られる閉測地線も E の危点として現れるが, 幾何の立場では γ と同じ閉測地線であるとみなし区別しない. これらは, S^1 上の $O(2)$ の作用で表されるから, 閉曲線の空間としてはパラメータの向きと始点を無視した商空間 $\hat{\mathcal{C}}_M = \mathcal{C}_M/O(2)$ を考えるのが自然であろう. しかし, $O(2)$ の \mathcal{C}_M への作用が自由でないので ($c^k (k > 1)$ や $c = c^{-1}$ を満たす c におけるイソトロピー群は自明でない), $\hat{\mathcal{C}}_M$ のトポロジーの取り扱いには注意を要する. 閉測地線の存在問題の研究の歴史で多くの間違いがあったが, その原因の一つである.

3. 3 Lusternik-Schnirelmann 理論 と Morse 理論

L. Lusternik-L. Schnirelmann は危点を求めるため次の一般的な理論を示した. $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ を距離空間 X 上の下に有界な連続関数, $\Phi : X \times [0, \infty) \rightarrow X$ を $f(\Phi(x, t)) \leq f(x); x \in X, t \geq 0$ を満たす連続変形とし, $\Phi_t(x) = \Phi(x, t)$ とおく. また, $Y \subset X, \kappa \in \mathbf{R}$ に対して $Y^\kappa := \{x \in Y \mid f(x) \leq \kappa\}$ ($Y^{\kappa-} := \{x \in Y \mid f(x) < \kappa\}$) とおく. さて

$$K = \{x \in X \mid \Phi_t(x) = x \text{ が任意の } t \geq 0 \text{ に対して成立する} \}$$

を f の危点の集合という. いま次が成り立つと仮定する:

- (*) 任意の κ と $f^{-1}(\kappa) \cap K$ の任意の近傍 U に対して正定数 ϵ が存在して, 任意の $x \in X^{\kappa+\epsilon} \setminus (X^{\kappa-\epsilon} \cup U)$ に対して $f(x) - f(\Phi(x, 1)) \geq 2\epsilon$ が成り立つ.

さて $Z \subset Y \subset X$ で, Y, Z は変形 Φ で不変 ($\Phi_t(Y) \subset Y, \Phi_t(Z) \subset Z, t \geq 0$) であるとする. ホモロジー類 $h \in H_*(Y, Z)$ に対して h の危値 $\kappa(h)$ を

$$\kappa(h) := \inf_{z \in h} \max_{x \in |z|} f(x) \tag{18}$$

で定義する. このとき次が成立する:

補題 15. $h \in H_*(Y, Z)$ を自明でないホモロジー類とする. $\{x \in K \mid f(x) = \kappa(h)\}$ の X における任意の近傍 U に対して, サイクル $z \in h$ と $\epsilon > 0$ が存在して $|z| \subset Y^{\kappa(h)-\epsilon} \cup (U \cap Y)$ を満たす. 特に f 値 $\kappa(h)$ の危点が存在する (危点が存在しなければ, 上で $U = \emptyset$ と取れば危値の定義に矛盾する).

これより危点の存在が保証されるが, 一般に (Morse 理論においても) 1 次独立なホモロジー類達から異なる危点が得られるとは限らない. いま自明でないホモロジー類 $h_1, h_2 \in H_*(Y, Z)$ に対してコホモロジー類 $\omega \in H^*(Y); * \geq 1$ が存在して $\omega \cap h_2 = h_1$ を満たすとき, h_1 は h_2 に付随するという. このときキャップ積の定義より $\kappa(h_2) \geq \kappa(h_1)$ である. もし等号が成立すれば, $\{x \in K \mid f(x) = \kappa(h_2) = \kappa(h_1)\}$ の X における任意の近傍 U に対して ω の $U \cap Y$ への制限は自明でないことが分かる. さらにもし Y が局所的に可縮で $K \subset Y$ あれば, $\kappa(h_2) = \kappa(h_1)$ のとき $\{x \in K \mid f(x) = \kappa(h_2) = \kappa(h_1)\}$ は無限集合であることが分かる. 実際, $x \in K$ の十分小さな任意の近傍 V に対して $\omega|_{U \cap V} = 0$ だから, $\{x \in K \mid f(x) = \kappa(h_2) = \kappa(h_1)\}$ が有限集合なら $\{x \in K \mid f(x) = \kappa(h_2) = \kappa(h_1)\}$ の近傍 U で $\omega|_{U \cap Y} = 0$ となるものが存在し矛盾を得る.

さて (Y, Z) のホモロジー類の列 h_1, \dots, h_k は各 $1 \leq i \leq k-1$ に対して h_i が h_{i+1} に付随しているとき付随ホモロジー類鎖, k を鎖の長さという. X が局所的に可縮で $K \subset Y$ あればこの場合 X は少なくとも k 個の危点を持ち, もし 2 つの危値が等しければ ($\kappa(h_j) = \kappa(h_i); i < j$), 無眼個の危点が存在することが分かる. もしコホモロジー類の列 $\omega_1, \dots, \omega_{k-1} \in H^*(Y); * \geq 1$ で $\omega_1 \cup \dots \cup \omega_{k-1} \neq 0$ を満たし⁴², ある $h \in H_*(Y, Z)$ に対して $h \cap (\omega_1 \cup \dots \cup \omega_{k-1}) \neq 0$ となるものが存在すればこの条件が満たされる.

この理論を $X = \hat{C}_M, f = E$ として閉測地線の存在に適用する場合, 上で述べた点がやはり問題となる. まず 2 次元球面に対する L. Lusternik-L. Schnirelmann の定理 ([Lu-Sch]) について述べる:

定理 16. S^2 上の任意の Riemann 計量に対して, 少なくとも 3 本の異なる単純閉測地線が存在する.

楕円面の場合の例を想起すれば, この結果は最良であることを注意する. 証明の鍵は次の 2 点である: まず, $\hat{C} = \hat{C}_{S^2}$ に対して, 単純閉曲線からなるサイクルを代表元とする 3 個の付随する (自明でない) ホモロジー類を構成する. 次に, \hat{C} の単純閉曲線からなるサイクルを単純性を保ったまま (閉測地線でない限り) その長さを減少させるような変形を構成し, サイクルが \hat{C}_0 にホモトープでない場合に単純閉測地線が得られることを示す. $-\nabla E$ の生成する流れによる変形や Birkhoff による変形は条件 (*) を満たすが, 一般に単純性を保存しない. また, [Lu-Sch] で与えられた議論にもギャップがあった. W. Ballmann, I. A. Taimanov は, 2 次元の場合に, Birkhoff による変形を修正して (admissible と呼ばれる単純閉曲線からなるサイクルのクラスに対して) 求める変形 \hat{D} を構成した ([Ba1],[Tai2]). そして $H_*(\hat{C}, \hat{C}_0)$ の admissible なサイクル w に対してその危値を $\kappa = \kappa(w) = \inf_{u \in F(w)} \sup_{c \in u} E(c)$ ($F(w)$ は w に変形 \hat{D} を施して得られる, w に homologous な admissible なサイクル全体の集合) によって定め, $\kappa > 0$ なら E 値 $\kappa > 0$ の単純閉測地線が存在することを示した.

他方 M. A. Grayson は, 2 次元コンパクト多様体 M 上で, 埋め込まれた閉曲線 c_0 を放物型非線形偏微分方程式を解くことにより得られる長さを短くする埋め込まれた閉曲線 $\{c_\tau\}_{\tau \geq 0}$ に変形する流れ (flow) を用いた: $c_0: S^1 \rightarrow M$ を埋め込まれた滑らかな閉曲線とする. M 上で偏微分方程式

⁴²このようなコホモロジー類鎖の長さの最大値を Y のカップ長 (cup length) という. 他方, Y を可縮な閉集合で覆う時に要する最小の個数 $\text{Cat}(Y)$ を Y のカテゴリ- というが, $\text{Cat}(Y) \geq \text{cup length} + 1$ が成り立つ.

$\partial c_\tau / \partial \tau = kN$ を考える. ここで, τ は c の変形パラメータ; k は曲線 c_τ の曲率; N は c_τ の単位法ベクトルである. 局所解の存在は一般次元の場合の超曲面の平均曲率流の場合も保証されるが, Grayson は 2次元の場合に次を示した: c_τ は一点に可縮であるか, $\tau \rightarrow \infty$ で解は存在しその極限が $k = 0$ の閉測地線である.

次に, (\hat{C}, \hat{C}_0) における 3 個の付随するホモロジー類を構成するために $\Gamma(S^2) \subset \hat{C}$ を S^2 の小円全体の空間, $\Delta(S^2)$ を S^2 の大円全体の空間とする. 大円はそれに垂直な \mathbf{R}^3 の原点を通る直線によって定まるから, $\Delta(S^2)$ は射影平面 $\mathbf{R}P^2$ と考えることが出来る. 小円はそれに平行な大円を一意に決めるから写像 $\pi: \Gamma(S^2) \rightarrow \Delta(S^2) \cong \mathbf{R}P^2$ を得るが, これは $\mathbf{R}P^2$ の標準バンドルの開ディスクバンドルに他ならない. 以下 \mathbf{Z}_2 係数で考える. Thom 同型により

$$H_i(\Gamma(S^2), \Gamma^0(S^2)) \cong H_{i-1}(\mathbf{R}P^2) \cong \mathbf{Z}_2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

である. Thom 同型の構成より $1 \in H_1(\Gamma(S^2), \Gamma^0(S^2))$ はある定まった大円に平行な小円からなるサイクルとして表される. $H_i(\Gamma(S^2), \Gamma^0(S^2))$ の自明でない元を $v_i (i = 1, 2, 3)$ とし, π の向き付け類を $U \in H^1(\Gamma(S^2), \Gamma^0(S^2))$ とするとキャップ積を用いて $U \cap v_3 = v_2, U \cap v_2 = v_1$ となることが分かる.

さて $\iota: (\Gamma(S^2), \Gamma^0(S^2)) \rightarrow (\hat{C}, \hat{C}_0)$ を埋め込みとし, $w_i = \iota_* v_i$ とおけば $w_1 \neq 0$ である. Z を w_1 に双対なコサイクルとすると $\iota^*(Z) = U$ を満たし

$$Z \cap w_3 = w_2, Z \cap w_2 = w_1,$$

すなわち, \hat{C}^e の 3 個の自明でない付随ホモロジー類鎖を構成できる ($e > 0$ はすべての小円に対して $2E(e) \leq e$ となるように取る). このとき, ホモロジー類 $w_i = \iota(v_i)$ を代表するサイクル $\iota(v_i)$ は admissible で, その危値 $\kappa(w_i)$ に対して $\kappa(w_1) \leq \kappa(w_2) \leq \kappa(w_3)$ が成り立つ. ここで, $\kappa(w_1) < \kappa(w_2) < \kappa(w_3)$ なら 3 個の単純閉測地線の存在が分かり, もし $\kappa(w_i)$ のうち 2 つが等しいならば無眼個の単純測地線が存在する.

注意 17. (1) この定理の応用として *Gromoll-Grove* は次を示した: (S^2, g) の任意の測地線が閉測地線ならば, これらはすべて同じ長さの単純閉測地線である ([*Gr-Gro*]).

(2) 実射影平面上の任意の *Riemann* 計量に対しても少なくとも 3 本の異なる単純閉測地線が存在する. 他の閉曲面については M が種数 $g \geq 1$ の向き付け可能閉曲面ならば自明でない (単純閉曲線を含む) 各自由ホモトピー類の中に少なくとも 1 個の単純閉測地線が存在する (この様な類は無数ある). 特に $g = 1$ のトーラスの場合 $a^m b^n$ (m, n は互いに素) の形の自由ホモトピー類の中に少なくとも 2 個の単純閉測地線が存在する. M が種数 h の向き付け不可能閉曲面ならば自明でない (単純閉曲線を含む) 各自由ホモトピー類の中に少なくとも 1 個の単純閉測地線か 2 重単純閉測地線が存在する. 特に, $h > 2$ ならば無限個の単純閉測地線が存在し, $h = 2$ (すなわち *Klein* の壺の場合) ならば少なくとも 5 個の単純閉測地線が存在する ([*Ba2*] 参照).

コンパクト多様体上で 2 個以上の閉測地線の存在を示すのに, Morse による方法がある ([*Mo3*], [*Mi*]). 測地多角形の空間 \mathcal{P}_N^e はコンパクト (境界付き) 多様体で, エネルギー積分 E はその内部で滑らかな関数であり, 閉測地線は E の危点として特徴付けられた. Morse は E の危点の個数を \mathcal{P}_N^e の

トポロジー (したがって, \mathcal{C}_M のトポロジー) の言葉で下から評価しようとした. この考えは (コンパクト) 多様体上一般の滑らかな関数の場合に適用され, 微分位相幾何学の重要な分野として発展した:

$f: N \rightarrow \mathbf{R}$ を多様体 N 上の滑らかな関数とする. $p \in N$ は $df(p) = 0$ すなわち, 局所チャートに関して $\partial f / \partial x^i(p) = 0$ ($1 \leq i \leq n$) を満たすとき, f の危点であるといい, $f(p)$ を p の危値という. いま, $N^a := \{p \in N \mid f(p) \leq a\}$, $a \in \mathbf{R}$ はコンパクトであるとする. a が変化するとき, N^a が a と共にどのように変わるかを調べることを問題としよう. Morse 理論における最初の基本的な結果は

- $a < b$ に対して $\{p \in N \mid a \leq f(p) \leq b\}$ が f の危点を含まなければ $N^a \sim N^b$ (微分同相).

これを示すのに N に Riemann 計量を入れておく. $N^b \setminus \text{int} N^a$ 上 $|\nabla f|$ は下から正数で押さえられる. 定理 13 の証明と同様に $-\nabla f$ の積分曲線にそって N^b を N^a に変形することができる.

したがって, $\{p \in N \mid a \leq f(p) \leq b\}$ が f の危点を含む場合が問題となる. 危点 p で f の Hesse 形式が $D^2 f(X, Y) = X(Yf)(p) = Y(Xf)(p)$ (すなわち $D^2 f(p) = (\partial^2 f / \partial x^i \partial x^j(p))$) で定義されるが, その零数 $\text{null} f(p)$, 指数 $\text{ind} f(p)$ (負の固有値の重複度をこめた個数) をそれぞれ危点 p での f の零数, 指数という. すべての危点で $\text{null} f = 0$ のとき, f は非退化であるというが, どの滑らかな関数も非退化な関数で '近似' できるので, 非退化関数は一般的 (generic) である. そこで, f は非退化であるとして (この場合危点全体は離散的な集合 $C(f)$ をなす)

$$\mathcal{M}_t(f) := \sum_{p \in C(f)} t^{\text{ind} f(p)}$$

を Morse 多項式という. 右辺は N がコンパクトであれば有限和である. Morse は N のホモロジーを用いてこの多項式の下からの評価を与えた (Morse 不等式):

- $\mathcal{M}_t(f) \geq P_t(N)$ ($:= \sum_k \dim H_k(N, K) t^k$ は体 K 上の Poincaré 多項式).

この不等式の意味は, 非負の係数を持つ t の多項式 $Q_t(f)$ が存在して $\mathcal{M}_t(f) - P_t(N) = (1+t)Q_t(f)$ と表されることであるが, 特に t^k の係数ごとの不等式が得られ, 非退化の場合少なくとも $P_1(N) = \sum_k \dim H_k(N, K)$ 個の f の危点の存在が保証される. 証明の本質的な部分は, $f^{-1}((a, b))$ 内に唯一つの f の危点 p が存在する場合の N^b と N^a の位相の関係である. p における f の指数を λ とすれば, p の局所チャートを適当にとつて, そこで f を

$$f = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

と表すことができる (Morse の穂題). これを用いて N^b は N^a に λ 次元の胞体を接着させて得られる複体のホモトピー型を持つことが分かる ([Mi] を参照). これより f が非退化で a, b が正則値ならば

$$\mathcal{M}_t(f)_a^b := \sum_{p \in C(f) \cap (N^b \setminus N^a)} t^{\text{ind} f(p)}, \quad P_t(N^b, N^a) := \sum_k \dim H_k(N^b, N^a) t^k$$

とおくとき, $\mathcal{M}_t(f)_a^b \geq P_t(N^b, N^a)$ が成り立つことが分かる. Morse 不等式は $P_t(N^b, N^a)$ の劣加法性からしたがう.

Morse 理論をコンパクト (連結)Riemann 多様体の 2 点 p, q を結ぶ測地線の個数評価に応用してみよう. \mathcal{C}_{pq} を $p, q \in M$ を結ぶ区分的に滑らかな曲線の空間とする. J.-P. Serre はファイブレーション

$$\mathcal{C}_{pp} \rightarrow \mathcal{C}_{p^*} \rightarrow M$$

(\mathcal{C}_{p^*} は p を始点とする曲線の空間で M への射影は曲線の終点を対応させる) のスペクトル系列を考えて, 無限個の $k \in \mathbf{N}$ に対して \mathcal{C}_{pp} の Betti 数 $b_k(\mathcal{C}_{pp}) \neq 0$ であることを示した ([Se]). $p \in M$ を与えるとき, 任意の $q \in M$ に対して \mathcal{C}_{pq} は \mathcal{C}_{pp} と同じ位相を持つから, 無限個の $k \in \mathbf{N}$ に対して $b_k(\mathcal{C}_{pq}) \neq 0$ である. §3.2 と同様に \mathcal{C}_{pq} を測地線分からなる折線で近似して, エネルギー積分 E は (測地) 折線の空間 \mathcal{P}_{pq} 上で滑らかでその危点が p, q を結ぶ測地線 γ であるようにできる. 危点 γ は q が γ に沿って p の共役点でないとき非退化であった. このとき p の共役点の集合は M の零集合となるので, 殆どすべての q に対して \mathcal{P}_{pq} 上 E は非退化な関数となる. よって Morse 不等式から $b_k(\mathcal{C}_{pq}) \neq 0$ を満たす k に対して指数 k の p, q を結ぶ測地線が存在し, したがって p, q を結ぶ測地線は無数個存在する. 指数定理と比較定理から $k \rightarrow \infty$ のときこれらの測地線の長さは ∞ に発散する. 一般の $q \in M$ に対しては, E が非退化となる $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $q_i \rightarrow q$ と成るように選んで, 上の事実を用いれば次が成り立つことが分かる:

- 任意のコンパクト Riemann 多様体の任意の 2 点 p, q を結ぶ無限個の測地線が存在する. ただし球面の場合のように, これら無限個の p, q を結ぶ測地線がすべてある一つの閉測地線上にある可能性はある.

他方, この手法を (\mathcal{C}_M, E) に適用しようとするとき, 閉測地線 γ は E の (E 値正の) 危点であるが, γ と共にパラメータ変換である $O(2)$ の作用による軌道 $O(2)\gamma$ は E が危点からなる 2 つの部分多様体 (危部分多様体) Γ として現れることを考慮に入れる必要がある (あるいは (\mathcal{P}_N^e, E) を考える場合は, 頂点間の巡回置換またはその逆の作用を考える必要がある). もし γ が非退化ならば, Γ は非退化な危部分多様体 (すなわち, D^2E を Γ の法バンドルに制限すれば非退化) となり, 一般化された Morse 不等式にあたるものを考えることが可能である ([Bo2]). 他方, $O(2)$ (あるいは巡回置換の作用) は固定点を持ちうるので, 同変 Morse 理論を考える必要がある (この立場は R. Bott により提唱され, N. Hingston により実行された [Hi1]).

多くの幾何学的に異なる閉測地線の存在やその性質を調べるときに, 繰り返し閉測地線 (iterated closed geodesic) の指数に関する R. Bott の定理 ([Bo1]) が重要な役割を果たす. $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ を閉測地線とし, $k \in \mathbf{Z}$ に対して $\tilde{\gamma}(k+t) = \gamma(t) (0 \leq t \leq 1)$ と定義すれば測地線 $\tilde{\gamma}: \mathbf{R} \rightarrow M$ を得る. $k \in \mathbf{N}$ なら $\tilde{\gamma}|[0, k]$ は γ を k 回廻った測地線 γ^k である⁴³. いま, $[0, 1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ を $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ 上には共役点の対が存在しないように選び, \mathcal{J} を $\tilde{\gamma}$ に沿った連続なベクトル場 X で各 i および任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して $X|_{[t_i+k, t_{i+1}+k]}$ が $\tilde{\gamma}$ に垂直な Jacobi 場であるもの全体のなすベクトル空間, $\mathcal{J}_{\mathbf{C}}$ をその複素化とする. このとき $q \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{C}$ に対して

$$\mathcal{J}_{[q,z]} := \{X \in \mathcal{J}_{\mathbf{C}} \mid X(t+q) = zX(t) \text{ が任意の } t \in \mathbf{R} \text{ に対して成り立つ}\}$$

⁴³前に述べた γ^k とはパラメータの取り方が違うが, 本質的には同じなので同じ記号を用いる.

は \mathcal{J}_C の有限次元部分空間である. 各 $q \in \mathbf{N}$ に対して

$$I_q(X, Y) = \int_0^q \{ \langle \nabla X, \nabla Y \rangle - \langle R(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y \rangle \} dt$$

は \mathcal{J} 上の 2 次形式であるが, これを \mathcal{J} の複素化 \mathcal{J}_C 上の Hermite 形式に拡張したのも同じ記号で表す. このとき, $\text{Ind}\gamma^q, \text{Null}\gamma^q$ はそれぞれ Hermite 形式 $I_q|_{\mathcal{J}_{[q,1]}}$ の指数, 零数に等しい. R. Bott は $\text{Ind}\gamma^q, \text{Null}\gamma^q$ を γ の線形 Poincaré 写像 P を用いて表した. P は $V = \perp \dot{\gamma}(0) (\subset T_{\gamma(0)}M)$ とおくと, $V \oplus V$ の線形同型写像であるが, 複素化して考える. このとき z が 1 の q 乗根ならば $\mathcal{J}_{[1,z]} \subset \mathcal{J}_{[q,1]}$ であり, $\bigoplus_{z^q=1} \mathcal{J}_{[1,z]} = \mathcal{J}_{[q,1]}$ が成り立つ. この直和因子達は I_q に関して直交し, 各 $\mathcal{J}_{[1,z]}$ 上 $I_q = qI_1$ を満たす. そこで, $I(z), N(z)$ をそれぞれ $I_1|_{\mathcal{J}_{[1,z]}}$ の指数, 零数を表すとし, $I_0(z) = I(z) + N(z)$ とおく. 定義より $I(1) = \text{Ind}\gamma, N(1) = \text{Null}\gamma, I_0(1) = \text{Ind}_0\gamma$ である. このとき次が成り立つ:

定理 18. (1) $N(z) = \dim \ker(P - z \text{id})$ であり, $I(z) = I(\bar{z}), N(z) = N(\bar{z})$ が成立する. また, $\text{Ind}(\gamma_1^q) = \sum_{z^q=1} I(z), \text{Null}(\gamma_1^q) = \sum_{z^q=1} N(z), \text{Ind}_0(\gamma_1^q) = \sum_{z^q=1} I_0(z)$ が成り立つ.

(2) I は $N(z) = 0$ を満たす点では定数であり, $\lim_{\theta \rightarrow \pm 0} I(ze^{i\theta}) \geq I(z)$ が成り立つ. $S^{\pm 1}(z) = \lim_{\theta \rightarrow \pm 0} I(ze^{i\theta}) - I(z)$ をジャンプとすれば, $0 \leq S^{\pm 1}(z) \leq N(z)$ である.

(3) I_0 は $N(z) = 0$ を満たす点では定数であり, $\lim_{\theta \rightarrow \pm 0} I_0(ze^{i\theta}) \leq I_0(z)$ が成り立つ. $S_0^{\pm 1}(z) = \lim_{\theta \rightarrow \pm 0} I_0(ze^{i\theta}) - I_0(z)$ をジャンプとすれば, $-N(z) \leq S_0^{\pm 1}(z) \leq 0$ である.

系 19. もし γ が双曲的なら $\text{Ind}(\gamma^q) = q \text{Ind}\gamma$ が成り立つ.

$z_j = \exp(2\pi a_j), a_j < a_{j+1}, j = 1, \dots, l-1$ を絶対値 1 で正の虚数部分をもつ P の固有値とし, $a_0, a_l = 1/2$ とおく. $l \leq \dim M$ で, I は (a_{j-1}, a_j) 上定数だからその値を I_j とする. いま

$$\alpha_\gamma = 2 \sum_{j=1}^l I_j(a_j - a_{j-1}), \quad \beta_\gamma = 2 \sum_{j=1}^l I_j$$

とおく, このとき $\text{Ind}(\gamma^q)$ に対して, Gromoll-Meyer, W. Ziller 等は次を示した:

$$q\alpha_\gamma - \beta_\gamma \leq \text{Ind}(\gamma^q) \leq q\alpha_\gamma + \beta_\gamma. \quad (19)$$

これより次が分かる: もし有限個の異なる素閉測地線しか存在しなければ, 次のような $n_0 \in \mathbf{N}$ を得る: $i_{n_0} \in \mathbf{N}$ があって指数 $i (\geq i_{n_0})$ である E の危点の $O(2)$ 軌道は高々 n_0 個しか存在しない.

3. 4 閉測地線の存在問題: その後の発展

1960 年代の終わりに D. Gromoll-W. Meyer は多くのコンパクト単連結多様体上の任意の Riemann 計量に対して, 無限個の幾何学的に異なる閉測地線が存在するという驚くべき結果を得た:

定理 20 ([Gr-Mey2]). M をコンパクト単連結多様体とする. もし, ある体 F に対して M の閉曲線の空間 \mathcal{C}_M の Betti の列 $\{b_i(\mathcal{C}_M, F)\}_{i=1}^\infty$ が (i の関数として) 有界でないならば, M の任意の Riemann 計量に対して無限個の (幾何学的に異なる) 閉測地線が存在する.

もし M の閉測地線がすべて非退化であれば、その $O(2)$ -軌道はエネルギー積分 E の非退化な危多様体をなす。したがってもし有限個の素閉測地線しか存在しないと仮定すると、Morse 不等式と式 (19) の後の注意から M の閉曲線の空間 \mathcal{C}_M の Betti の列 $\{b_i(\mathcal{C}_M, F)\}_{i=1}^{\infty}$ は有界となり、定理が成り立つ。一般の Riemann 計量の場合も、もし有限個の素閉測地線の $O(2)$ -軌道しか存在しなければ、それらは孤立した非退化な危多様体をなす。この一般の場合に Morse 不等式を拡張して Gromoll-Meyer は定理を導いた。なおより詳しい証明の解説と、関連して等長変換で不変な測地線の存在問題に関する解説が [Ta1] にあるので参照されたい。なおこの結果は Finsler 計量の場合も成り立つ。

従って、どんな体 F に対しても $\{b_i(\mathcal{C}_M, F)\}_{i=0}^{\infty}$ が有界な多様体に対して上の定理は適用できないが、Vigué-Poirrier と Sullivan による次の結果から、上の定理は実際非常に多くの多様体上の任意の Riemann 計量に対して無限個の (幾何学的に異なる) 閉測地線を導くことが分かる。

定理 21. コンパクト単連結多様体 M に対して、閉曲線の空間 \mathcal{C}_M の有理 Betti の列 $\{b_i(\mathcal{C}_M, \mathbf{Q}) = \dim H_i(\mathcal{C}_M, \mathbf{Q})\}_{i=0}^{\infty}$ が有界であるためには M の有理コホモロジー環 $H^*(M, \mathbf{Q})$ が 1 個の元から生成されていることが必要かつ十分である。特に、 $H^*(M, \mathbf{Q})$ が 1 個の元から生成され得ないならば、Gromoll-Meyer の定理の仮定は満たされる。

$H^*(M, \mathbf{Q})$ が 1 個の元から生成されている例として、球面や種々の射影空間があるが、これらの空間の標準的な Riemann 計量に関してはすべての測地線は閉測地線であった (ただし、これら以外の多様体の例がある)。

一般の S^n の場合 Lusternik-L. Schnirelmann 型の定理はずっと難しくなる。Morse による楕円面上の閉測地線の研究によれば、高々 $n(n+1)/2$ 個の単純 (あるいは短い) 閉測地線の存在を示すのがベストである (Ballmann, Bangert による断面曲率が殆ど定数の場合の結果がある [Ba3])。 S^n 上の一般の計量に対して閉測地線の存在を云うのに、 $\Gamma(S^n) \subset \hat{\mathcal{C}}$ を S^n の小円全体の空間 (自明な点曲線も含む)、 $\Delta(S^n)$ を S^n の大円全体の空間としてこれらを用いる Lusternik に始まる方法がある。大円はそれを含む \mathbf{R}^{n+1} の原点を通る平面によって定まるから、 $\Delta(S^n)$ は Grassmann 多様体 $G(2, n-1)$ と考えることが出来る。小円はそれに平行な大円を一意に決めるから写像 $\pi: \Gamma(S^n) \rightarrow \Delta(S^n) \cong G(2, n-1)$ を得るが、これは $G(2, n-1)$ 上の開ディスクバンドルである。 $G(2, n-1)$ には $g(n)$ 個⁴⁴の付随ホモロジー類鎖⁴⁵ができるが、これから Thom 同型により $\Gamma(S^n)$ の付随ホモロジー類鎖をえる。このとき、それらを $(\hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathcal{C}}^0)$ に埋め込んで付随ホモロジー類鎖を構成して Lusternik-Schnirelmann 理論を適用すれば、次が云えるであろう：上の付随ホモロジー類鎖に対応して (S^n, g) 上 E 値 $\kappa_i (1 \leq i \leq g(n))$ の閉測地線 c_i が存在する。

しかし $(\hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathcal{C}}^0)$ のトポロジーは (上の理由で) 微妙で、一般には上のホモロジー類列は $(\hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathcal{C}}^0)$ の付随ホモロジー類鎖を与えているかどうか分からない。次に述べる結果は Alber, Klingenberg 等によってまず扱われたがギャップがあり、[Ba-Th-Zi3],[Ba-Th-Zi4],[An2], [An3], [Hi1] 等によって確かめられた。もし、 \mathcal{C} の $O(2)$ が自由に作用する部分集合の商空間に $\Gamma(S^n)$ の付随ホモロジー類鎖を埋め込むことができれば、位相的な困難は克服できる。例えば Ballmann-Thorbergsson-Ziller は (S^n, g) の断面曲率がピンチされ、単射半径の評価が得られているときこの方針で次を得た：

⁴⁴ $g(n) = 2n - s - 1$ ($s \geq 0$ は $2^k + s = n < 2^{k+1}$ によって決まる)。これは $G(2, n-1)$ のカップ長に等しい。

⁴⁵ホモロジーは \mathbf{Z}_2 係数で考える。

1. 球面 S^n 上の Riemann 計量の断面曲率が $(\frac{1}{4} \leq) \delta \leq K \leq 1$ を満たせば, 少なくとも $g(n)$ 個の単純閉測地線でその長さが $[2\pi, 2\pi/\sqrt{\delta}]$ ($\subset [2\pi, 4\pi]$) の範囲にあるものを許容する. もし長さ $\leq 4\pi$ の閉測地線がすべて非退化であるならば, 少なくとも $n(n+1)/2$ 個のその長さが $[2\pi, 2\pi/\sqrt{\delta}]$ の範囲にある単純閉測地線を許容する.
2. 実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ 上の Riemann 計量の断面曲率が $(\frac{1}{4} \leq) \delta \leq K \leq 1$ を満たせば, 少なくとも $g(n)$ 個のホモトピー自明でない単純閉測地線でその長さが $[\pi, 2\pi/\sqrt{\delta}]$ ($\subset [\pi, 2\pi]$) の範囲にあるものを許容する. もし長さ $\leq 2\pi$ の閉測地線がすべて非退化であるならば, 少なくとも $n(n+1)/2$ 個のその長さが $[\pi, 2\pi/\sqrt{\delta}]$ の範囲にある単純閉測地線を許容する.

更に Ballmann-Thorbergsson-Ziller は閉測地線 γ の安定性に関して次を得た: 最も簡単な場合として, (S^n, g) の断面曲率が $1/4$ ピンチの場合を考えてみよう. 注意 14 より, 閉測地線 γ で $\text{Ind}\gamma \leq n-1$ を満たすものが存在する. 単射半径評価より $L(\gamma) \geq 2\pi$ で等号が成立すれば, (S^n, g) は定曲率で $P \equiv \text{id}$ だから $L(\gamma) > 2\pi$ としてよい. このとき有理数を p/q を $L(\gamma) > 2p\pi/q$ を満たすように選べば, $L(\gamma^q) > 2p\pi$ で (16) より $\text{Ind}\gamma^q \geq p(n-1) > q(n-1)$. よって系 19 より γ は双曲的ではあり得ない. 一般の場合は線形 Poincaré 写像 P と関数 $I, I_0: S^1 \rightarrow \mathbf{N}$ (定理 18 参照) の関係を詳細に調べるにより次を得る ([Ba-Th-Zi2],[Ba-Th-Zi3]):

1. Riemann 多様体 M^n が次のいずれかの条件を満たせば楕円・放物型の閉測地線を許容する (K は断面曲率を表す):
 - (i) $M = S^n$ で $\frac{9}{16} \leq K \leq 1$. (ii) $M = \mathbf{R}P^n$ で $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$.
2. Riemann 多様体 M が次のいずれかの条件を満たせば双曲型でない閉測地線を許容する:
 - (i) $\pi_1(M) \neq 0$ で $\text{Ric} \geq 0$. (ii) $\pi_k(M) \neq 0$ で $(\frac{k-1}{2(n-1)})^2 \leq K \leq 1$.
3. Riemann 多様体 M^n が次のいずれかの条件を満たせば少なくとも 2 個の楕円・放物型の閉測地線を許容する.
 - (i) $M = S^n$ で $\frac{16}{25} \leq K \leq 1$. (ii) $M = \mathbf{R}P^n$ で $\frac{4}{9} \leq K \leq 1$.
4. Riemann 多様体 M^n が次のいずれかの条件を満たせば少なくとも 2 個の双曲型でない閉測地線を許容する.
 - (i) $M = S^n$ で $\frac{4}{9} \leq K \leq 1$. (ii) $M = \mathbf{R}P^n$ で $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$.

更に次が成り立つ ([Ba-Th-Zi3],[Ba-Th-Zi4]):

- Riemann 多様体 M^n は S^n に同相で $((2n-2)/(2n-1))^2 \leq \delta \leq K \leq 1$ を満たせば, 少なくとも $g(n) - 1$ 個の非双曲型の単純閉測地線でその長さが $[2\pi, 2\pi/\sqrt{\delta}]$ の範囲にあるものを許容する. このとき $n \neq 2^k$ なら, 少なくとも $g(n)$ 個以上の条件を満たす非双曲型閉測地線が存在する. もし長さ $< 4\pi$ のすべての閉測地線が非退化ならば, 少なくとも $(n^2/2)$ 以上⁴⁶の条件を満たす閉測地線が存在する.

⁴⁶ここで (k) は k の最小整数を意味する.

付記 W. Klingenberg は球面定理が一段落した後閉測地線の研究に向かい、Bonn 大学で活発な学派を形成し、上で述べた D. Gromoll, W. Meyer, W. Ballmann, G. Thorbergsson, W. Ziller 等多くの勝れた幾何学者が出た。Klingenberg 自身は任意のコンパクト Riemann 多様体上無限個の異なる閉測地線の存在証明に全精力を傾け著書 [K1] にその証明を発表したが、証明にはギャップがあることが判明した。

1990年代に入って、2次元球面 S^2 上の任意の Riemann 計量に関して無限個の異なる閉測地線の存在が証明された。Lusternik-Scnirelmann により S^2 上の任意の Riemann 計量に関して3本の単純閉測地線の存在が示されていた(定理16)。単純閉測地線 γ^{47} が与えられたとき γ は S^2 を2つの領域 D^+, D^- に分けるが、各 $x = \gamma(s)$ を始点とし D^+ に向かう単位接ベクトル(これは $\dot{\gamma}(s)$ となす角 $\theta \in (0, \pi)$ で表される)と $\dot{\gamma}(s) = (\gamma(s), 0), -\dot{\gamma}(s) = (\gamma(s), \pi)$ を集めると円環面 $A = ([0, L]/\{0, L\}) \times [0, \pi]$ を得る。その2つの境界成分は $\{\dot{\gamma}(s) = (\gamma(s), 0), 0 \leq s \leq L\}$ と $\{-\dot{\gamma}(s) = (\gamma(s), \pi) 0 \leq s \leq L\}$ で与えられる。Birkhoff は円環面写像 $B_\gamma : A \rightarrow A$ を次の2つの条件(a),(b)の下で定義し、閉測地線の存在問題を B_γ の固定点を求めることによって解こうとした：

(a) $\gamma([0, L])$ の点を始点とする任意の測地線 $\delta : [0, \infty) \rightarrow S^2$ に対して、 δ はある $\delta(t); t > 0$ で再び γ と交わる；

(b) γ のパラメータの範囲を \mathbf{R} で考えたとき、 γ の共役点の対が存在する。

この条件の下で、まず A の内点 $(x, \theta); 0 < \theta < \pi$ に対し、 x を始点とし θ 方向に D^+ を走る測地線を取りこれが再び γ と交わる点(条件より存在する)を x_0 とする。この測地線は x_0 で D^- 方向を向き、さらに進んで再び γ と点 x' で交わり D^+ に向かうので、 $\dot{\gamma}$ と角 $\theta' \in (0, \pi)$ をなす。そこで $B_\gamma(x, \theta) = (x', \theta')$ と定義すれば、これは A の内部の微分同相写像を与える。測地流が Liouville 測度を保つことから B_γ は A の測度 $dA = dx \wedge d\theta$ を不変にすることが分かる。このとき B_γ の不動点は γ と異なる閉測地線を定める。さらに条件(b)の下で、 A の境界の点 $(x, 0)((x, \pi))$ に対して $\gamma(\gamma^{-1})$ に沿った x の第2共役点 x' を取り、 $B_\gamma(x, 0) = (x', 0)(B_\gamma(x, \pi) = (x', \pi))$ と定義する。これにより、写像 B_γ を A の測度を保つ同相写像に拡張できる。もし、 x の第2共役点 x' が始点 x に一致しなければ、Sturm の定理によって A の2つの境界である円周上で B_γ は互いに逆向きに回転する。Birkhoff はもし S^2 の Gauss 曲率が正ならこれらの条件が満たされることを示し、Poincaré の「幾何学的定理」⁴⁸を適用して、この場合2個の不動点が存在することを導いた。よってさらに2つの閉測地線の存在が導ける。

さて、J. Franks は Poincaré の「幾何学的定理」で、 Φ によって境界の円が逆方向に回るという仮定が無くても、内部に不動点を持てば無限個の不動点が存在することを示し、次を得た ([Fr])：

- (S^2, g) を2次元球面上の Riemann 計量とする。もし単純閉測地線 γ でその Birkhoff 輪環面写像 $B_\gamma : A \rightarrow A$ が定義されるようなものが存在すれば、 (S^2, g) は無限個の幾何学的に異なる閉測地線を許容する。

⁴⁷ここでは、パラメータとして弧長 $0 \leq s \leq L$ をとる。

⁴⁸Poincaré は亡くなる少し前次の定理の証明を予告した：「平面の円環面 A の面積を保つ同相写像 Φ が与えられたとする。 A の境界の2つの円周が Φ によってそれぞれ逆方向に回るならば、 Φ は少なくとも2個の不動点を持つ」。しかしその証明は彼の死後 Birkhoff によって始めて与えられた。なお、後に W. D. Neumann によってこのとき無限個の不動点が得られることが示された ([Ne]).

実際, Lusternik-Schnirelmann の定理からもう一つ別の閉測地線がとれ, 定理の仮定の下で円環面写像 B_γ の内部不動点を与える. 他方, Bangert は円環面写像が定義できないような単純閉測地線 γ が存在した場合, すなわち共役点を持たないか, 或いは共役点对を持つが測地線 $\delta: (0, \infty) \rightarrow S^2$ で γ と交わらないものが存在する場合 (幾何学的には (S^2, g) がくびれを持つ場合) を考えた. そしていずれの場合も, 無限個の幾何学的に異なる閉測地線が存在することを示した ([Ban3]).

その後 Hingston は, 円環面写像が定義されるが境界が回転しない場合に直接無限個の閉測地線が存在することを示し, Neumann の結果を使うことにより証明を簡易化した. また閉測地線の数え上げ関数の評価を与えた ([Hi2]). 以上の3種類の異なる手法によって, 次の定理が得られた:

定理 22. (S^2, g) を2次元球面上の任意の Riemann 計量とすると無限個の幾何学的に異なる閉測地線が存在する. さらに数え上げ関数 $CF(L) = \#\{\gamma : \text{長さ} \leq L \text{ の素閉測地線}\}$ に対して次が成り立つ: ある正定数 a に対して $CF(L) > aL/\log L$.

ここで, $L/\log L$ は素数の分布に関する素数定理に現れる量であることを注意する. また, Hingston は S^2 上正曲率の一般の計量に関して $CF(L) > aL^2$ を示した (互いに素な正整数の対 (p, q) で $p^2 + q^2 \leq L^2$ を満たすものの個数は L^2 のオーダーであった).

注意 23. (1) どの2次元コンパクト Riemann 多様体も無限個の幾何学的に異なる閉測地線を許容する. 実際, M_g を向き付け可能な種数 $g \geq 1$ の閉曲面とする. 自明でない閉曲線の自由ホモトピー類 (これは基本群の共役類と1対1に対応する) のなかに閉測地線が存在するが, 同じ自由ホモトピー類に属する2つの閉測地線は同じ整係数ホモロジー類に属し, 2つの閉測地線がある閉測地線 γ の繰り返し γ^m, γ^n であれば対応するホモロジー類も γ のホモロジー類 $[\gamma]$ の m, n 倍 ($m[\gamma], n[\gamma]$) である. $H_1(M, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{2g}$ であるから, その生成元集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_{2g}\}$ を選び, 素数 p に対してホモロジー類 $v_1 + pv_2$ に属する閉測地線 γ_p を取ればこれは素で, $\{\gamma_p\}$ は互いに異なる閉測地線である. 向き付け不可能な閉曲面に対してはその向き付け可能な2重被覆を考えればよい.

(2) 一般の非対称 Finsler 多様体では事情が異なる. A. B. Katok は S^2 上の非対称 Finsler 計量で, ちょうど2個の閉測地線しか許容しない例を与えた (これら2つは同じ閉曲線の向きを逆にしたものである). これについて以下簡単に説明する ([Zi]):

滑らかな多様体 M の余接バンドル T^*M は自然なシンプレクティック構造 ω を持つが, Hamiltonian $H: T^*M \rightarrow \mathbf{R}$ が与えられるとその Hamilton ベクトル場 X_H が, $DH(\xi) (= \xi H) = \omega(X_H, \xi); \xi \in T(T^*M)$ により定まる. M の局所座標系を (x^i) とし, 対応して決まる T^*M の局所座標系を (x^i, α_i) とする ($\alpha = \sum \alpha_i dx^i \in T_x^*M$ の局所座標が (x^i, α_i) である). このとき, Legendre 逆変換 $\mathcal{L}_H^*: T^*M \rightarrow TM$ が

$$\mathcal{L}_H^*(\sum \alpha_i dx^i) = \sum (\partial H / \partial \alpha_i) (\partial / \partial x^i)$$

で与えられる. もし, H が正値2次斉次関数 ($H(\lambda\alpha) = \lambda^2 H(\alpha), \alpha \in T^*M, \lambda > 0$) で, H のファイバー F 方向に制限して得られる Hesse 形式 $D_F^2 H = (\partial^2 H / \partial \alpha_i \partial \alpha_j)$ が正定値ならば, \mathcal{L}_H^* は微分同相写像になる. よって $N^2 = 2H \circ (\mathcal{L}_H^*)^{-1}$ は M 上 Finsler 計量を与える. このとき, X_H の積分曲線の $\tau_M^*: T^*M \rightarrow M$ による像が N の測地線を与える.

(S^2, g) を定曲率 1 の標準的な Riemann 計量とし, その等長変換群の閉じた 1 径数変換群 ϕ_t で $\phi_{2\pi} = \text{id}$ を満たすものをとる. $V(\neq 0)$ を ϕ_t の生成するベクトル場とし, T^*M 上の関数 H_0, H_1 を

$$H_0(\alpha) = |\alpha|_* (= \sqrt{\sum g^{ij} \alpha_i \alpha_j}), \quad H_1(\alpha) = \alpha(V)$$

で定義し, T^*M 上の関数を

$$H_\epsilon = H_0 + \epsilon H_1$$

で与える. このとき十分小さな $|\epsilon| > 0$ に対して, $N_\epsilon := H_\epsilon \circ \mathcal{L}_{H_\epsilon}^{-1}$ は M 上の Finsler 計量を与える. しかし, $H_\epsilon(-x) \neq H_\epsilon(x)$ より N_ϵ は対称でない.

N_ϵ の測地流, すなわち $X_{H_\epsilon}^{2/2}$ の流れを求めよう. まず $X_{H_0}^{2/2}$ は (S^2, g) の測地スプレーを TM と T^*M の g による同一視のもとに T^*M のベクトル場と見たものであった. $X_{H_0}^{2/2} = H_0 X_{H_0}$ であるから, これらの積分曲線は互いに他方のパラメータを変換することにより得られる. 実際, $X_{H_0}^{2/2}$ の T^*M 上の積分曲線 $c(t)$ を (S^2, g) の測地線として $(c(t), \xi(c(t)))$ の形で表されが, この測地線の弧長パラメータによる表示を $c_0(s)$ とすれば, X_{H_0} の流れ $\psi_t^{H_0}$ は $(c_0(s), \xi(c_0(s)))$ で与えられる. 特に $\psi_{2\pi}^{H_0} = \text{id}$ が T^*M 上で成り立つ. 他方, X_{H_1} の流れは $\psi_t^{H_1} = D^* \phi_t$ で与えられる. ここで ϕ_t は g の等長変換であるから, X_{H_0}, X_{H_1} の流れは可換であり X_{H_ϵ} の流れは次式で与えられる:

$$\psi_t^{H_\epsilon} = \psi_t^{H_0} \circ \psi_{\epsilon t}^{H_1} = \psi_{\epsilon t}^{H_1} \circ \psi_t^{H_0}.$$

上と同様に $X_{H_\epsilon}^{2/2}$ の流れ (これは N_ϵ の測地流を与える) と X_{H_ϵ} の流れ $\psi_t^{H_\epsilon}$ はパラメータのとり方だけ異なる: $X_{H_\epsilon}^{2/2}$ の積分曲線を $(c(t), \xi(c(t)))$ とすれば, $c_0(s)$ を $N_\epsilon(\dot{c}_0(s)) = 1$ を満たすように曲線 c のパラメータを変換した曲線とすると, $(c_0(s), \xi(c_0(s)))$ が X_{H_ϵ} の積分曲線, 従って流れを与える.

さて $x \in T^*M, H_\epsilon(x) = 1$ で $\psi_T^{H_\epsilon} x = x$ を満たすものは, N_ϵ 計量に関して長さ T の閉測地線を定める (逆も成り立つ). 従って $\psi_{-T}^{H_0} x = \psi_{\epsilon T}^{H_1} x$ であるが, X_{H_0}, X_{H_1} の流れは可換なので, $\psi_{\epsilon T}^{H_1}$ は $\tilde{x}(t) = \psi_t^{H_0} x$ で与えられる軌道を変換にする. よって $\psi_{\epsilon n T}^{H_1} (n = 1, 2, \dots)$ も \tilde{x} を不変にする. もし $\epsilon T/2\pi$ が無理数ならば, $\psi_{2\pi}^{H_1} = \text{id}$ より $\{\epsilon n T/2\pi\}$ は 1 を法として \mathbf{R}/\mathbf{Z} で稠密であるから, 1 係数変換群 $\psi_t^{H_1}$ 全体が \tilde{x} を不変にする. 他方 $\epsilon T/2\pi$ が有理数ならば, $\epsilon T = 2\pi m/n$ と表すとき

$$x = \psi_{2\pi m}^{H_1} x = \psi_{\epsilon n T}^{H_1} x = \psi_{-n T}^{H_0} x.$$

よって $T/2\pi$ したがって ϵ は有理数である. これより ϵ が無理数ならば, N_ϵ の閉測地線はパラメータのとり方を除いて ϕ_t で不変な g の閉測地線であることが分かる. 特に, ϕ_t として S^2 の北極と南極を結ぶ軸の周りの回転からなる (S^2, g) の 1 径数等長変換群を取れば, ϕ_t で不変な大円は赤道のみであるから, 十分小さな無理数 ϵ に対して対応する非対称 Finsler 計量 N_ϵ は, 赤道の向きに対応して, ちょうど 2 個の閉測地線しか持たないことになる⁴⁹.

注意 24. (1) Ziller は S^n や種々の射影空間上でこのような非対称 Finsler 計量の例を与え, その幾何学的性質を調べた ([Zi]). 例えば, S^{2n}, S^{2n-1} 上ちょうど $2n$ 個の閉測地線を持つ Finsler 計量が存在することが分かる.

⁴⁹赤道を ϕ_t の正 (負) の向きに走る N_ϵ の閉測地線を $\gamma_1(\gamma_2)$ とすると, その長さは $L(\gamma_1) = 2\pi/(1+\epsilon), L(\gamma_2) = 2\pi/(1-\epsilon)$ である. また, $\gamma_i (i = 1, 2)$ に沿って $\gamma_i(0)$ の共役点は $t = k\pi, k \in \mathbf{N}$ で現れる.

(2) 最近, *Bangert-Y.Long* は S^2 上のどの *Finsler* 計量も少なくとも 2 個の異なる閉測地線を許容することを示した ([*Ban-Lo*]). また *V.Long-D.Huagi* は任意の 3 次元単連結 *Finsler* 多様体に対して少なくとも 2 個の幾何学的に異なる閉測地線の存在を示した ([*Lo-Hu*]).

3. 5 一般的な (generic) 計量に対する閉測地線の存在問題

どんなコンパクト Riemann 多様体上無限個の閉測地線が存在するかについては Gromoll-Meyer の定理により, コンパクト単連結多様体 M の閉曲線の空間 \mathcal{C}_M に対して体 F に関する Betti の列 $\{b_i(\mathcal{C}_M, F)\}_{i=1}^{\infty}$ が有界でないならば, M 上での Riemann 計量も無限個の (幾何学的に異なる) 閉測地線を許容することが分かっている. よって *Vigué-Poirrier* と *Sullivan* の結果から, M の有理コホモロジー環 $H^*(M, \mathbf{Q})$ が 1 個の元から生成されている場合 (例えば球面の場合) を考えればよい.

他方, 与えられたコンパクト多様体に対して, 異なる測地線を無限個許容するような Riemann 計量が一般的に存在するかという問題がある.

コンパクト多様体上の関数 $f: N \rightarrow \mathbf{R}$ に対する Morse 理論で, f が非退化の場合危点の指数と N の位相の関連はよく分かり, 例えば Morse 不等式により f の危点の個数を N の Betti 数の総和で評価することができた. また, 非退化な関数は滑らかな関数全体の中で一般的 (generic) であった.

コンパクト多様体 M 上の Riemann 計量で, その閉測地線がすべて非退化であるものをでこぼこ (bumpy) 計量という. いま M 上の C^r 級 Riemann 計量 ($2 \leq r \leq \infty$) 全体の空間 $\mathcal{G}^r(C^r$ 位相) の残留 (residual) 集合は \mathcal{G}^r で稠密であるが, ある Riemann 計量に関する性質はその性質を満たす C^r 級 Riemann 計量の族が \mathcal{G}^r の残留集合を含むとき, C^r 一般的であるという. [*Ab*], [*An4*] によって次が知られている:

- $2 \leq r \leq \infty$ に対してコンパクト多様体上でこぼこ計量は C^r 一般的である.
- *Klingenberg-F. Takens*([*K-T*]) はさらに次を示した: コンパクト多様体上, すべての閉測地線が双曲的であるか, あるいは非双曲的な閉測地線でその *Poincaré* 写像が振れ型⁵⁰であるものが存在するという Riemann 計量の性質は C^4 一般的である.

上より一般的な Riemann 計量で, 振れ型非双曲的閉測地線を持つ場合か, すべての閉測地線が双曲的なでこぼこ計量の場合を調べればよい. 前者の場合は *Moser* の定理から無限個の閉測地線が存在する. 後者の場合, M が単連結ならば, *Hingston*([*Hi1*]) と *H-B. Rademacher*([*Ra1*]) はやはり無限個の閉測地線を持つことを示した⁵¹. 従って, コンパクト単連結多様体の一般的な Riemann 計量は無限個の閉測地線を持つ. その後 *Rademacher*([*Ra2*]) は「強でこぼこ計量 (strongly bumpy) 計量」(線形 *Poincaré* 写像の固有値に関する条件で与えられる) は無限個の閉測地線を持つこと, 単連結コンパクト多様体上強でこぼこ性は C^r 一般的 ($2 \leq r \leq \infty$) であることを示した.

単連結コンパクト多様体上の一般的な計量に関する数え上げ関数 $CF(L)$ の評価については次が知られている:

⁵⁰線形 *Poincaré* 写像の固有値が 4-elementary という性質を満たし, *Birkhoff* 標準形の 3 次の項がある非退化性の条件を満たす. このときは *J. Moser* による *Birkhoff-Lewis* 型固定点定理により, 与えられ閉測地線の任意の柱状近傍に無限個の異なる閉測地線が存在する.

⁵¹*Hingston* は数え上げ関数に関して $\liminf CF(L) \log L/L > 0$ を示している.

定理 25 ([G1]). 単連結コンパクト多様体 M 上の任意のこぼこ Riemann 計量 g に対して正定数 $a = a(g), b = b(g)$ が存在して次が成り立つ:

$$CF(L) \geq \frac{a}{L} \sum_{i \leq bL} b_i(\mathcal{C}_M, R).$$

ここで $b_i(\mathcal{C}_M, R)$ は主イデアル整域 R に関する Betti 数である. 特に, M が有理双曲的ならば, $CF(L)$ は指数増大度を持つ (有理双曲性については脚注 62(p.44) 参照).

定理 26 ([Ba-Zi]). 単連結コンパクト多様体 M 上の任意のこぼこ Riemann 計量 g に対して正定数 $a = a(g), b = b(g)$ が存在して次が十分大きな L に対して成り立つ:

$$CF(L) \geq a \max_{i \leq bL} b_i(\mathcal{C}_M, R).$$

3. 6 基本群と閉測地線, 閉測地線の数え上げ

コンパクト非単連結 Riemann 多様体 M 上の異なる閉測地線の個数を評価しようとする M の基本群の構造が問題となる. いま (M, g) をコンパクト非単連結 Riemann 多様体とする. 基本群 $\pi_1(M)$ の元 a の共役類を $[a]$ とし, $CF^a(L)$ で $\{[a^n]; n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ で与えられる自由ホモトピー類に属する g の閉測地線のうちで幾何学的に異なる長さ $\leq L$ のものの個数を表すとする. Ballmann-Thorbergsson-Ziller は次を示した ([Ba-Th-Zi1]):

- コンパクト非単連結多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ の自明でない元 a で, 異なる整数 m, n に対して $[a^n] = [a^m]$ を満たすものとする. このとき, 一般的な Riemann 計量 g に対して

$$\liminf CF^a(L) \log L/L > 0$$

が成り立つ. 特に $\pi_1(M)$ が有限であれば $\liminf CF(L) \log L/L > 0$.

これを見るのに g として KT 計量を取る. g が捩れ型なら Moser の定理より $CF^a(L)$ は素数の増大度を持つ. よって, $a^q, q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ に自由ホモトピックな閉測地線がすべて双曲的な場合を考えればよい. γ を $[a]$ のなかで最小エネルギーの閉測地線とすれば, γ^n と γ^m (したがって任意の整数 l に対して γ^{nl} と γ^{ml}) は仮定より自由ホモトピックである. $\text{Ind} \gamma = 0$ で双曲性より $\text{Ind} \gamma^{nl} = \text{Ind} \gamma^{ml} = 0$ を得る. よって γ^{nl} と γ^{ml} を結ぶ \mathcal{C}_M 内の曲線全体の族を考えその危値を κ_l とすれば minimax 法より, エネルギー κ_l の閉測地線 γ_l を得る, $\text{Ind} \gamma_l = 1$ で γ_l は素な閉測地線である. このとき, $L(\gamma_l) > l \max\{L(\gamma^n), L(\gamma^m)\}$ を示すことができる.

次に, M をコンパクト多様体でその基本群 $\pi_1(M)$ が無限群の場合を考える. $\pi_1(M)$ が可換群でその階数 $k \geq 2$ (一般に $b_1(M) \geq 2$) ならば, 任意の Riemann 計量に対して無限個の異なる閉測地線が存在する. すなわち数え上げ関数に対して

$$\liminf CF(L)/L^k > 0$$

が成立する. 実際 $\pi_1(M)$ の生成系を $\{\gamma_i\}_{i=1}^k$ とすれば, 異なる閉測地線を求めるには $\{p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \dots + p_k\gamma_k \mid (p_1, \dots, p_k) \text{ は互いに素}\}$ に属する閉測地線を考えればよい. 生成系から得られた $\pi_1(M)$

のノルムに関して、ノルム $\leq L$ の互いに素な (p_1, \dots, p_k) の個数は L^k のオーダーで評価されることに注意すれば上の評価を得る。次に $\pi_1(M) \cong \mathbf{Z}$ の場合には、Bangert-Hingston([Ban-Hi]) は基本群のホモトピー群への作用を考えることにより次を得た：

定理 27. $M^n (n \geq 2)$ を $\pi_1(M) \cong \mathbf{Z}$ を満たすコンパクト Riemann 多様体とすれば次が成り立つ：

$$\liminf CF(L) \log L/L > 0.$$

もし、コンパクト Riemann 多様体 M がコンパクト単連結多様体 N に対して $S^1 \times N$ に同相の場合は評価は良くなって

$$\liminf CF(L) \log L/L^2 > 0, \quad \limsup CF(L)/L^2 > 0$$

が成立することが Gromov([G2]), Ballmann([Ba4]) によって示された。基本群が条件を満たす場合の閉測地線の個数評価については [Ta2], [Tai1] 等がある。またコンパクト負曲率 Riemann 多様体の閉測地線の個数評価については次節で扱う。

Gromov はコンパクト Riemann 多様体 M の基本群の語問題が解けないならば、無限個の可縮な閉測地線が存在するであろうと [G1] 述べたが、証明は A. Nabutovsky によって与えられた ([Na]). アイデアはもし有限個しか存在しないとすれば、基本群 $\pi_1(M)$ の与えられた語が単位元に簡約され得るかどうかのアルゴリズムを次のように与えることができ、矛盾を得る：各語 w を M の閉曲線 c_w で実現する。 L をどの可縮な閉測地線も長さ $\leq L$ の閉曲線からなるホモトピーで点曲線に変形できるような自然数とすれば、 L を知るアルゴリズムがある。このとき、どの長さ $\leq x$ の可縮な閉曲線も長さ $\max\{L, x\}$ の閉曲線からなるホモトピーで点曲線に変形できる。他方、長さがある定数で抑えられた M の区分的に滑らかな弧長パラメータの閉曲線全体の空間のプレコンパクト性を用いて、 c_w が可縮かどうかのアルゴリズムを与えることができる。

4 負曲率空間の測地流とエントロピー

4.1 Hadamard 多様体と凸性

\tilde{M} を断面曲率 $K \leq 0$ の非正曲率完備単連結 Riemann 多様体とすれば、各点 $x \in \tilde{M}$ に対して $\exp_x : T_x \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ は微分同相写像になり (Hadamard-Cartan の定理)、任意の 2 点を結ぶ正規測地線がただ 1 本存在する。この様な Riemann 多様体は Hadamard 多様体とも呼ばれる。このとき距離関数 $f := d_x (d_x(y) = d(x, y))$ は $\tilde{M} \setminus \{x\}$ で滑らかで、第 2 変分公式から $D^2 f(v, v) \leq 0$ を満たし凸関数になる⁵²。また Hadamard 多様体の場合、Rauch 比較定理 (§§2.4) はすべての測地 3 角形 (ヒンジ) に対して成り立つことを注意する。

一般に、Hadamard 多様体 \tilde{M} では凸性が重要な役割を果たす。閉凸集合からの距離関数や等長変換 φ の移動関数 $d_\varphi(x) = d(x, \varphi(x))$ は凸関数であり、測地線に沿った Jacobi 場 $Y(t)$ に対して

⁵²連続関数 $f : \tilde{M} \rightarrow \mathbf{R}$ は、任意の測地線 γ に対して $g = f \circ \gamma$ が凸関数のとき (すなわち、 $g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y); t \in [0, 1], x, y \in \mathbf{R}$ を満たすとき) 凸関数という。

$g(t) = |Y(t)|^2$ は滑らかな凸関数である．実際，断面曲率が $K \leq -a^2$ を満たせば正規測地線に沿った Jacobi 場 $Y(t)$ に対して

$$|Y|'' = \frac{-\langle R(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y \rangle}{|Y|} + \frac{|\nabla Y|^2 |Y|^2 - \langle \nabla Y, Y \rangle^2}{|Y|^3} \geq a^2 |Y|$$

を得るので， $|Y(t)|^2$ は凸関数である．また $Y(0) = 0$ を満たす場合は $|Y(t)| \geq |\nabla Y(0)|s_{-a^2}(t)$ が成り立つことが分かる (比較定理 (11) も参照)．したがって $a > 0$ の場合，すなわち断面曲率が上から負定数 $-a^2$ で押さえられているときは， $|Y(t)|$ は指数増大度を持ち，これは 1 点から出る測地線の不安定性 (instability) を示している⁵³．

Hadamard 多様体 \tilde{M} の半直線⁵⁴ γ, σ は定数 $c > 0$ が存在して $d(\gamma(t), \sigma(t)) \leq c; 0 \leq t < \infty$ を満たすとき漸近的であるという．半直線 γ と任意の点 $x \in \tilde{M}$ に対して， x を始点とし γ に漸近的な半直線が唯一存在することが分かる．漸近性は半直線全体の空間に同値関係を与え，その商空間 $\tilde{M}(\infty)$ を \tilde{M} の無限遠球面という．特に， $x \in \tilde{M}$ と $\xi \in \tilde{M}(\infty)$ に対して x を始点とし ξ の代表元である半直線 $\gamma_{x\xi}$ が唯一定まる． x を固定して， ξ に $\dot{\gamma}(0)_{x\xi} \in U_x \tilde{M}$ を対応させることにより全単射 $\tilde{M}(\infty) \rightarrow U_x \tilde{M}$ を得るが，これが同相写像となるように $\tilde{M}(\infty)$ に位相 (球面位相) を入れる．また $\tilde{M} \cup \tilde{M}(\infty)$ に， \tilde{M} が (元の位相に関して) 開かつ稠密であり， $\tilde{M}(\infty)$ に制限すれば球面位相となるような位相 (錐位相) を導入する．この位相に関して， $\tilde{M} \cup \tilde{M}(\infty)$ はコンパクトであり， $(x, \xi, \eta) \rightarrow \angle_x(\xi, \eta) := \angle(\dot{\gamma}_{x\xi}(0), \dot{\gamma}_{x\eta}(0))$ は連続である．

Hadamard 多様体の重要な凸関数として Busemann 関数がある： $v \in U\tilde{M}$ に対して

$$f_v(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma_v(t)) - t$$

で定まる関数を Busemann 関数と呼ぶ．これは任意の v に対して C^2 級の凸関数であり， $|\nabla f_v| \equiv 1$ を満たす． v, w が漸近的ならば $\nabla f_v \equiv \nabla f_w$ で f_v, f_w は定数の差しかない．無限遠点 $\xi \in \tilde{M}(\infty)$ に対して， $v \in U\tilde{M}$ を半直線 γ_v が ξ の代表元であるように選ぶ．このとき， x を通る ξ におけるホロ球面 $H(x, \xi)$ を f_v のレベル $f_v^{-1}(f_v(x))$ で定義する．これは \tilde{M} の (\mathbf{R}^{n-1} に微分同相な) 超曲面で， $V_y := \nabla f_v(y)$ が $y \in H(x, \xi)$ における単位法線ベクトルを与える ($H(x, \xi)$, V_y は代表元 v の選び方によらない)．特に， $v \in U\tilde{M}$ に対して $H(v) := f_v^{-1}(0)$ を v の定めるホロ球面という (これは $\gamma_v(0)$ を通る)． ξ の代表元 $v \in U\tilde{M}$ を選び， $\bigcup_{-\infty < t < \infty} H(\gamma_v(t), \xi)$ を考えれば，これらは互いに素で \tilde{M} を覆い， $d(H(\gamma_v(t_1), \xi), H(\gamma_v(t_2), \xi)) = |t_1 - t_2|$ を満たす．

次に Hadamard 多様体 \tilde{M} の単位接束 $U\tilde{M}$ の各元 v に対して， $U\tilde{M}$ の部分集合

$$\begin{aligned} W^s(v) &= \{w \in U\tilde{M} \mid v \text{ と } w \text{ は漸近的}\} \\ W^u(v) &= \{w \in U\tilde{M} \mid -v \text{ と } -w \text{ は漸近的}\} \end{aligned}$$

を考える．これらは $U\tilde{M}$ の C^2 級部分多様体で， $\tau: U\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ により \tilde{M} の上に微分同相に写され，それぞれ v を通る安定，不安定多様体と呼ばれる． $v \rightarrow W^s(v), W^u(v)$ はそれぞれ v に関して連続で，測地流で不変な安定，不安定葉層構造⁵⁵と呼ばれる葉層構造を定める．

⁵³また Rauch 比較定理で測地 3 角形 (ヒンジ) は負定曲率 $-a^2$ の双曲平面の対応する測地 3 角形 (ヒンジ) と比較できる．

⁵⁴正規測地線 γ を $[0, \infty)$ に制限したもので $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$ を満たす．

⁵⁵負定曲率計量や HK^n の場合は C^∞ 級であるが，一般には C^1 級ではない．

これら安定, 不安定葉層構造を Jacobi 場の言葉で述べることができる. $\xi = (A, B) \in T_v U\tilde{M}$ を水平・垂直方向への分解とすると, γ_v に沿った Jacobi 場 $Y_\xi(t)$ が条件 $Y_\xi(0) = A, \nabla Y_\xi(0) = B$ により一意に定まった. このとき次が成り立つ:

- $\xi \in T_v W^s(v) \Leftrightarrow |Y_\xi(t)|$ は t に関して単調非増加 ($t \geq 0$ で上に有界). このような Jacobi 場を安定 Jacobi 場という.
- $\xi \in T_v W^u(v) \Leftrightarrow |Y_\xi(t)|$ は t に関して単調非減少 ($t \leq 0$ で上に有界). このような Jacobi 場を不安定 Jacobi 場という.
- $\xi \in T_v W^s(v) \cap T_v W^u(v) \Leftrightarrow Y_\xi(t) (-\infty < t < \infty)$ は γ_v に沿って平行な Jacobi 場.

次に, \tilde{M} の断面曲率が正定数 a に対して $K \leq -a^2$ を満たす場合を考察しよう. この場合は 2 つの漸近的な半直線は指数減少度で互いに近づく. また, 2 つの異なる無限遠点 $\xi, \eta \in \tilde{M}(\infty)$ に対して ξ, η を結ぶ唯一つの正規測地線 $\gamma_{\xi\eta}$ (すなわち, $p = \gamma_{\xi\eta}(0)$ とおくと, $\gamma_{p\xi}(t) = \gamma_{\xi\eta}(-t), \gamma_{p\eta}(t) = \gamma_{\xi\eta}(t)$) を満たす正規測地線が存在する. これより, $\tilde{M}(\infty) \times \tilde{M}(\infty)$ の対角線集合を Δ とすれば, \tilde{M} の測地線のなす空間 $G(\tilde{M})$ を $\tilde{M}(\infty) \times \tilde{M}(\infty) \setminus \Delta$ と同一視できる. またこの負曲率の場合は安定 (不安定) 多様体の代わりに次の様に考えた方が好都合である. いま

$$\begin{aligned} W^{ss}(v) &= \{w \in W^s(v) \mid H(v) = H(w) \text{ (}\tilde{M}\text{で考えて)}\} \\ &= \{w \in W^s(v) \mid d(\phi^t v, \phi^t w) \rightarrow 0 \text{ (}t \rightarrow \infty)\} \\ W^{su}(v) &= \{w \in W^u(v) \mid H(-v) = H(-w) \text{ (}\tilde{M}\text{で考えて)}\} \\ &= \{w \in W^u(v) \mid d(\phi^t v, \phi^t w) \rightarrow 0 \text{ (}t \rightarrow -\infty)\} \end{aligned}$$

と定義すれば, これらは $W^s(v)(W^u(v))$ の余次元 1 の C^∞ 級部分多様体で, 強安定 (不安定) 多様体と呼ばれ⁵⁶, $\tau: U\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ によって \tilde{M} のホロ球面に写像される. Jacobi 場の言葉では

- $\xi \in T_v W^{ss}(v) \Leftrightarrow Y_\xi(t)$ は γ_v に直交し, $|Y_\xi(t)|$ は t に関して単調非増加.
- $\xi \in T_v W^{su}(v) \Leftrightarrow Y_\xi(t)$ は γ_v に直交し, $|Y_\xi(t)|$ は t に関して単調非減少.

このとき, $T_v W^{ss}(v) \cap T_v W^{su}(v) = 0$ である. W^{ss}, W^{su} は Anosov 葉層構造と呼ばれる測地流 ϕ^t で不変な $U\tilde{M}$ の葉層構造を定める. \tilde{M} がコンパクト商空間を持てば, これらは C^∞ 葉を持つ Hölder 連続な葉層構造で, 葉は C^∞ 位相で点に連続的に依存することが分かっている.

完備 Riemann 多様体 M の断面曲率が $-b^2 \leq K \leq -a^2$ を満たすとする (例えばコンパクト負曲率多様体 M の普遍 Riemann 被覆の場合この仮定は満たされる). M の正規測地線 γ に沿って γ に直交する安定 Jacobi 場 $Y(t)$ に対して比較定理を用いて

$$\begin{aligned} |Y(0)|e^{-bt} \leq |Y(t)| \leq |Y(0)|e^{-at}; t \geq 0 \\ a|Y(0)|e^{-bt} \leq a|Y(t)| \leq |\nabla Y(t)| \leq b|Y(t)| \leq b|Y(0)|e^{-at}; t \geq 0 \end{aligned} \tag{20}$$

⁵⁶幾何学的には, これらはホロ球面 $H(v)$ への内向き単位法線方向 ($H(-v)$ への外向き単位法線方向) からなる.

が成り立つ (不安定 Jacobi 場に対しても対応する評価が成り立つ).

完備非正曲率 (非単連結) Riemann 多様体 M に対してその普遍被覆 Riemann 多様体 \tilde{M} をとれば, \tilde{M} は Hadamard 多様体で, M は \tilde{M} を (その等長変換からなる) 被覆変換群 Γ の作用で割って得られる. したがって M の構造は Hadamard 多様体とその等長変換の性質を調べることによって分かる (詳しくは [Eb-Ha-Schr],[Ba5] 等を参照). 例えば, 等長変換 $\varphi \in \Gamma$ は自然に無限遠集合 $\tilde{M}(\infty)$ 上同相写像として作用する. これより, M の測地線の集合 $G(M)$ は $\Gamma \backslash (\tilde{M}(\infty) \times \tilde{M}(\infty) \setminus \Delta)$ と同一視できる. また, M の閉測地線は \tilde{M} の測地線 $\gamma_{\xi\eta}$ で ξ, η がある等長変換 $\varphi \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ で固定されるようなものとして特徴づけられる.

4.2 エルゴード性

コンパクト負曲率 Riemann 多様体の測地流は (双曲型) 力学系の発展において重要な役割を果たした. 完備負曲率 Riemann 多様体上の測地線の大域的挙動や閉測地線の研究は Hadamard に始まるが, E. Artin, J. Nielsen, Morse 等はコンパクト負曲率 Riemann 面や一般のコンパクト負曲率 Riemann 多様体の測地流に対して, その周期点の集合は稠密であることを示した. Morse はまた記号力学系を導入して負曲率閉曲面上 S の測地流の移換性 (transitivity : US で稠密な測地流の軌道が存在する) を示した ([Mo1],[Mo2]). その後, G. Hedlund は負曲率閉曲面上 S の測地流のエルゴード性を示した. しかし, 一般の負曲率閉曲面上 S の測地流のエルゴード性は E. Hopf による重要な論文 ([Hop1],[Hop2]) で初めて示された (一般次元の負曲率 Riemann 多様体の測地流のエルゴード性も E. Hopf による). その証明は幾何学的で, 負曲率曲面の測地流の双曲性に依っている. その後, 一般次元のコンパクト負曲率 Riemann 多様体における測地流のエルゴード性は Anosov によって 1960 年代になって証明された ([An1]).

コンパクト (体積有限) 負曲率 Riemann 多様体 M の測地流の周期点集合の UM における稠密性を示すために, まず次の閉補題 (Closing Lemma) を述べる.

- 完備 Riemann 多様体 M の断面曲率が負定数で上から押さえられているとする. 任意の $\epsilon > 0$ と $T > 1$ とに対して次の性質を満たす $\eta = \eta(\epsilon, T) > 0$ が存在する. $d(v, \phi^T v) < \eta$ を満たす任意の $v \in UM$ に対して $v' \in UM$ と $T' \in [T - \epsilon, T + \epsilon]$ が存在して, $\phi^{T'} v' = v$ かつ $d(\phi^t(v), \phi^t(v')) < \epsilon; t \in [0, T]$ が成り立つ.

これを見るのに M の普遍被覆 $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ に移って考える. $v \in U_p M$ とし $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ に対して $\tilde{v} \in U_{\tilde{p}} \tilde{M}$ を v のリフトとすれば, 被覆変換 $\varphi \in \Gamma$ が存在して $d(D\varphi(\tilde{v}), \tilde{\phi}^T(\tilde{v})) < \eta$ が成り立つ. 証明のためには \tilde{v} の近くにある \tilde{v}' で T に近い T' に対して $D\varphi(\tilde{v}') = \tilde{\phi}^{T'}(\tilde{v}')$ を満たすもの, すなわち \tilde{v} の近くに φ で不変な \tilde{M} の測地線を見つけられればよい. $S(\tilde{v}, \alpha)$ で \tilde{p} を始点とし始方向が \tilde{v} と角 $< \alpha$ をなす \tilde{M} の半直線全体をつくる頂点 \tilde{p} の扇形とする. 任意の $\alpha > 0$ に対して $\eta > 0$ を小さく T を大きく取れば, $D\varphi(\tilde{v})$ は $S(\tilde{v}, \alpha)$ に含まれる. このとき, \tilde{M} の曲率が上から負定数で押さえられていることから, この扇形は φ によって自身に写されることが分かる. 開凸集合の減少列 $\{D\varphi^n(S(\tilde{v}, \alpha))\}_{n \in \mathbb{N}}$ の共通部分は空集合故, その閉包 $D\varphi^n(\bar{S}(\tilde{v}, \alpha))$ からなる減少列はコンパクトな $\tilde{M} \cup \tilde{M}(\infty)$ で唯一つの点 η からなる共通部分を持ち, η は φ で固定され $\tilde{M}(\infty)$ に属する. 他方, 対称性から逆向きの扇形 $S(-\tilde{\phi}^T \tilde{v}, \alpha)$ は φ^{-1} によって自身に写され, 同様の議論によって φ^{-1} の固定点 $\xi \in \tilde{M}(\infty)$ を

得る. このとき測地線 $\gamma_{\xi\eta}$ は φ -不変で求める測地線を与える.

この閉補題と Poincaré 再帰定理 (命題 2 参照) より次が分かる:

- コンパクト (体積有限) 負曲率 Riemann 多様体 M の測地流の周期点集合は UM において稠密である.
- さらに上の状況で, UM で稠密になるような軌道 $\phi^t v$ が存在する (位相的移換性: topological transitivity).

位相的移換性を示すには, UM の任意の空でない開集合 U, V に対して $T \in \mathbf{R}$ が存在して $\phi^T(U) \cap V \neq \emptyset$ を満たすことが言えれば良いことが分かっている. 測地流の周期点集合の稠密性より周期点 $u \in U, v \in V$ が取れる. 前と同様 M の普遍被覆 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ に移って考える. $\tilde{u} \in \tilde{U} \subset \pi^{-1}(U), \tilde{v} \in \tilde{V} \subset \pi^{-1}(V)$ を u, v のリフトとする (ここで \tilde{U}, \tilde{V} はそれぞれ U, V を均等に被覆する \tilde{u}, \tilde{v} の近傍である). \tilde{M} の測地線 $\gamma_{\tilde{u}}, \gamma_{\tilde{v}}$ に対して (必要なら \tilde{u} の代わりに $\varphi \in \Gamma$ を選んで $D\varphi(\tilde{u})$ を考えれば良いから) $\gamma_{\tilde{u}}(-\infty) \neq \gamma_{\tilde{v}}(\infty)$ ⁵⁷ として良い. $\gamma_u(-\infty)$ と $\gamma_v(\infty)$ を結ぶ測地線 $\tilde{\gamma}$ を考える. すると $t \in \mathbf{R}$ に対して $f(t), g(t) \in \mathbf{R}$ を選んで $d(\dot{\gamma}_{\tilde{u}}(f(t)), \dot{\tilde{\gamma}}(t))$ は $t \rightarrow -\infty$ に応じて指数減少的に 0 に収束し, $d(\dot{\gamma}_{\tilde{v}}(g(t)), \dot{\tilde{\gamma}}(t))$ は $t \rightarrow \infty$ に応じて指数減少的に 0 に収束する. γ_u, γ_v は閉測地線だから, t_1, t_2 と $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$ を選んで $D\varphi_1(\dot{\tilde{\gamma}}(t_1)) \in \tilde{U}, D\varphi_2(\dot{\tilde{\gamma}}(t_2)) \in \tilde{V}$ とできる. これより $T = t_2 - t_1$ とおけば $\phi^T(\tilde{U}) \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ である.

一般に, (X, μ) を (有限) 測度空間, $\psi: X \times \mathbf{R} \rightarrow X$ は $X \times \mathbf{R}$ の積測度 $\mu \times \lambda$ に関して可測な写像であり, $\{\psi^t: X \rightarrow X\}_{t \in \mathbf{R}}$ が X の測度を保つ 1 径数変換群であるとき, (X, μ, ψ) を力学系という (λ は \mathbf{R} の Lebesgue 測度であり, $\psi^t(x) := \psi(x, t)$ とする). 例えば, 完備 Riemann 多様体 M の測地流 ϕ^t は Liouville 測度を持った M の単位接束 UM 上の力学系である. 可測関数 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ はすべての $t \in \mathbf{R}$ に対して $\mu(\{x \in X \mid f(\psi^t(x)) \neq f(x)\}) = 0$ を満たすとき ϕ -不変であるという. 可測集合 $B \subset X$ はその特性関数 χ_B が ψ -不変のとき ψ -不変であるという. さて, 力学系 (X, μ, ψ) はもし任意の ψ -不変可測関数が殆どいたる所定数になるとき (同じことだが, 任意の ψ -不変可測集合が全測度を持つか零集合であるとき) エルゴード的であるという. これはまた次の様にも述べられる.

可測関数 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ に対してその時間平均 f^\pm , 空間平均 \bar{f} を

$$f^+(x) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\psi^t x) dt, \quad f^-(x) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\psi^{-t} x) dt, \quad \bar{f} = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu$$

で定義する. Birkhoff のエルゴード定理によれば, $f \in L^1(X, \mu)$ なら f^\pm, \bar{f} は殆ど至るところ存在して等しい. さらに f^\pm は ψ^t -不変で可積であり

$$\int_X f^+(x) d\mu = \int_X f^-(x) d\mu = \int_X f d\mu$$

を満たす. このとき, 力学系 (X, μ, ψ) がエルゴード的であるためには, 任意の $f \in L^1(X, \mu)$ に対して殆ど至るところ $f^\pm(x) = \bar{f}$ が成り立つことが必要十分である.

⁵⁷ $\gamma_{\tilde{v}}(\infty)(\gamma_{\tilde{u}}(-\infty))$ は半直線 $\gamma_{\tilde{v}}|[0, \infty](\gamma_{\tilde{u}}^{-1}|[0, \infty])$ の定める無限遠点を表す.

次に、コンパクト Riemann 多様体 N 上の滑らかな流れ ψ^t (微分同相写像の 1 径数変換群) は次の条件を満たすとき Anosov 流と呼ばれる (U 系, C 系と呼ばれることもある): ψ^t は固定点を持たず, 分布 $E^s, E^u \subset TN$ と正定数 $C, 0 < \lambda < 1$ で次を満たすものが存在する: 任意の $x \in N$ と各 $t \geq 0$ に対して

1. $T_x N = E^s(x) \oplus E^u(x) \oplus E^o(x)$, ここで $E^o(x) = \mathbf{R}(d/dt|_{t=0}\psi^t x)$ は軌道の接方向の定める $T_x N$ の 1 次元空間.
2. $|D\psi_x^t v_s| \leq C\lambda^t |v_s|$ が任意の $v_s \in E^s(x)$ に対して成立する.
3. $|D\psi_x^{-t} v_u| \leq C\lambda^t |v_u|$ が任意の $v_u \in E^u(x)$ に対して成立する.

Anosov はコンパクト Riemann 多様体 N 上の Anosov 流 ψ^t が N 上の滑らかな測度 μ を不変にするととき, (N, μ, ψ^t) はエルゴード的であることを示した. 負曲率多様体のときと同様にこのときも $x \in N$ を通る安定多様体, 不安定多様体⁵⁸

$$W^s(x) = \{y \in N \mid d(\psi^t x, \psi^t y) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)\}, \quad W^u(x) = \{y \in N \mid d(\psi^t x, \psi^t y) \rightarrow 0 (t \rightarrow -\infty)\}$$

を考える. これらは ψ^t -不変 ($\psi^t(W^s(x)) = W^s(\psi^t x), \psi^t(W^u(x)) = W^u(\psi^t x)$) な N の部分多様体で $T_x W^s(x) = E^s(x), T_x W^u(x) = E^u(x)$ を満たす. $W^o(x) = \{\psi^t x \mid t \in \mathbf{R}\}$ を x 通る ψ^t の軌道とすれば, $x \rightarrow W^s(x), W^u(x), W^o(x)$ は互いに横断的な N の葉層構造 W^s, W^u, W^o で, 全体の次元が $\dim N$ に一致するものを定める. さて f を ψ^t -不変な可測関数とする. 定義より W^o 上殆ど至るところ定数であるが, 殆どすべての $W^s(W^u)$ の葉である安定多様体 (不安定多様体) 上で f は殆ど至るところ定数であることが分かる. したがって f が局所的に殆ど至るところ定数であることを言えばよい. しかし, これを示すのにこれら 3 つの葉層構造に対して Fubini 型の議論を適用しようとする W^s, W^u が一般には微分可能な葉層構造とはならないために困難が生じる. Anosov による証明 ([An1]) は絶対連続性を用いる技術的な面で難しいものであった. [Br] に負曲率多様体の場合に重点を置いたより分かりやすい証明がある.

コンパクト負曲率 Riemann 多様体 M における測地流は UM 上の力学系として Anosov 流であることが分かる. 実際, 断面曲率が $-b^2 \leq K \leq -a^2$ を満たすとする. M の普遍被覆 Riemann 多様体 \tilde{M} を取り, M の測地流を \tilde{M} にリフトして同一視して考える. このとき, $v \in UM$ に対して Anosov 流の定義における E^s, E^u として

$$E^s(v) := T_v(W^{ss}(v)); \quad E^u(v) := T_v(W^{su}(v))$$

と定めれば, 比較定理 (20) より

$$\begin{aligned} \xi \in E^s(v) &\Rightarrow |D\psi^t \xi| \leq (1 + b^2)^{1/2} e^{-at} |\xi|; t \geq 0 \\ \xi \in E^u(v) &\Rightarrow |D\psi^t \xi| \geq (1 + b^2)^{-1/2} e^{at} |\xi|; t \geq 0 \end{aligned}$$

を得る. したがって測地流が Anosov 流であることを用いてエルゴード性定理が示される:

⁵⁸ これらは負曲率多様体の測地流の場合には強安定多様体 $W^{ss}(v)$, 強不安定多様体 $W^{su}(v)$ に対応している.

定理 28. M をコンパクト負曲率 *Riemann* 多様体とする. このとき, M の測地流 ϕ^t は UM の *Liouville* 測度に関してエルゴード的である.

例えば, エルゴード性から M 上の殆どすべての測地線は同じように分布していることが分かる. すなわち M の任意の領域 D に対して, 殆どすべての測地線 γ が D 内に止まる時間は $\text{Vol}D/\text{Vol}M$ に比例する (χ_D を D の特性関数として $f = \chi_D \circ \tau_M$ と取る):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} L(D \cap \gamma([0, T]))/T = \text{Vol}D/\text{Vol}M.$$

実はさらに強く ϕ^t は, Bernoulli 流⁵⁹に同型であることが分かる. 特に, 混合性 (mixing)⁶⁰, 移換性を持つ.

注意 29. (1) コンパクト多様体 M 上の *Anosov* 流は, ベクトル場 X として見たとき C^1 構造安定であるという著しい性質を持つ: すなわち, X' を C^1 位相に関して X に近いベクトル場であるとする, M の同相写像で X の生成する流れの軌道を X' の生成する流れの軌道に写すものが存在する.

(2) コンパクト負曲率 *Riemann* 多様体の測地流の *Anosov* 葉層構造は一般には C^0 級であるが, C^∞ 級ならば強い剛性が成り立つことが分かっている. この仮定の下で測地流はコンパクト階数 1 の負曲率局所対称空間の測地流に共役であり ([*BFL*], [*Kan*]), さらに M はコンパクト階数 1 の負曲率局所対称空間に等長的であることが分かる ([*Bes-Cou-Ga1*], [*Bes-Cou-Ga2*]). これについては §§4.3 の最後の部分も参照されたい. なお, 2次元の場合は *E. Ghys* により示された.

(3) *Klingenberg* はその測地流が *Anosov* 流となるコンパクト *Riemann* 多様体上は「共役点を持たない」, 「任意の閉測地線は指数 θ を持つ」, 「基本群は指数増大度を持つ」, 「基本群の自明でない可換部分群は無限巡回群である」等の性質を満たすことを示した ([*K3*]). また, 共役点を持たない *Riemann* 多様体の測地流が *Anosov* 流になる条件については [*Eb2*] 参照.

(4) [*Ba-Br*] はコンパクト非正曲率 *Riemann* 多様体 M に対して, 測地線 γ で自明でない γ に垂直な平行 *Jacobi* 場を許容しないものが存在すれば, その測地流のエルゴード的であることを示した. 例えば, $v \in U_p M$ が存在し, v を含む $T_p M$ の任意の断面 σ に対して $K_\sigma < 0$ なる場合は満たされる.

注意 30. (1) エルゴード性は必ずしも負曲率多様体や指数的増大度の基本群を持つ多様体に特有の性質ではない. 例えば, S^2 上でエルゴード的測地流を持つ *Riemann* 計量の例が構成されている. しかし, 正曲率 *Riemann* 計量でエルゴード的測地流を持つものがあるかは分かっていない ([*Don*]).

(2) *J. Lohkamp* によれば, どんなコンパクト多様体に対してもその *Riemann* 計量全体の空間の中に測地流がエルゴード的になる *Riemann* 計量の (*Hausdorff* 位相に関して) 稠密な集合が存在する.

4.3 エントロピー

力学系において指数増大度の分散の状況を表すためにエントロピーと呼ばれる概念がある. 実際には幾つかの異なるアプローチから定義される (例えば, 測地流と関連して [*Pa*] を参照されたい).

⁵⁹ (Y, ν) を確率測度空間とし, そのコピーの無限積確率測度空間 $(X, \mu) \prod_{\infty} (Y, \nu)$ に対して, $T(\{y_n\}) = \{y_{n+1}\}$ によって与えられる変換を Bernoulli シフトという.

⁶⁰ 力学系 (X, μ, ψ) は次を満たすとき, 混合性を持つという: 任意の可測集合 $A, B \subset X$ に対して, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\psi^t A \cap B) = \mu(A)\mu(B)/\mu(X)$. 混合性を持てばエルゴード的である.

(1)(体積エントロピー) : M をコンパクト Riemann 多様体, \tilde{M} をその普遍被覆 Riemann 多様体とする. $\text{vol } B_R(p; \tilde{M})$ で, \tilde{M} の半径 R , 中心 p の距離球 $B_R(p; \tilde{M})$ の体積を表すとき

$$h_{\text{vol}}(M) := \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log \text{vol } B_R(p; \tilde{M}) \quad (21)$$

を M の体積エントロピー (あるいは体積増大度) という. 極限は存在し, 点 p のとり方に依らない. しかし $h_{\text{vol}}(M) > 0$ のためには $\pi_1(M)$ が指数増大度を持つことが必要十分であることに注意しよう. 実際, $\pi_1(M)$ の生成系に関して語長 $\leq L$ である元の個数を $\gamma(L)$ とすれば, $\nu(M) := \lim_{L \rightarrow \infty} \log \gamma(L)/L$ は存在して生成系の選び方に依らないが, $h_{\text{vol}}(M) \geq \nu(M)/2d(M)$ が成り立つ. よって $\pi_1(M)$ が指数増大度を持てば, $h_{\text{vol}}(M) > 0$. 逆も同様に示せる.

(2)(位相エントロピー) : (X, d) をコンパクト距離空間, $\phi^t : X \rightarrow X$ を同相写像の流れとして位相エントロピーを定義する. まず $T > 0$ に対して距離の増加列 d_T^ϕ を $d_T^\phi(x, y) := \max_{0 \leq t \leq T} d(\phi^t(x), \phi^t(y))$ で定義する. $N_T(\epsilon)$ を半径 $\epsilon (> 0)$ の d_T^ϕ に関する距離球で X を覆う際に必要な最小の個数として

$$h_{\text{top}}(X, \phi^t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log N_T(\epsilon) \quad (22)$$

を ϕ の距離エントロピーという. これは距離 d のとり方に依らずに定まり, 同相写像に関する共役類の不変量である. (X, ϕ^t) がコンパクト多様体の同相写像の流れの場合, Y. Yomdin による次の評価がある : X に Riemann 計量 g を入れる. $Y \subset X$ を k 次元部分多様体とすると, g からの誘導計量に関する Y の k 次元体積を $\text{vol}_k(Y)$ で表す.

$$\sigma_Y := \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \text{vol}_k(\phi^t(Y))$$

とおくと, これは Riemann 計量 g のとり方に依らず, $h_{\text{top}}(X, \phi^t) \geq \sigma_Y$ を満たす.

(3)(測度エントロピー) : (X, d) を Borel 確率測度 μ を持ったコンパクト距離空間, $\phi^t : X \rightarrow X$ を μ を保つ同相写像の流れとする. (2) と同様に, $N_T(\epsilon, \delta)$ で, 測度 $\geq 1 - \delta$ のある (X の) 部分集合を覆うに必要な d_T^ϕ に関する ϵ -距離球の最小個数を表す. このとき

$$h_{\text{meas}}(X, \phi^t) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log N_T(\epsilon, \delta) \quad (23)$$

を ϕ^t の測度エントロピーという. (X, ϕ^t) がエルゴード的である場合には $0 < \delta < 1$ に対して

$$h_{\text{meas}}(X, \phi^t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log N_T(\epsilon, \delta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log N_T(\epsilon, \delta)$$

が成り立つ. 一般に, $h_{\text{top}}(X, \phi) \geq h_{\text{meas}}(X, \phi)$ である⁶¹.

以下, コンパクト Riemann 多様体 (M, g) の測地流 (これは UM 上 Liouville 測度を保つ力学系であった) のエントロピー $h_{\text{vol}}(g), h_{\text{top}}(g), h_{\text{Liouville}}(g) (= h_{\text{meas}}(UM, \phi_g^t))$ を考える. 位相エントロピーについては次のきれいな特徴付けがある ([Pa-Pa], [Mane]).

⁶¹ $h_{\text{top}}(X, \phi) = \sup h_{\text{meas}}(X, \phi)$ が成り立つ. ここで \sup はすべての ϕ 不変な Borel 確率測度全体にわたってとる (変分原理). なお, 測度エントロピーの定義は Kolmogorov に始まるが, ここで述べた Katok によるものとは形が異なる.

- §3.3 で任意の $p, q \in M$ に対して $p, q \in M$ を結ぶ測地線が常に無限個あることを述べた。 $CF(L|_{p,q})$ を $p, q \in M$ を結ぶ長さ $\leq L$ の測地線の個数とするとき次が成り立つ：

$$h_{top}(g) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{M \times M} \log CF(L|_{p,q}) d\nu(p) d\nu(q).$$

- 3つのエントロピーは M^n が階数 1 の局所対称空間の場合は一致し、 $h(M) := n + k - 2$ に等しい。ここで $\tilde{M}^n = HP_K^n$ のとき $k = \dim_{\mathbf{R}} K$ である。

位相エントロピーと体積エントロピーの関係については次の A. Manning による結果がある ([Man]):

- コンパクト Riemann 多様体 (M, g) の測地流に対して、 $h_{top}(g) \geq h_{vol}(g)$ 。もし、 (M, g) の断面曲率が非正であれば等号が成り立つ。

これより、コンパクト負曲率 Riemann 多様体の位相エントロピーは正になる。位相エントロピーが常に正になる多様体の位相に関する必要条件として次がある：

- M がコンパクト有理双曲的多様体⁶²ならば、その上の任意の Riemann 計量 g に対して $h_{top}(g) > 0$ である。言い換えれば、 $h_{top}(g) = 0$ となる計量 g があれば M は有理楕円的である (詳しいことは [Pa] を参照されたい)。

コンパクト Riemann 多様体 M の測地流は Anosov 流であり、閉測地線の接ベクトルは UM で稠密であった。閉測地線の数え上げ関数とエントロピーの関連については次が成り立つ ([Mar]):

- M をコンパクト負曲率 Riemann 多様体とする。このとき

$$h_{top}(g) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\log CF(L)}{L}.$$

注意 31. この関係式は $CF(L) \sim \frac{hL}{e^{hL}}$ の形に書くことができる。その証明が大部の本 ([Ka-Has]) の最後にある。また、コンパクト負曲率多様体のホモロジー類における閉測地線の数え上げ関数の同様の評価が与えられている ([Ad-Su], [Katsu-Su1])。なお、これらは測地流 (Anosov 流) より一般の (位相的弱混合的な) 公理 A 流の周期点の個数評価の場合に拡張された ([Par-Pol], [Katsu-Su2])。誤差項の評価、素数の密度定理、ゼータ関数との関連については [Su], [Pol] を参照されたい。

与えられた多様体上エントロピーの言葉で標準的な Riemann 計量の特徴づけることができる場合がある。以下このような剛性定理について簡単に触れる。

- M を閉曲面とし、 g_0 は M 上の負定曲率の Riemann 計量で $\text{Area}(M, g_0) = 1$ をみたすとする。 $g = f^2 g_0$ ($f > 0$) を g_0 に共形的な同じ面積を持つ Riemann 計量とする (すなわち、 $\int_M f^2 d\nu_{g_0} = 1$)。このとき Katok は次を示した ([Ka3]):

$$h_{Liouville}(g) \leq \rho h_{top}(g_0) \leq \rho^{-1} h_{top}(g_0) \leq h_{top}(g) \quad (\rho := \int_M f d\nu_{g_0} \leq 1).$$

⁶² n 次元コンパクト多様体はそのホモトピー群 $\pi_i(M)$ がすべての $i > 2n - 1$ に対して有限であるか、あるいは $\sum_{j \leq i} \dim \pi_j(M) \otimes \mathbf{Q}$ が i に関して指数的に増大するかのいずれかの性質を満たす。前者 (後者) の場合 M は有理楕円的 (有理双曲的) であるという。

一意化定理から、種数 > 1 の閉曲面に対しては (面積 1 に正規化された) Riemann 計量 g の位相エントロピー $h_{top}(g) \geq 1 = h_{top}(g_0)$ で等号成立は g が定曲率のときであることが分かる (g の測度エントロピーについては逆向きの不等式が成り立つ). Katok は一般次元の場合もモデルを階数 1 の局所対称空間として同様の結果を予想した.

このような階数 1 の局所対称空間の剛性に関して、体積エントロピーを用いた Besson-Courtois-Gallot による次の著しい結果がある ([Bes-Cou-Ga1], [Bes-Cou-Ga2], [Pan2]) :

- M をコンパクト多様体とし、その上の Riemann 計量はその体積が 1 となるように正規化する. M が負曲率局所対称 Riemann 計量 g_0 を許容すれば、 M の任意の (正規化された) Riemann 計量 g に対して $h_{top}(g) \geq h_{vol}(g) \geq h_{vol}(g_0) = h_{top}(g_0)$ が成り立つ. $\dim M \geq 3$ で等号が成立すれば g は g_0 に等長的である. $\dim M = 2$ で等号が成立すれば、 g は負定曲率である.

この定理は多くの応用を持ち、例えば Mostow 剛性定理の簡単な証明を与える ([Ize] 参照) が、測地線に関連した応用を挙げる. Riemann 多様体 $(M, g), (N, h)$ のそれぞれの測地流 ϕ_g^t, ϕ_h^t と可換になるような可微分写像 $F : UM \rightarrow UN$ が存在するとき、 ϕ_g^t, ϕ_h^t は共役であるという. 以下の応用で M はコンパクト多様体とし、その上の Riemann 計量はその体積が 1 となるように正規化する.

- M が負曲率局所対称 Riemann 計量 g_0 を許容したとする. このとき (M, g_0) に共役な測地流を持つ M 上の Riemann 計量 (M, g) は (M, g_0) に等長的である ($\dim M = 2$ のときは C. Croke, J.-P. Otal による).
- M が負曲率局所対称 Riemann 計量 g_0 を許容したとする. このとき M 上の負曲率 Riemann 計量 g に対して

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \log CF(L)_g / L \geq \limsup_{L \rightarrow \infty} \log CF(L)_{g_0} / L$$

が成り立ち、等号が成立すれば (M, g) は (M, g_0) に等長的である.

測度エントロピーの評価については Ballmann-Wojtłowski による次の結果がある ([Ba-Wo]) :

- (M, g) をコンパクト非正曲率 Riemann 多様体とする. その測度エントロピーに対して

$$h_{Liouville}(g) \geq \int_{UM} \text{tr}(\sqrt{-R_v}) dv \quad (v \in UM; R_v : u \rightarrow R(v, u)v)$$

で、等号成立は (M, g) が局所対称空間の場合に限る (Finsler 計量への拡張については [Fou]).

注意 32. n 次元コンパクト多様体 M のエントロピーと Gromov による最小体積 (*minimal volume*) $\text{minvol}(M)$, 単体的体積 (*simplicial volume*) $\|M\|$ の関連については次が知られている ([Pa] 参照) :

$$h_{top}^V(M) := \inf_{g; \text{vol}(M, g)=1} h_{top}(g); \quad h_{vol}^V(M) := \inf_{g; \text{vol}(M, g)=1} h_{vol}(g); \quad C_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma((n+1)/2)}$$

とおくとき次が成り立つ :

$$\frac{1}{C_n n!} \|M\| \leq [h_{vol}^V(M)]^n \leq [h_{top}^V(M)]^n \leq \text{minvol}(M).$$

2.6 その他の話題

測地線或いは測地流の情報から元の計量に関する情報が得られるか?という逆問題がある. Riemann 多様体 M 上の測地線がすべて同じ長さ l の閉測地線であるとき, M を C_l 多様体と呼ぶ. Hilbert の学生 O.Zoll が回転面でこの様な例を構成したことに端を発し, 球面 S^2 ではこの様な計量は多く構成されていた. 他方, S^n の対蹠点を同一視して得られる実射影空間 RP^n では事情がまったく異なり, その上の SC_π -計量 (閉測地線が単純である C_l -計量) は標準的な定曲率 1 の計量に限るであろうと予想されていた. これはまた, 球面に対する Blaschke 予想⁶³ 「 $i(S^n, g) = d(S^n, g) = \pi$ ならば g は定曲率 1 の標準的な計量である」と同値になる. 球面上の Blaschke 計量は $SC_{2\pi}$ -計量だが, さらに任意の点 p を始点とするどの測地線も長さ π で定点 \bar{p} を通るので再会多様体とも呼ばれる. Berger は球面に対する Blaschke 予想は正しい. 特に, 実射影空間 RP^n の上の SC_π -計量は標準的な定曲率 1 の計量に限ることを示した⁶⁴. これ等については [Be] を参照されたい.

この本の出版後, 注意 17 で述べた Gromoll-Grove の結果, 無限小 Blaschke 予想に関する C. Tsukamoto の研究 [Tsu], C_l -計量の構成についての K. Kiyohara の貢献 [Ki], C. Lebrun-L. Ma-son による複素曲面への応用 [Le-Ma] 等の仕事がある.

Riemann 多様体 $(M, g), (N, h)$ のそれぞれの測地流 ϕ_g^t, ϕ_h^t が共役であるとき, $(M, g), (N, h)$ の関係 (例えば, 等長的か) を問う問題がある (これについては Besson-Courtois-Gallot の定理以外に, [B3] §§10.11 の解説を参照されたい). また, 長さスペクトル (閉測地線の長さの集合) やマーク付長さスペクトル (その長さがどの自由ホモトピー類に属する閉測地線からきているかマークがついた長さスペクトル) が Riemann 計量をどの程度定めるかという問題がある ([Eb-Ha-Schr], [Pan1]).

閉測地線の長さや他の計量不変量に関する種々の幾何学的な不等式がある. 最も重要なものは等縮不等式 (isosystolic inequality) であると思われるが, Gromov[G4] の後の発展については [Kat] を参照されたい.

参考文献

- [Ab] R. Abraham, Bumpy metrics, Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. XIV, Amer. Math. Soc., 1-3(1970).
- [Abr-Mey] U. Abresch and W. Meyer, Pinching below 1/4, injectivity radius, and conjugate radius, J. Diff. Geom. **40**(1994), 643-691.
- [Ad-Su] T. Adachi and T. Sunada, Homology of closed geodesics in a negatively curved manifolds, J. Diff. Geom. **26**(1987), 81-99.
- [Al] S. I. Alber, The topology of functional manifolds and the calculus of variations in the large, Russ. Math. Surveys **25**, 51-117(1970).

⁶³一般に, $d(M) = i_M$ を満たす Riemann 多様体を Blaschke 多様体という. Blaschke 多様体は標準的な計量を持つ階数 1 のコンパクト対称空間のいずれかに等長的かという問題があり, 未解決であるが H. Sato 等の研究がある.

⁶⁴Finsler 計量に関してはこの結果は成り立たない ([Sko]).

- [An1] D. V. Anosov, Geodesic flows on closed manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Inst. Math. **90**(1967).
- [An2] D. V. Anosov, Certain homotopies in the space of closed curves, Math. USSR Izv. **17**(1982), 423–453.
- [An3] D. V. Anosov, Some homologies in the space of closed curves in the n -dimensional sphere, Math. USSR Izv. **18**(1982), 433–422.
- [An4] D. V. Anosov, Generic properties of closed geodesics, Math. USSR-Izv. **21**(1983), 1–29.
- [Ar] V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classic Mechanics, Springer Graduate Texts in Math. **60**(1996); Corrected print of the second edition (1989).
- [Ar-Av] V. I. Arnold and A. Avez, Ergodic problems of classical mechanics, W. A. Benjamin, 1968.
- [Ba1] W. Ballmann, Der Satz von Lusternik und Schnirelmann, Bonner Math. Schriften **102** (1978) , 1–25.
- [Ba2] W. Ballmann, Doppelpunktfreie geschlossene Geodätische auf kompakten Flächen, Math. Z. **161**(1978), 41–46.
- [Ba3] W. Ballmann, On the lengths of closed geodesics on convex surfaces, Invent. math. **71**(1983), 593–597.
- [Ba4] W. Ballmann, Geschlossene Geodätische auf Mannigfaltigkeiten mit unendlicher Fundamentalgruppe, Topology **25**(1986), 55–69.
- [Ba5] W. Ballmann, Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature, DMV Seminar **25**, Birkhäuser, 1995.
- [Ba-Br] W. Ballmann, and M. Brin, On the ergodicity of geodesic flow, Ergod. Th. Dynam. Syst. **2**(1982), 311–315.
- [Ba-Th-Zi1] W. Ballmann, G. Thorbergsson and W. Ziller, Closed geodesics and the fundamental groups, Duke Math. J. **48**(1981), 585–588.
- [Ba-Th-Zi2] W. Ballmann, G. Thorbergsson, and W. Ziller, Closed geodesics on positively curved manifolds, Ann. of Math. **116**(1982), 213–247.
- [Ba-Th-Zi3] W. Ballmann, G. Thorbergsson, and W. Ziller, Existence of closed geodesics on positively curved manifolds, J. Diff. Geom. **18**(1983), 221–252.
- [Ba-Th-Zi4] W. Ballmann, G. Thorbergsson, and W. Ziller, Some existence theorem of closed geodesics, Comment. Math. Helv. **58**(1983), 416–432.

- [Ba-Wo] W. Ballmann, and M. P. Wojtkowski, An estimate for measure theoretic entropy of geodesic flows, *Erg. Th. Dynam. Sys.* **9** (1989), 271–279.
- [Ba-Zi] W. Ballmann, and W. Ziller, On the number of closed geodesics on a compact Riemannian manifold, *Duke Math. J.* **49**(1982), 629–632.
- [Ban1] V. Bangert, Closed geodesics on complete surfaces, *Math. Ann.* **251**(1980), 83–96.
- [Ban2] V. Bangert, Geodätische Linien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, *Jber. d. Dt. Math.-Verein.*, **87**(1985), 39–66.
- [Ban3] V. Bangert, On the existence of closed geodesics on two-spheres, *Internat. J. Math.* **4**(1993), 1–10.
- [Ban-Hi] V. Bangert and N. Hingston, Closed geodesics on manifolds with infinite abelian fundamental group, *J. Diff. Geom.* **19**(1984), 277–282.
- [Ban-Lo] V. Bangert and Y. Long, The existence of two closed geodesics on every Finsler 2-spheres, *Math. Ann.* **346**(2010), 335–366.
- [BFL] Y. Benoist, P. Foulion, and F. Labourie, Flots d’Anosov à distributions stable et instable différentiables, *J. Amer. Math. Soc.* **5**(1992), 33–74.
- [B1] M. Berger, *Lectures on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1965.
- [B2] M. Berger, *Riemannian geometry during the second half of the twentieth century*, Univ. lect. ser. **17**, Amer. Math. Soc., 2000.
- [B3] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, 2003.
- [B4] M. Berger, *Geometry Revealed- A Jacob’s Ladder to Modern Higher Geometry*, Springer, 2010.
- [Be] A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer, 1978.
- [Bes-Cou-Ga1] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative, *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), 731–799.
- [Bes-Cou-Ga2] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, Minimal entropy and Mostow’s rigidity theorems, *Erg. Th. Dynam. Sys.* **16** (1996), 623–649.
- [Bi] G. Birkhoff, *Dynamical System*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. IX, Amer. Math. Soc., 1927.
- [Bo1] R. Bott, On the iteration of closed geodesics and the Sturum intersection theory, *Comm. Pure Appl. Math.* **9**(1956), 171–206.

- [Bo2] R. Bott, Lectures on Morse theory, Old and New, *Bull. of Amer. Math. Soc.* **7**(1982), 331–358.
- [Br] M. Brin, Ergodicity of geodesic flows, an appendix to [Ba5].
- [Buc1] M. Buchner, Simplicial structure of the real analytic cut locus, *Proc. Amer. Math. Soc.* **64**(1977), 118–121.
- [Buc2] M. Buchner, Stability of the cut locus in dimension less than or equal to 6, *Invent. Math.* **43**(1977), 199–231.
- [Bu] H. Busemann, *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, New York, 1955.
- [Ca-Cao] E. Calabi and J. Cao, Simple closed geodesics on convex surfaces, *J. Diff. Geom.* **36**(1992), 517–549.
- [Ch1] J. Cheeger, Pinching theorems for a certain class of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* **91**(1969), 807–834.
- [Ch2] J. Cheeger, Critical points of distance functions and applications to geometry, in *Geometric Topology*, Lecture Notes in Math. **1504**(1991), Springer-Verlag, New York, 1–33.
- [Ch-Eb] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [Ch-Gr] J. Cheeger and D. Gromoll, On the lower bound for the injectivity radius of $1/4$ -pinched manifolds, *J. Diff. Geom.* **15**(1980), 437–442.
- [Cr1] C. B. Croke, Area and the length of the shortest closed geodesic, *J. Diff. Geom.* **27**(1988), 1–21.
- [Cr2] C. B. Croke, Poincaré’s problem and the length of the shortest closed geodesic on a convex hypersurfaces, *J. Diff. Geom.* **17**(1982), 595–634.
- [Di-Ver] F. J. E. Dillen and L. C. A. Verstraelen (eds.), *Handbook of differential geometry*, Vol. I (2000), Vol. II (2006), North-Holland, Amsterdam.
- [Don] V. Donnay, Geodesic flows on the two-sphere II ergodicity, *L.N.M.* **1342**(1988), 112–153.
- [Eb1] P. Eberlein, Geodesic flows on negatively curved manifolds I, *Ann. of Math.* **95**(1972), 492–510; II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **178**(1973), 57–82.
- [Eb2] P. Eberlein, When is a geodesic flow of Anosov type?, I,II, *J. Diff. Geom.* **8**(1973), 437–463, 565–577.
- [Eb-Ha-Schr] P. Eberlein, U. Hamenstädt, and V. Schroeder, Manifolds of nonpositive curvature, *Proc. Symp. Pure Math.* **54-3**(1990), Amer. Math. Soc. , 179–227.

- [Fou] P. Foulon, Locally symmetric Finsler spaces in negative curvature, C. R. Acad. Sci. Paris **324**(1997), 1127–1132.
- [Fr] J. Franks, Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms, Invent. Math. **108**(1992), 403–418.
- [F] K. Fukaya, Metric Riemannian Geometry in [Di-Ver] Vol. II (2006), 189–313.
- [Ga-H-La] S. Gallot, D. Hullin, and J.L. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Gau] C. F. Gauss, Allgemeine Flächentheorie, 1827(Werke IV).
- [Gl-Si] H. Gluck and D. Singer, Scattering of geodesic fields I, Ann. of Math. (2)**108**(1978), 347-372 ; II *ibid.* **110**(1979- 205–225.
- [Gra] M. A. Grayson, Shortening embedded curves, Ann. Math.**129**, 71–111(1989).
- [Gr-K-Mey] D. Gromoll, W. Klingenberg, and W. Meyer, Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Math **55**, Springer-Verlag, New York, 1968.
- [Gr-Mey1] D. Gromoll and W. Meyer, On differentiable functions with isolated critical points, Topology **8**(1969), 361–369.
- [Gr-Mey2] D. Gromoll and W. Meyer, Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. **3**(1969), 493–510.
- [Gr-Gro] D. Gromoll and K. Grove, On metrics on S^2 all of whose geodesics are closed, Invent. Math. **65**(1981), 175–177.
- [G1] M. Gromov, Homotopical effects of dilatations, J. Diff. Geom. **13**(1978), 303–310.
- [G2] M. Gromov, Hyperbolic manifolds, groups and actions, 183–213, in *Riemann Surfaces and Related Topics*, Ann. of Math. Stud.**97**, Princeton, 1981.
- [G3] M. Gromov, Curvature, diameter and Betti numbers, Comment. Math. Helv. **56**(1981), 179–195.
- [G4] M. Gromov, Filling Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. **18**(1983), 1–147.
- [Gro] K. Grove, Critical point theory for distance functions, Proc. Symp. Pure Math. **54-3**(1990), Amer. Math. Soc. , 357–385.
- [Gro-Pe] K. Grove and P. Petersen (editors), Comparison Geometry. MSRI Publ. **30**, 1997
- [Gro-Shi] K. Grove and K. Shiohama, A generalized sphere theorem, Ann. Math, **106**(1977), 201–211.

- [Gry] A. I. Gryuntal', Existence of convex spherical metrics for which all closed geodesics without self-intersection are hyperbolic, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43**, 3–18(1979).
- [Had] J. Hadamard, Les surfaces à courbure opposées et leurs lignes géodésiques, *J. Math. Pures Appl.* **4**(1898), 27–73.
- [Hass-Mor] J. Hass and F. Morgan, Geodesics and soap bubbles in surfaces, *Math. Z.* **223**(1996), 185–196.
- [He] G. Hedlund, The dynamics of geodesic flows, *Bull. Amer. math. Soc.* **45**(1939), 241–260.
- [H] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7th ed., Leipzig, 1930.
- [Hi1] N. Hingston, Equivariant Morse theory and closed geodesics, *J. Diff. Geom.* **19**(1984), 85–116.
- [Hi2] N. Hingston, On the growth of the number of closed geodesics on the two-sphere, *Intern. Math. Res. Notices* **9**(1993), 253–262.
- [Hi3] N. Hingston, On the length of closed geodesics on a two-sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.* **125**(1997), 3099–3106.
- [Hop1] E. Hopf, Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung *Berichte. Verh. Sächs Akad. Wiss. Leipzig* **91**(1939), 261–304.
- [Hop2] E. Hopf, Statistik der Lösungen geodätischer Probleme Linier vom unstabilen Typus. II, *Math. Ann.* **117**(1940), 590–608.
- [Ho-Ri] H. Hopf, and W. Rinow, Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen, *Comment. Math. Helv.* **3**(1931), 209–225.
- [It-Ki1] J. Itoh and K. Kiyohara, The cut loci and the conjugate loci on ellipsoids, *Manuscripta Math.* **114**(2004), 247–264.
- [It-Ki2] J. Itoh and K. Kiyohara, The cut loci on ellipsoids and certain Liouville manifolds, *Asian Math. J.* **14**(2010), 257–289.
- [It-Ta1] J. Itoh and M. Tanaka, The dimension of a cut locus on a smooth Riemannian manifold, *Tohoku Math. J.* **50**(1998), 571–575.
- [It-Ta2] J. Itoh and M. Tanaka, The Lipschitz continuity of the distance function to the cut locus, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353**(2001), 21–40.
- [Ize] 井関裕靖, G. Besson, G. Courtois and S. Gallot による Mostow の剛性定理の新証明, *数学* **49**(1997), 岩波, 200–211.

- [J] C. G. J. Jacobi, Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdig analytischen Substitution, *Crelles J.* **19**(1839), 309–313. Die kürzeste Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoi. Achtundzwanzigste Vorlesung. Vorlesung über Dynamik. gehalten an der Universität zu Königsberg im Wintersemester 1842–1843. Hrsg. A. Clebsch. Berlin: Reimer 1866.
- [Kan] M. Kanai, Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations, *Erg. Th. Dynam. Sys.* **8**(1988), 215–240.
- [Kar] H. Karcher: *Riemannian Comparison Constructions* (S. S. Chern ed., *Global Differential Geometry; Studies in Math.* **27**, 170–222), The Mathematical Association of America, 1989.
- [Kas] 加須栄篤：リーマン幾何学 (数学レクチャーノート基礎編 2)，培風館，2001.
- [Ka1] A. Katok, Ergodic properties of degenerate integrable Hamiltonian systems, *Math. USSR Izv.* **7**(1973), 535–571.
- [Ka2] A. Katok, Entropy and closed geodesics, *Erg. Th. Dynam. Sys.* **2**(1982), 339–367.
- [Ka3] A. Katok, Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics, *Erg. Th. Dynam. Sys.* **8***(1988), 139–152.
- [Ka-Has] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [Katsu-Su1] A. Katsuda and T. Sunada, Homology and closed geodesics in a compact Riemann surfaces, *Amer. J. Math.* **110**(1988), 145–155.
- [Katsu-Su2] A. Katsuda and T. Sunada, Closed orbits in homology classes, *I. H. E. S. Publ. Math.* **71**(1990), 5–32.
- [Kat] M. G. Katz, *Geometry and topology of loops, systoles, and volume*, *Math. Surveys Mono.* **137**, Amer. Math. Soc., 2007.
- [Ki] K. Kiyohara, Two classes of Riemannian manifolds whose geodesic flows are integrable, *Mem. Amer. Math. Soc.* **130/619**(1997).
- [K1] W. Klingenberg, *Lectures on Closed Geodesics*, *Grundlehren Math. Wiss.* **230**, Springer, 1978.
- [K2] W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*(2nd edition), Walter de Gruyter, 1995.
- [K3] W. Klingenberg, Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type, *Ann. Math.* **99**(1974), 1–13.

- [K-T] W. Klingenberg and W. Takens, Generic properties of geodesic flows, *Math. Ann.* **197**(1972), 323–334.
- [K-Sa] W. Klingenberg and T. Sakai, Injectivity estimate for $1/4$ -pinched manifolds, *Archiv Math.* **34**(1980), 371–376.
- [Ko] S. Kobayashi, On conjugate and cut loci, in *Global Differential Geometry*, MAA-Studies in Math. **27**(1989), 140–169.
- [Ko] 小林昭七, ユークリッド幾何から現代幾何へ, 日本評論社, 1990.
- [Le-Ma] C. Lebrun and L. Mason, Zoll manifolds and complex surfaces, *J. Diff. Geom.* **61**(2002), 453–535.
- [Lo] V. Long, Multiplicity and stability of closed geodesics on Finsler 2-spheres, *J. Eur. Math. Soc.* **8**(2006), 341–353.
- [Lo-Hu] V. Long and D. Huagi, Multiple closed geodesics on 3-spheres, *Adv. Soc.* **221**(2009), 1757–1803.
- [Lu-Sch] L. Lusternik-L. Schnirelmann, Sur le problème de trois géodesiques fermées sur les surfaces de genre 0, *C. R. Acad. Sci. Paris* **189**(1929), 269–271.
- [Lyu] L. Lyusternik, *The Topology of the Calculus of Variations in the Large*, Transl. of Math. Monographs **16**, Amer. Math. Soc., 1966.
- [Man] H. v. Mangoldt, Über diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein, *J. reine angew. Math.* **91**(1881), 23–52.
- [Mané] A. Mané, On the topological entropy of geodesic flows, *J. Diff. Geo.* **44**(1997), 74–93.
- [Man] A. Manning, Topological entropy for geodesic flows, *Ann. Math.* **110**(1979), 567–576.
- [Mar] G. A. Margulis, On some applications of ergodic theory to the study of manifolds of negative curvature, *Func. Anal. Appl.* **3**(1969), 335–336.
- [Mi] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Math. Studies **51**, Princeton, 1963.
- [Mo1] M. Morse, A one-to-one representation of geodesics on a surface of negative curvature, *Amer. J. Math.* **43**(1921), 33–51.
- [Mo2] M. Morse, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* **22**(1921), 84–100.

- [Mo3] M. Morse, The Calculus of Variations in the Large, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.**18**, Amer. Math. Soc., 1934.
- [Mos] J. Moser, in [K1](Lectures on Closed Geodesics, Grundlehren Math. Wiss. **230**, Springer, 1978).
- [My1] S. B. Myers, Riemannian manifolds in the large, Duke Math. J.**1**(1935), 39–49.
- [My2] S. B. Myers, Connections between differential geometry and topology, I : Duke Math. J. **1**(1935), 376-391; II *ibid.* **2**(1936), 95-102.
- [Na] A. Nabutovsky, Fundamental groups and contractible closed geodesics, Comm. Pure Appl. Math.**17**(1996), 1257–1270.
- [Ne] W. D. Neumann, Generalization of the Poincaré Birkhoff fixed point theorem, Bul. Austral. Math. Soc.**17**(1977), 375–389.
- [Pan1] P. Pansu, Le flot géodésique des variétés riemanniennes à courbure négative, Astérisque (1991), no. 201–203, Exp. No. 738, 269–298(1992).
- [Pan2] P. Pansu, Volume, courbure et entropie [d’après G. Besson, G. Courtois et S. Gallot], Astérisque, no. 245, 83–103 (1997).
- [Par-Pol] W. Parry and M. Pollicot, An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows, Ann. Math. **118**(1983), 573–591.
- [Pa] G. P. Paternain, Geodesic Flows, Progres in Math. **180**, Birkhäuser, 1999.
- [Pa-Pa] G. P. Paternain and M. Paternain, Topological entropy versus geodesic entropies, Internat. J. Math. **5**(1994), 346–366.
- [Po] H. Poincaré, Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, Trans. Am.Math. Soc., **17**, 247–274 (1905).
- [Pol] M. Pollicot, Periodic orbits and zeta functions, in *Handbook of Dynamical Systems*, vol. 1A (edited by B. Hasselblatt and A. Katok), Elsevier Sci., 409–452(2002) .
- [Ra1] H.-B. Rademacher, On the average indices of closed geodesics, J. Diff. Geo. **29**(1989), 65–83.
- [Ra2] H.-B. Rademacher, On a generic property of geodesic flows, Math. Ann. **298**(1994), 101–116.
- [R] G. F. B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationsschrift, 1854 (Gesammelte mathematische Werke, Springer, 1990, pp.272–287).
- [Sa1] 酒井 隆, 測地線の指数定理, 数学 **29**(1977), 岩波, 14-27.

- [Sa2] T. Sakai, On the structure of cut loci in compact Riemannian symmetric spaces, *Math. Ann.* **235**(1978), 129–148.
- [Sa3] T. Sakai, Cut loci of Berger’s sphere, *Hokkaido Math. J.* **10-1**(1981), 143–155.
- [Sa4] 酒井 隆, リーマン幾何学, 裳華房 1992.
- [S] 佐々木重夫, 微分幾何学—大域的考察を中心に—, 至文堂, 1957.
- [Sei-Thr] H. Seifert and W. Threlfall, *Variationsrechnung im Grossen*, Teubner, 1938.
- [Se] J.-P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés, *Ann. of Math.* **54**(1951), 425–505,
- [Shi] K. Shiohama, Sphere theorems in [Di-Ver] Vol. I (2000), 865–903.
- [Shi-Ta] K. Shiohama and M. Tanaka, Cut loci and distance spheres on Alexandrov surfaces, in A. Besse (ed.), *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle*(1996), Soc. Math. France, 531–559.
- [Shi-Shio-Ta] K. Shiohama, T. Shioya, and M. Tanaka, *The Geometry of Total Curvature on Complete Open Surfaces*, Cambridge Tracts in Math. **159** (2003), Cambridge Univ. Press.
- [Si] Ya. G. Sinai(Ed.), *Dynamical Systems II*, EMS2, Springer, 1989.
- [Shio] 塩谷 隆, 重点解説基礎微分幾何, サイエンス社, 2009.
- [Sko] L. A. Skormyakov, Metrization of the projective plane in connection with a given systems of curves (Russian), *Izvest.Akad. Nauk. S.S.S.R., ser. Math.* **19**(1955), 471–482.
- [Su] T. Sunada, Geodesic flows and and geodesic random walks, in *Geometry of Geodesics and Related Topics*, Advanced Studies in Pure Math. **2**(1982), 47–86.
- [Sz] Z. I. Szabó, Hilbert’s fourth prolem I, *Adv. in Math.* **59**, 185–301,
- [Tai1] I. A. Taimanov, Closed geodesics on non-simply-connected manifolds, *Russian Math. Surveys* **40**(1985), 143–144.
- [Tai2] I. A. Taimanov, Closed extremals on two-dimensional manifolds, *Russian Math. Surveys* **47**(1992), 163–211.
- [Tai3] I. A. Taimanov, The type numbers of closed geodesics, an appendix to the Russian edition of [Mo1].
- [Tak] M. Takeuchi, On conjugate and cut loci of compact symmetric spaces I, *Tsukuba Math. J.* **2**(1978), 35–68 ; II *ibid.* **3**(1979), 1–29.

- [Ta1] M. Tanaka, On the number of closed geodesics and isometry-invariant geodesics, in *Geometry of Geodesics and Related Topics*, Advanced Studies in Pure Math. **2**(1982), 1–28.
- [Ta2] M. Tanaka, Closed geodesics on compact Riemannian manifolds with infinite fundamental groups, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. **20**(1985), 1–12.
- [Ta3] M. Tanaka, On the cut locus of a von Mangoldt’s surface of revolution, J. Math. Soc. Japan **44**(1992), 631–641.
- [Tsu] C. Tsukamoto, Infinitesimal Blaschke conjecture on projective spaces, Ann. Sci. École Norm. Sup. **14**(1981), 339–356.
- [Wa] C. T. C. Wall, Geometric properties of generic differentiable manifolds, in Geometry and topology, Lecture Notes in Math. **597**, Springer, 1977, 707–774.
- [War] F. W. Warner, Conjugate loci of constant order, Ann. of Math. (2) **86**(1967), 192–212.
- [We1] A. Weinstein, The cut locus and conjugate locus of a Riemannian manifold, Ann. of Math. (2) **87**(1968), 29–41.
- [We2] A. Weinstein, The generic conjugate locus, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math. Vol. XV, Berkeley, 1968), Amer. Math. Soc., 1970, 299–301.
- [We3] A. Weinstein, Sur la non-densité des géodésiques fermées, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B **108**(1970), A504.
- [We4] A. Weinstein, On the volume of manifold all of whose geodesics are closed, J. Differential Geom. **9**(1974), 513–517.
- [Wh] J.H.C.Whitehead, On the covering of a complete space by the geodesics through a point, Ann. of Math. (2) **36**(1935), 679–704.
- [Wol] F.E.Wolter, Distance function and cut loci on a complete Riemannian manifold, Arch. der Math. (Basel) **32**(1979), 92–96.
- [Zi] W. Ziller, Geometry of the Katok’s examples, Erg. Th. Dynam. Sys. **3**(1982), 135–157.

文献についての注意

文献は完全なものではなく、重要なものが抜けていることをご容赦されたい。まず M. Berger による Riemann 幾何一般に関する解説 ([B2],[B3],[B4]) は測地線についても大変詳しい。非常に多くの結果・文献が挙げられ、アイデアや歴史的側面についても述べられている。読みやすいが証明は省かれているので、きちんと理解しようとするとなげられた文献を見る必要がある。Klingenberg[K2] も測地線に関して詳しく、証明も殆どの主張に付けられているが読むのに辛抱がいる。

総合報告としては、測地線全般に関して Bangert([Ban2]) があり、特に閉測地線に関して詳しい。閉測地線に関してはさらに [Tai1],[Tai2] は特色があり、また Morse 理論に関連する部分については Bott([Bo2]) の解説が興味深い。なお、Finsler 計量の閉測地線に関して [Lo-Hu] がある (のことであるが、私は見ていない)。負曲率空間の測地線についての Ballmann によるテキスト [Ba5], P. Pansu による総合報告 [Pan1], [Pan2] は読みやすい。他に [Eb-Ha-Schr] がある。この報告では、これ等の文献を参考にした。

なお佐々木重夫先生から伺ったことであるが、先生は戦争中新しい文献が手に入らなくなって大域微分幾何学の論文を時代を逆に遡って読まれたそうである。Morse, Birkoff, Hadamard, Poincaré 等の論文を読んだが、中でも Poincaré のものは非常に面白かったとのことである。戦後の困難な時代に先生は「ホロノミー群研究」というガリ版刷りの雑誌を出しておられてそこに測地線に関する解説を書かれ、それらが後に [S] の一部として出版された。上述の古典に関する詳しい解説がある。

最後に文献に関して、岡山大学図書館、岡山大学理学部数学科図書室、岡山理科大学図書館、岡山理科大学理学部応用数学科図書室、勝田 篤氏にお世話になったことを感謝したい。

(2011 年 9 月 26 日提出)

フィンスラー幾何入門

太田 慎一（京都大学・理）*

概要

リーマン幾何との比較に気をつけながら，出来るだけテンソル計算をせずに幾何学的，直観的にフィンスラー幾何に入門する．

1 フィンスラー多様体の定義

はじめにミンコフスキ空間とフィンスラー多様体の定義を述べる．詳しくは定番の教科書 [BCS] や，少し違う視点からの [Sh] を参照されたい．

1.1 ミンコフスキ空間

ミンコフスキ（ノルム）空間は，原点についての非対称性を許すノルム空間の一般化であり，フィンスラー多様体の接空間に現れる．簡単のため， C^∞ の場合のみを扱う．

定義 1.1 (ミンコフスキ空間) 非負関数 $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ が次の 3 条件を満たすとき， $\|\cdot\|$ を C^∞ ミンコフスキノルム， $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ を C^∞ ミンコフスキ空間と呼ぶ：

- (1) (正則性) $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上 C^∞ である．
- (2) (正等質性) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ と $c > 0$ に対し， $\|cv\| = c\|v\|$ が成り立つ．
- (3) (強凸性) 任意の $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し， n 次対称行列

$$g_{ij}(v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\|\cdot\|^2)}{\partial v^i \partial v^j} (v) \tag{1.1}$$

が正定値である．ここで， $(v^i)_{i=1}^n$ は \mathbb{R}^n の座標を表す．

*sohta@math.kyoto-u.ac.jp; <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~sohta/>

ミンコフスキノルム $\|\cdot\|$ の開単位球 $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < 1\}$ は原点を含む原点对称とは限らない凸集合であり，強凸性はその境界（単位球面）が正に曲がっていることを意味する（図1参照）．従って $\|\cdot\|$ は狭義凸（一次独立な $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対し $\|v+w\| < \|v\| + \|w\|$ ）かつ正值（ $v=0 \Leftrightarrow \|v\|=0$ ）であるが， $\|-v\| = \|v\|$ とは限らない．また， $d(v, w) = \|w-v\|$ とおいたとき，三角不等式

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$$

は成り立つが，対称（ $d(v, w) = d(w, v)$ ）とは限らないため，通常の意味での距離とはならない．

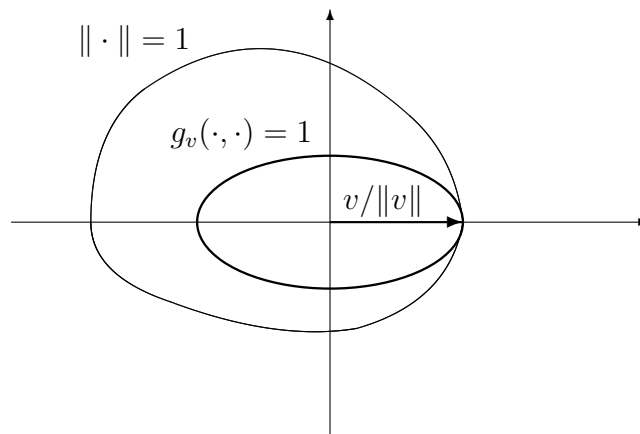


図1

各 $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し，(1.1) の行列 $g_{ij}(v)$ は正定値なので \mathbb{R}^n の内積を定める．この内積を g_v で表す：

$$g_v((a_i)_{i=1}^n, (b_j)_{j=1}^n) := \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_{ij}(v). \quad (1.2)$$

この内積 g_v の単位球面（図1の太線の楕円）は，元のノルム $\|\cdot\|$ の単位球面と $v/\|v\|$ で2次まで接し（強凸性は，2次の近似が直線ではなく楕円になることを保証している），特に $g_v(v, v) = \|v\|^2$ が成り立つ．この意味で g_v は $\|\cdot\|$ を v の方向で最も良く近似する内積と解釈でき，フィンスラー幾何へのリーマン幾何的なアプローチで重要な役割を果たす．ノルム $\|\cdot\|$ が元々内積から来るものだった場合には，明らかに g_v は元の内積と常に一致する．

ミンコフスキノルム $\|\cdot\|$ と内積 g_v の違い（比）は， $\|\cdot\|$ の凸性（凹性）を用いて評価できる．具体的には，

$$\mathcal{S} := \sup_{v, w \neq 0} \frac{\sqrt{g_w(v, v)}}{\|v\|} \geq 1, \quad \mathcal{C} := \sup_{v, w \neq 0} \frac{\|v\|}{\sqrt{g_w(v, v)}} \geq 1$$

と定義すると、次が成り立つ.

命題 1.2 上の S, C は, それぞれ

$$\left\| \frac{v+w}{2} \right\|^2 \geq \frac{1}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \|w\|^2 - \frac{S^2}{4} \|w-v\|^2, \quad (1.3)$$

$$\left\| \frac{v+w}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \|w\|^2 - \frac{1}{4C^2} \|w-v\|^2 \quad (1.4)$$

を全ての $v, w \in \mathbb{R}^n$ で満たす $S, C \geq 1$ の中で最小のものと一致する. また, $S = 1$ または $C = 1$ が成り立つのは $\|\cdot\|$ が内積のときに限る.

$S = 1$ のときの (1.3) は**アレクサンドロフの意味での非負曲率性**, $C = 1$ のときの (1.4) は**非正曲率性 (CAT(0) 性)** を意味する. 従って, ノルム空間がアレクサンドロフの意味で非負曲率または非正曲率を持つのは, 内積空間のときに限られる.

バナッハ空間論では S は (2 次の) **一様平滑性**, C は (2 次の) **一様凸性** を測る量であり, 例えば L^p 空間の場合は, $1 < p < 2$ で $C = 1/\sqrt{p-1}$ (S は ∞), $2 < p < \infty$ で $S = \sqrt{p-1}$ (C は ∞) が成り立つ ([BCL]).

1.2 フィンスラー多様体

M を境界のない連結 C^∞ 多様体とする. 以降では, $x \in M$ の近傍 U の局所座標 $(x^i)_{i=1}^n$ に対し, TU に

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

で導入される座標 $(x^i, v^i)_{i=1}^n$ を考える.

定義 1.3 (フィンスラー多様体) M の接束 TM 上の非負関数 $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ が,

- $TM \setminus \{0\}$ 上 C^∞ であり ($\{0\} := \{0 \in T_x M \mid x \in M\}$),
- 各 $x \in M$ に対し F の $T_x M$ への制限がミンコフスキノルムであるとき,

F を M の C^∞ **フィンスラー構造**, (M, F) を C^∞ **フィンスラー多様体** と呼ぶ. また, F が全ての $v \in TM$ に対し $F(-v) = F(v)$ を満たすとき, **可逆** であると云う.

各 $v \in T_x M \setminus \{0\}$ に対し, (1.1), (1.2) と同様にして $T_x M$ の内積 g_v を定められる:

$$g_{ij}(v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (F^2)}{\partial v^i \partial v^j}(v),$$

$$g_v \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) := \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_{ij}(v). \quad (1.5)$$

フィンスラー多様体のリーマン多様体との大きな違いは、異なる2点での接空間が互いに等長とは限らないことである。従って、リーマン多様体では曲率しか出てこない評価に、フィンスラー多様体では曲率、(1.3), (1.4) で述べた接空間の一樣平滑性・一樣凸性、更に接空間の変化の仕方と3つの量を評価しなければならない場合がある。

2 測地線, ヤコビ場, 曲率

フィンスラー構造 F から幾何学的に (一部 [Sh, Section 6] に沿って), 測地線, ヤコビ場, 曲率などを導入する。曲率を扱うため, 以降では $n \geq 2$ とする。詳しい定義は [BCS] を参照。

2.1 測地線

F から次の幾何学的量が自然に導入される。

- **距離**: $x, y \in M$ に対し, x から y への距離を

$$d(x, y) := \inf \left\{ \int_0^1 F(\dot{\eta}) dt \mid \eta : [0, 1] \longrightarrow M, C^1, \eta(0) = x, \eta(1) = y \right\}$$

と定める。但し, $d(x, y) \neq d(y, x)$ となり得るので, 厳密な意味での距離ではない。

- **測地線**: C^∞ 曲線 $\eta : [0, l] \longrightarrow M$ が局所最短かつ速さ一定 (つまり, $F(\dot{\eta})$ が定数) であるとき, 測地線と呼ぶ。
- **指数写像**: $v \in T_x M$ に対し, 測地線 $\eta : [0, 1] \longrightarrow M$ で $\dot{\eta}(0) = v$ を満たすものが存在するとき, $\exp_x(v) := \eta(1)$ と定める。
- **完備性**: 指数写像が TM 全体で定義されるとき, つまり任意の測地線 $\eta : [0, l] \longrightarrow M$ が $[0, \infty)$ まで拡張できるとき, (M, F) は前向き完備であるという。このとき, Hopf-Rinow の定理 ([BCS, Theorem 6.6.1]) より, 任意の2点は測地線で結べる。

上では測地線を距離を用いて幾何学的に定義したが, 座標を用いると測地線の満たす常微分方程式 (Euler-Lagrange 方程式) を

$$\ddot{\eta}^i + \sum_{j,k=1}^n \gamma_{jk}^i(\dot{\eta}) \dot{\eta}^j \dot{\eta}^k \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

と書き下せる。ここで, $\gamma_{jk}^i(\dot{\eta})$ はフィンスラー計量 F から定まる Christoffel 記号に相当するものであり, 点 $\eta(x)$ だけでなく方向 $\dot{\eta}(x)$ にも依存することに注意する。常微分方程

式の一般論より、任意の $v \in T_x M$ を初期ベクトルとする測地線の短時間存在性や一意性がわかる。

ここで、接続について簡単に述べる。接続 ∇ は、

$$\nabla_v \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i=1}^n \omega_j^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

の係数関数 $\omega_j^i(v)$ を決めれば定まるが、フィンスラー多様体ではリーマン多様体の Levi-Civita 接続のように一つの自然な接続を決めることは出来ない。幾つかの接続が知られているが、特に **Chern 接続** は振れがない接続の代表的なもので、 $\omega_j^i(v) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i(v) v^k$ で与えられる (Γ_{jk}^i の式は 6 節参照)。実は、(2.1) は γ_{jk}^i を Γ_{jk}^i に取り替えても成り立つ (逆に言うと、 Γ_{jk}^i は γ_{jk}^i を測地線の方程式が変わらない範囲で変形したもの)。また、これから定義する曲率は接続の取り方には依らないことが知られている。

上の Γ_{jk}^i を用いて、ベクトル場 $V = \sum_{i=1}^n V^i(\partial/\partial x^i)$ の $w \in T_x M \setminus \{0\}$ を **参照ベクトル** とする **共変微分** を

$$D_u^w V(x) := \sum_{i,j=1}^n \left\{ w^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j}(x) + \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i(w) w^j V^k(x) \right\} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \quad u \in T_x M, \quad (2.2)$$

と定義する。

注意 2.1 上の共変微分の代わりに、 x の近傍で定義された $W(x) = w$ を満たす適当なベクトル場 W を使い、リーマン計量 g_W についての共変微分 $D_u^{g_W} V(x)$ を考える。このとき、 $D_u^{g_W} V(x)$ が $D_u^w V(x)$ と一致するのは W の積分曲線が測地線であるときのみである。この事実は、 g_v を用いて何でもリーマン計量に帰着させようとしてはいけないと警告している。

2.2 ヤコビ場

測地線を用いてヤコビ場を定義する。 $\eta : (0, l) \rightarrow M$ を測地線とする。ある C^∞ 変分 $\sigma : (0, l) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ で $\sigma(t, 0) = \eta(t)$ かつ各 $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対し $\sigma_s(t) := \sigma(t, s)$ が測地線であるものを用いて、

$$V(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(t, 0)$$

と表される V を η に沿う **ヤコビ場** と呼ぶ。

このようにヤコビ場を定義すると、その満たすべき方程式が自然に曲率へとつながっていく。次を満たす (線形) 変換の族

$$\{R_v : T_x M \rightarrow T_x M \mid x \in M, v \in T_x M \setminus \{0\}\}$$

が存在する：任意の測地線 η とそれに沿うヤコビ場 V に対し、**ヤコビ方程式**

$$D_{\dot{\eta}}^{\dot{\eta}} D_{\dot{\eta}}^{\dot{\eta}} V + R_{\dot{\eta}}(V) \equiv 0 \quad (2.3)$$

が成り立つ ($D_{\dot{\eta}}^{\dot{\eta}}$ は η に沿う共変微分, (2.2) 参照). また逆に, (2.3) を満たすベクトル場 V はヤコビ場になる. $a, b > 0$ に対し $R_{av}(bw) = a^2 b R_v(w)$ となることに注意する.

2.3 曲率

一次独立な接ベクトル $v, w \in T_x M$ (特に $v, w \neq 0$) に対し, ヤコビ方程式 (2.3) に現れた $R_v : T_x M \rightarrow T_x M$ を用いて, **旗曲率** $\mathcal{K}(v, w)$ を

$$\mathcal{K}(v, w) := \frac{g_v(R_v(w), w)}{F(v)^2 g_v(w, w) - g_v(v, w)^2}$$

と定義する. このとき $\mathcal{K}(v, w)$ は, v, w の張る平面 $v \wedge w \subset T_x M$ (**旗**) だけでなく, v (**旗竿**) の取り方にもよることに注意する (特に $\mathcal{K}(v, w) \neq \mathcal{K}(w, v)$ となり得る).

リッチ曲率 は旗曲率のトレースとして定義される. 具体的には, 単位ベクトル $v \in T_x M \cap F^{-1}(1)$ に対し, $\{e_i\}_{i=1}^n$ を $T_x M$ の g_v についての正規直交基底で $e_n = v$ であるものとし,

$$\text{Ric}(v) := \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{K}(v, e_i).$$

これらの曲率に関して, 例えば Bonnet-Myers の定理 ($\text{Ric} \geq (n-1)K > 0$ ならば $\text{diam } M \leq \pi/\sqrt{K}$) や Cartan-Hadamard の定理 ($K \leq 0$ ならば M の普遍被覆は \mathbb{R}^n と微分同相) が成り立つ ([BCS, Theorems 7.7.1, 9.4.1]).

注意 2.2 旗曲率及びリッチ曲率には, 注意 2.1 と関連する Shen による次のような解釈がある ([Sh, Section 6]). この解釈は具体的な計算には適さないが, 理論的に極めて有用であり, また直観的な理解にも役立つ.

単位接ベクトル $v \in T_x M \cap F^{-1}(1)$ を固定し, それを全ての積分曲線が測地線である C^∞ ベクトル場 V に x の近傍 U 上で拡張する (つまり, $V(x) = v$). すると, (1.5) により U のリーマン計量 g_V が定まる. このとき, v と一次独立な $w \in T_x M$ に対し, 旗曲率 $\mathcal{K}(v, w)$ は v, w の張る平面の g_V についての断面曲率 $\mathcal{K}^V(v, w)$ と一致する (特に, $\mathcal{K}^V(v, w)$ は V の取り方に依らない). 同様に, v の F についてのリッチ曲率 $\text{Ric}(v)$ は g_V についてのリッチ曲率 $\text{Ric}^V(v)$ と一致する.

この解釈を用いると, 例えば上で述べた Bonnet-Myers の定理は, 点 $x \in M$ から出る測地線の接ベクトル場 V に対応する g_V についての Bonnet-Myers の定理に帰着できる.

3 フィンスラー多様体の例

フィンスラー多様体の代表的な例を与える.

例 3.1 (a) (ミンコフスキ空間) ミンコフスキ空間 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ は, \mathbb{R}^n の各点での接空間を \mathbb{R}^n と自然に同一視することによって, フィンスラー多様体と見なせる. ミンコフスキ空間の旗曲率は恒等的に 0 である.

(b) (**Berwald 空間**, [BCS, Chapter 10]) 前節で述べた Γ_{jk}^i が M の点のみに依る (つまり, 各接空間 $T_x M$ 上で定数である) フィンスラー多様体を Berwald 空間と呼ぶ. Berwald 空間の任意の 2 点の接空間は互いに等長であることが知られている. Berwald 空間は, フィンスラー多様体全体から比べるとかなり狭いが, リーマン多様体とミンコフスキ空間を含む扱いやすい対象である. 但し, 2次元の場合は Berwald 空間はリーマン多様体か局所的にミンコフスキ空間であるものしか存在しない ([BCS, Theorem 10.6.2]).

(c) (**Randers 空間**, [BCS, Chapter 11]) フィンスラー構造 F を, リーマン計量 g と 1 形式 β を用いて

$$F(v) = \sqrt{g(v, v)} + \beta(v)$$

と表せるフィンスラー多様体を Randers 空間と呼ぶ (F の正值性のため, 任意の $v \in TM \setminus \{0\}$ に対し $|\beta(v)|^2 < g(v, v)$ が成り立つとする). この F は, しばしばリーマン多様体 (M, g) に風 β が吹いている状況を表したものと解釈される. 各 $F|_{T_x M}$ の単位球面は, g の単位球面を β でずれる分だけ平行移動したものである. Randers 空間は物理などの応用上重要であり, また具体的な計算もしやすい.

(d) (**ヒルベルト幾何**) $D \subset \mathbb{R}^n$ を有界な開凸集合で, 境界 ∂D が滑らかかつ $D \cup \partial D$ が狭義凸であるものとする. 相異なる 2 点 $x, y \in D$ に対し, x, y を通る直線と ∂D との交点のうち, x に近い方を x' , y に近い方を y' とおく (図 2). このとき, D の**ヒルベルト距離**を

$$d_H(x, y) := \log \left(\frac{|x' - y| \cdot |x - y'|}{|x' - x| \cdot |y - y'|} \right)$$

と定める ($|\cdot|$ はユークリッドノルム). これは D が球のときは双曲空間のクラインモデルに一致し, それ以外の場合は旗曲率が負定数のフィンスラー構造で実現される ([Eg, Appendix A] など参照).

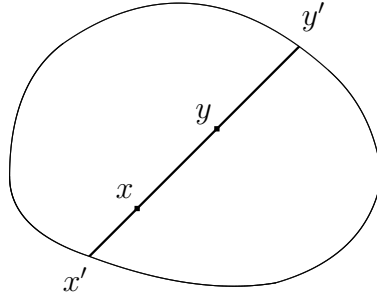


図 2

- (e) (タイヒミュラー空間) タイヒミュラー空間のタイヒミュラー計量は完備フィンズラー計量である。一方, Weil-Petersson 計量はリーマン計量であるが完備ではない ([EE], [Wo] など参照)。

4 変分公式

(2.2) の共変微分や (2.3) の R_v を用いて, 弧長についての第一・第二変分公式を記述する。

4.1 第一変分公式

$\sigma : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ を C^∞ 変分とし, $s = 0$ での接ベクトル場, 変分ベクトル場をそれぞれ

$$T(t) := \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, 0), \quad V(t) := \frac{\partial \sigma}{\partial s}(t, 0)$$

で表す。各 $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対し $L(s)$ を曲線 $\sigma_s = \sigma(\cdot, s)$ の弧長

$$L(s) := \int_0^l F\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, s)\right) dt$$

とすると, 次の**第一変分公式**が成り立つ ([BCS, Exercise 5.2.4]) :

$$L'(0) = \left[\frac{g_T(T, V)}{F(T)} \right]_0^l - \int_0^l g_T\left(V, D_T^T \left[\frac{T}{F(T)} \right]\right) dt.$$

特に, σ_0 の速度が一定 ($F(T)$ が定数) であるようにパラメータを取ると, $L'(0) = 0$ が端点を固定する σ_0 の全ての変分で成り立つのは, σ_0 が測地線であることと同値である (測地線の方程式 (2.1) 参照)。

注意 4.1 σ が単射かつ $\partial\sigma/\partial t \neq 0$ であるとき、上の T を

$$T(\sigma(t, s)) := \frac{\partial\sigma}{\partial t}(t, s)$$

と拡張してリーマン計量 g_T を考える。すると、 $g_T(T, T) = F(T)^2$ より σ_s の弧長は F と g_T で変わらず、両方の第一変分公式を比較することにより $D_T^{g_T}T = D_T^T T$ が成り立つ。これは全てのベクトルが同じ T であるという特殊な状況から生じる関係であり、注意 2.1 で述べたように、一般には F の共変微分はベクトル場から作るリーマン計量の共変微分とは一致しない。

4.2 第二変分公式

次に、 σ, T, V, L を上と同様とし、但し σ_0 が測地線であると仮定する。このとき、次の**第二変分公式**が成り立つ ([BCS, Exercise 5.2.7]) :

$$L''(0) = I(V, V) + \left[\frac{g_T(T, D_V^T V)}{F(T)} \right]_0^l - \int_0^l \frac{1}{F(T)} \left(\frac{\partial F(\dot{\sigma}_s)}{\partial s} \right)^2 dt.$$

但し、 $I(V, V)$ は**指数形式**

$$I(V, V) := \int_0^l \frac{g_T(D_T^T V, D_T^T V) - g_T(R_T(V), V)}{F(T)} dt$$

である。

この変分公式を使って、[Sh] や [Oh1] では三角形の比較定理がフィンスラー多様体に無理矢理拡張された。その際、 $D_V^T V$ と $D_V^V V$ の差の評価のために接空間の変化の仕方、 g_T と g_V の比の評価のために一様平滑性または一様凸性 ((1.3), (1.4)) を用いる必要があった。後者の評価はリーマン多様体でない限り無視できないが (命題 1.2)、前者は Berwald 空間 (例 3.1(b)) では現れず、特に非正旗曲率を持つ完備単連結 Berwald 空間は **Busemann の意味で非正曲率を持つ** (任意の測地線 $\eta_1, \eta_2 : [0, 1] \rightarrow M$ に対し、距離関数 $d(\eta_1(t), \eta_2(t))$ が凸関数になる) ことが知られている ([KVK], [KK]) .

5 重みつきリッチ曲率

ここまで、距離などの幾何学的な量がフィンスラー構造から自然に導かれることを見た。それでは、測度はどうであろうか？実は、フィンスラー多様体には標準的な測度は存在しない。幾つかの構成的な測度 (Busemann-Hausdorff 測度, Holmes-Thompson 測度など, [AT] 参照) が知られており、それらはリーマン多様体では全て体積測度と一致するが、フィンスラー多様体では互いに異なる。

そこで、以降では M 上の C^∞ 正測度 m を任意に固定する（すなわち、局所座標を用いて $m = \varphi dx^1 \cdots dx^n$ と書いたとき、 φ が C^∞ かつ正）。そして、重みつきリーマン多様体の理論を参考にして、リッチ曲率を m の取り方に応じて変形する。これは自然な方針であることが後にわかり（注意 5.2 参照）、多くの幾何的、解析的応用がある。

5.1 定義

単位接ベクトル $v \in T_x M \cap F^{-1}(1)$ を、注意 2.2 と同様に積分曲線が全て測地線である x の近傍 U 上の C^∞ ベクトル場 V に拡張し、リーマン計量 g_V を考える。 g_V のリーマン体積測度を vol_V で表し、 $m = e^{-\psi} \text{vol}_V$ により関数 ψ を定める。また、 $\eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ を $\dot{\eta}(0) = v$ を満たす測地線とする。

定義 5.1 (重みつきリッチ曲率) $N \in (n, \infty)$ に対し、

$$\text{Ric}_N(v) := \text{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0) - \frac{(\psi \circ \eta)'(0)^2}{N - n}.$$

極限として、

$$\begin{aligned} \text{Ric}_\infty(v) &:= \text{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0), \\ \text{Ric}_n(v) &:= \begin{cases} \text{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0) & \text{if } (\psi \circ \eta)'(0) = 0, \\ -\infty & \text{if } (\psi \circ \eta)'(0) \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(ψ は η 上で定義されていればよく、 V の条件から $V(\eta(t)) = \dot{\eta}(t)$ なので、 $\text{Ric}_N(v)$ は V の取り方に依らない.)

言い換えると、 $\text{Ric}_N(v)$ は重みつきリーマン多様体 $(U, g_V, e^{-\psi} \text{vol}_V)$ の重みつきリッチ曲率 $\text{Ric}_N^V(v)$ である。 Ric_∞ は解析学や確率論で重要な **Bakry-Émery テンソル** であり、 $N < \infty$ の場合の Ric_N は Qian により導入された ([BE], [Qi] 参照)。また、 $(\psi \circ \eta)'(0)$ は Shen らによって良く研究されている **S 曲率** $\mathbf{S}(v)$ と一致する ([Sh, §7.3] 参照)。定義から明らかに、重みつきリッチ曲率はパラメータ N について単調増加である：

$$\text{Ric}_N(v) \leq \text{Ric}_{N'}(v) \quad \forall N < N'.$$

従って、 Ric_∞ を下から押さえるのが最も易しく、 Ric_n を下から押さえるのが最も難しい。

注意 5.2 一般のフィンスラー多様体 (M, F) については、 $\text{Ric}_n > -\infty$ ($\Leftrightarrow \mathbf{S} \equiv 0$) を満たす測度 m が存在するとは限らない。例えば、Randers 空間に対して **S 曲率** が恒等的に 0 となる測度 m を許容するための必要十分条件を書き下すことができ ([Oh3])、それを満たさない例が知られている ([Sh, §7.3])。従って、一般のフィンスラー多様体ではリーマン多様体の体積測度のような「良い参照測度」は存在せず、 n より真に大きい N で Ric_N を考える必要がある。

5.2 曲率次元条件

重みつきリーマン多様体において, Lott, von Renesse, Sturm, Villani は, $N \in [n, \infty]$ と $K \in \mathbb{R}$ に対し Ric_N が K 以上であることは**曲率次元条件** $\text{CD}(K, N)$ と同値であることを示した ([vRS], [St1], [St2], [St3], [LV1], [LV2]). この同値性はフィンスラー多様体へそのまま拡張される ([Oh2]). 曲率次元条件の一般論より, $\text{CD}(K, N)$ を満たす空間はリッチ曲率が K 以上かつ次元が N 以下である様に振る舞うことが知られており, これを通してフィンスラー幾何への多くの応用が得られる (詳しくは [Oh2] や [太田] 参照).

曲率次元条件とは, 一言で言うと確率測度のなす距離空間上のある種のエントロピーの凸性である (N によってエントロピーを変え, K によって凸性の条件を変える). M 上のボレル確率測度 μ, ν の間に M の距離 d を用いて自然な方法で距離 (L^2 -Wasserstein 距離) を定めると, その間の最短線 (μ から ν への**最適輸送**) は M の測地線に沿った μ の押し出しで与えられる. その変分ベクトル場はヤコビ場であり, 従ってリッチ曲率を用いて挙動を制御できる.

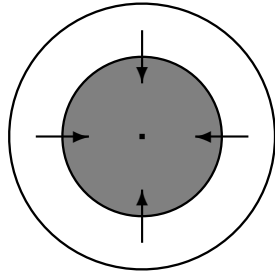
曲率次元条件の一般論より, Ric_N が下から押さえられたフィンスラー多様体の性質について, 次の応用が得られる (フィンスラー多様体に限れば, リーマン多様体と同様の議論で直接証明も可能).

- $\text{Ric}_\infty \geq K > 0$: 凸関数の基本的な性質を用いて, **Talagrand 不等式**, **対数ソボレフ不等式**, **大域ポアンカレ不等式** が得られる. また, Talagrand 不等式 (または対数ソボレフ不等式) は**測度の集中**を導く.
- $\text{Ric}_N \geq K, N < \infty$: 同心球の体積増大度について, **Bishop-Gromov 体積比較定理** が成り立つ (リーマン多様体と同じ評価を整数とは限らない $N \in [2, \infty)$ に拡張したもの).
- $\text{Ric}_N \geq K > 0, N < \infty$: 直径の上限についての **Bonnet-Myers の定理**, 大域ポアンカレ不等式を改良する **Lichnerowicz 不等式** が成り立つ.

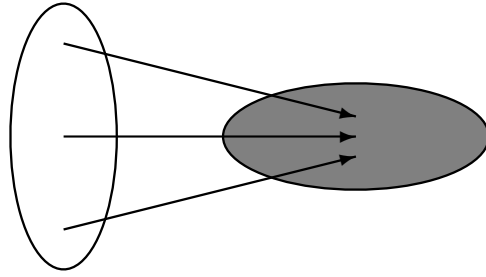
更に, 一般の $K \in \mathbb{R}, N \in [n, \infty]$ に対し, $\text{Ric}_N \geq K$ は **Brunn-Minkowski の不等式** ([St3]) を導く. これは, 同心球の体積比較である Bishop-Gromov の比較定理を, 任意の2つの集合の測度の間の関係に拡張したものと考えられる (図3). 尚, 古典的なユークリッド空間での Brunn-Minkowski 不等式とは, 任意の可測集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ と $t \in [0, 1]$ に対し,

$$|\{(1-t)x + ty \mid x \in A, y \in B\}|^{1/n} \geq (1-t)|A|^{1/n} + t|B|^{1/n}$$

が成り立つというものであった ($|A|$ は A のルベーグ測度).



Bishop-Gromov



Brunn-Minkowski

図3

5.3 非線形ラプラシアン

微分可能な関数 $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ の点 $x \in M$ での勾配ベクトル $\nabla u(x) \in T_x M$ を、微分 $Du(x) \in T_x^* M$ の Legendre 変換と定義する。すなわち、 $\nabla u(x)$ は

$$[Du(x)](\nabla u(x)) = F^*(Du(x))^2, \quad F(\nabla u(x)) = F^*(Du(x))$$

を満たす唯一の $T_x M$ の元である (F^* は F の双対ノルム)。

$u \in H_{\text{loc}}^1(M)$ に作用する非線形ラプラシアン Δ を、

$$\int_M \phi \Delta u \, dm := - \int_M D\phi(\nabla u) \, dm \quad \forall \phi \in C_c^\infty(M)$$

と弱い意味で定義する。Legendre 変換は内積空間以外では非線形なので、 Δ は非線形作用素である ($\Delta(u_1 + u_2) = \Delta u_1 + \Delta u_2$ とは限らない)。このラプラシアンは Ric_N と相性が良く、例えばラプラシアンの比較定理が成り立つ ([OS1])。次の性質は、後の Bochner-Weitzenböck 公式の意味を考える上で重要である。

注意 5.3 $u \in H_0^1(M)$ に対し、可測なベクトル場 V で、

- 全ての $x \in M$ で $V(x) \neq 0$,
- かつ $\nabla u(x) \neq 0$ ならば $V(x) = \nabla u(x)$

を満たすものを取り、関数 f の g_V についての勾配ベクトル場を $\nabla^V f$ で表す。このとき、 $\Delta^{\nabla u} f$ を

$$\int_M \phi \Delta^{\nabla u} f \, dm := - \int_M D\phi(\nabla^V f) \, dm \quad \phi \in C_c^\infty(M)$$

により定めると、 $\Delta^{\nabla u} u = \Delta u$ が成り立つ。つまり、線形作用素 $\Delta^{\nabla u}$ と非線形作用素 Δ は u に作用するときは一致する。

ラプラシアン Δ に対応する**非線形熱方程式** $\partial_t u = \Delta u$ は, F の正則性と強凸性より, それほど扱いにくい方程式ではない. 実際, 任意の初期値 $u \in H_0^1(M)$ から始まる解 $(u_t)_{t \in [0, \infty)}$ が存在し, それは x について H_{loc}^2 かつ $(0, \infty) \times M$ 上 $C^{1, \alpha}$ である. 更に, $(u_t)_{t \in [0, \infty)}$ は (距離 $\overleftarrow{d}(x, y) := d(y, x)$ についての) Wasserstein 空間内の相対エントロピーの勾配流と一致する.

5.4 Bochner-Weitzenböck 公式

$u \in C^\infty(M)$ に対し, $M_u := \{x \in M \mid Du(x) \neq 0\}$ とおく. M_u ではリーマン計量 $g_{\nabla u}$ を考えることができ, 点ごとの計算により次の Bochner-Weitzenböck 公式が得られる ([OS2]).

定理 5.4 (Bochner-Weitzenböck 公式) 任意の $u \in C^\infty(M)$ に対し,

$$\Delta^{\nabla u} \left(\frac{F(\nabla u)^2}{2} \right) - D(\Delta u)(\nabla u) = \text{Ric}_\infty(\nabla u) + \|\nabla^2 u\|_{HS(\nabla u)}^2 \quad (5.1)$$

が M_u の各点で成り立つ. また, 各 $N \in [n, \infty)$ に対し,

$$\Delta^{\nabla u} \left(\frac{F(\nabla u)^2}{2} \right) - D(\Delta u)(\nabla u) \geq \text{Ric}_N(\nabla u) + \frac{(\Delta u)^2}{N} \quad (5.2)$$

がやはり M_u の各点で成り立つ.

(5.1) で, $\nabla^2 u$ は勾配ベクトル場 ∇u の ∇u を参照ベクトルとする共変微分 $D^{\nabla u}(\nabla u) : TM \rightarrow TM$ ((2.2) 参照), $\|\nabla^2 u\|_{HS(\nabla u)}$ はその $g_{\nabla u}$ についての Hilbert-Schmidt ノルムを表す. これらの公式は, ∇u を無視すれば (重みつき) リーマン多様体のときと全く同じであることに注意する.

(5.1) の証明は本質的にリーマン多様体と同様の計算によって行われるが, 全く同じではない. 最も重要な点は, 正しい定式化 (どこで $g_{\nabla u}$ を使うか?) を見つけることにある. (5.2) は (5.1) から標準的な方法で導かれる.

注意 5.5 (a) 注意 2.1 で述べたように, $D^{\nabla u}(\nabla u)$ はリーマン計量 $g_{\nabla u}$ についての共変微分とは異なることに注意する. 両者は ∇u の積分曲線が測地線になるときは一致するが (このときは $\text{Ric}_\infty(\nabla u) = \text{Ric}_\infty^{\nabla u}(\nabla u)$ も成立, 注意 2.2), これは u への非常に強い制限である. 従って, (5.1) の右辺の各項は重みつきリーマン多様体 $(M, g_{\nabla u}, m)$ の Bochner-Weitzenböck 公式の対応する項とは一致しない.

(b) 一方, (5.1) の左辺に現れる $\Delta^{\nabla u}(F(\nabla u)^2)$ と $D(\Delta u)(\nabla u)$ は F と $g_{\nabla u}$ で一致する (注意 5.3 参照).

M_u の外では、 Δu などの量が点ごとには意味を持たないので、(5.1), (5.2)の公式は積分した形でしか得られない。この点はリーマン多様体のときよりもかなり慎重に議論する必要がある。解析的な応用として、 M がコンパクトな場合に、(5.1)より **Bakry-Émery 型勾配評価**、(5.2)より **Li-Yau 型勾配評価**及び **Harnack 不等式**が得られる ([OS2])。

5.5 展望

最後に、今後の発展の可能性について簡単に述べる。重みつきリッチ曲率の研究は始まったばかりであり、様々な展開が期待される。

- 前節では Bochner-Weitzenböck 公式の解析的な応用のみを述べたが、リーマン多様体の場合のように幾何学的な応用もあるはずである。これについては引き続き研究中である。
- これまで見てきたように、重みつきリッチ曲率は一般のフィンスラー多様体の研究に非常に役立つ。次はこれを、具体的な空間の研究に生かしたい。例えば、ヒルベルト幾何やタイヒミュラー空間の重みつきリッチ曲率はどうなっているだろうか？測度は何を考えるべきか？
- フィンスラー多様体の理論を、バナッハ空間の幾何学に応用したい。両者は扱う空間の類似性にも関わらず、接点があまりなかった。例えば、曲率次元条件の応用で触れた測度の集中は、バナッハ空間の幾何学でもよく研究されている。
- フィンスラー計量はラグランジアン的一种とも考えられ、ラグランジアンに対応するコストを用いた最適輸送問題は力学系とも関連して研究されている。では、リッチ曲率の理論を一般のラグランジアンに対して展開することはどの程度可能であろうか？

6 テンソルの森

The term “Finsler space” evokes in most mathematicians the picture of an impenetrable forest whose entire vegetation consists of tensors. ...*the association of tensors with Finsler spaces is due to a historical accident, and that, at least at the present time, the fruitful and relevant problems lie in a different direction.*

— Herbert Busemann [Bu] (1950)

$v \in TM \setminus \{0\}$ とし, 添字は $1, 2, \dots, n$ を動くとする. (g^{ij}) で (g_{ij}) の逆行列を表す.

$$g_{ij}(v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (F^2)}{\partial v^i \partial v^j}(v), \quad (\text{fundamental tensor})$$

$$A_{ijk}(v) = \frac{F(v)}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}(v), \quad (\text{Cartan tensor})$$

$$\gamma_{jk}^i(v) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il}(v) \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(v) + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}(v) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(v) \right\}, \quad (\text{formal Christoffel symbol})$$

$$G^i(v) = \sum_{j,k=1}^n \gamma_{jk}^i(v) v^j v^k, \quad (\text{geodesic spray coefficient})$$

$$N_j^i(v) = \frac{1}{2} \frac{\partial G^i}{\partial v^j}(v), \quad (\text{nonlinear connection})$$

$$\Gamma_{jk}^i(v) = \gamma_{jk}^i(v) - \sum_{l,m=1}^n \frac{g^{il}(v)}{F(v)} \{ A_{jlm}(v) N_k^m(v) + A_{lkm}(v) N_j^m(v) - A_{jkm}(v) N_l^m(v) \},$$

$$R_{ij}(v) = \sum_{k,l=1}^n g_{ik}(v) \frac{v^l}{F(v)} \left\{ \frac{\delta}{\delta x^j} \left(\frac{N_l^k}{F} \right) (v) - \frac{\delta}{\delta x^l} \left(\frac{N_j^k}{F} \right) (v) \right\} \quad ([\text{BCS}, \text{Exercise 3.3.4}])$$

$$\text{where } \frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{m=1}^n N_j^m \frac{\partial}{\partial v^m},$$

$$R_v(w) = F(v)^2 \sum_{i,j,k=1}^n g^{jk}(v) R_{ij}(v) w^i \frac{\partial}{\partial x^k},$$

$$\nabla u(x) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(\nabla u(x)) \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}(x).$$

参考文献

- [AT] J. C. Álvarez-Paiva and A. C. Thompson, Volumes in normed and Finsler spaces, A sampler of Riemann-Finsler geometry, 1–48, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **50**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [BE] D. Bakry and M. Émery, Diffusions hypercontractives (French), Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, 177–206, Lecture Notes in Math. **1123**, Springer, Berlin, 1985.
- [BCL] K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms, Invent. Math. **115** (1994), 463–482.
- [BCS] D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen, An introduction to Riemann-Finsler geometry, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Bu] H. Busemann, The geometry of Finsler spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **56**, (1950), 5–16.

- [EE] J. C. Earle and J. Eells, On the differential geometry of Teichmüller spaces, *J. Analyse Math.* **19** (1967), 35–52.
- [Eg] D. Egloff, Uniform Finsler Hadamard manifolds, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **66** (1997), 323–357.
- [KK] A. Kristály and L. Kozma, Metric characterization of Berwald spaces of non-positive flag curvature, *J. Geom. Phys.* **56** (2006), 1257–1270.
- [KVK] A. Kristály, C. Varga and L. Kozma, The dispersing of geodesics in Berwald spaces of non-positive flag curvature, *Houston J. Math.* **30** (2004), 413–420.
- [LV1] J. Lott and C. Villani, Weak curvature conditions and functional inequalities, *J. Funct. Anal.* **245** (2007), 311–333.
- [LV2] J. Lott and C. Villani, Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport, *Ann. of Math.* **169** (2009), 903–991.
- [vRS] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature, *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005), 923–940.
- [Oh1] S. Ohta, Uniform convexity and smoothness, and their applications in Finsler geometry, *Math. Ann.* **343** (2009), 669–699.
- [Oh2] S. Ohta, Finsler interpolation inequalities, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **36** (2009), 211–249.
- [Oh3] S. Ohta, Vanishing S-curvature of Randers spaces, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), 174–178.
- [OS1] S. Ohta and K.-T. Sturm, Heat flow on Finsler manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* **62** (2009), 1386–1433.
- [OS2] S. Ohta and K.-T. Sturm, Bochner-Weitzenböck formula and Li-Yau estimates on Finsler manifolds, Preprint (2011). Available at [arXiv:1104.5276](https://arxiv.org/abs/1104.5276)
- [Qi] Z. Qian, Estimates for weighted volumes and applications, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **48** (1997), 235–242.
- [Sh] Z. Shen, *Lectures on Finsler geometry*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001.
- [St1] K.-T. Sturm, Convex functionals of probability measures and nonlinear diffusions on manifolds, *J. Math. Pures Appl.* **84** (2005), 149–168.
- [St2] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. I, *Acta Math.* **196** (2006), 65–131.
- [St3] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. II, *Acta Math.* **196** (2006), 133–177.
- [Wo] S. Wolpert, Noncompleteness of the Weil-Petersson metric for Teichmüller space, *Pacific J. Math.* **61** (1975), 573–577.
- [太田] 太田 慎一, 確率測度の空間の幾何学, *数学* 第 63 卷 (2011), 21–42.

On the Cut Locus of Riemann-Finsler surfaces

Minoru TANAKA Sorin V. SABAU

1 Introduction

The notion of cut locus was introduced and studied for the first time by H. Poincaré in 1905. Later on, S. B. Myers and J. H. C. Whitehead continued the investigations on the cut locus of 2-dimensional Riemannian manifolds (see [ShT]).

Despite of the vast literature existing for the Riemannian case, the investigations of the cut locus of a Riemann-Finsler manifold are scarce (see [BCS]).

We will show that the cut locus of a Riemann-Finsler surface has the structure of a local tree (Theorem 2.1) and that it is a union of rectifiable Jordan arcs (Theorem 2.4). Moreover, its inner metric topology coincides with the induced topology (Theorem 2.5). We will consider here the case of the cut locus of a point, but the case of the cut locus of a close curve can be studied in the same way (see [TS]). The methods are similar with the ones in [ShT]. Even the results are similar, showing that there is nothing special about the metric structure to be Riemannian, one should pay always attention to the fact that, unlike its Riemannian correspondent, the Finslerian distance is not symmetric.

Let us recall that a *Riemann-Finsler manifold* (M, F) is a n -dimensional differential manifold M endowed with a norm $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ such that

1. F is positive and differentiable;
2. F is 1-positive homogeneous, i.e. $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\lambda > 0$, $(x, y) \in TM$;
3. the Hessian matrix $g_{ij}(x, y) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ is positive definite on $\widetilde{TM} := TM \setminus \{0\}$.

The Riemann-Finsler structure is called *absolute homogeneous* if $F(x, -y) = F(x, y)$ because this leads to the homogeneity condition $F(x, \lambda y) = |\lambda| F(x, y)$, for any $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 Main Theorems

Let (M, F) be a Riemann-Finsler surface, and p a point in M , and let us denote by \mathcal{C}_p the cut locus of p .

Theorem 2.1 *Let x be a cut point of p , and $B_{2\delta}^+(x)$ a convex neighborhood at x . Then any cut point $y \in B_{\delta}^+(x) \cap \mathcal{C}_p$ can be joined to x by a Jordan arc in $B_{\delta}^+(x) \cap \mathcal{C}_p$. In other words, the cut locus \mathcal{C}_p is a local tree. Its end points are the cut points of p that coincide with the first conjugate points of p .*

Proposition 2.2 (Generalized first variation formula, forward version)

Let $\{\gamma_i : [0, l_i] \rightarrow M\}$ be a convergent sequence of minimal geodesic segments emanating from a point p on an n -dimensional Riemann-Finsler manifold M .

If the limit

$$v^f := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{F(\exp_x^{-1}(\gamma_i(l_i)))} \exp_x^{-1}(\gamma_i(l_i)), \quad (2.1)$$

exists, then

$$g_{w_\infty}(v^f, w_\infty) = \min\{g_w(v^f, w); w \text{ is a unit velocity tangent vector at } x \text{ of } \gamma \in (p, x)\}. \quad (2.2)$$

Moreover,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d(p, \gamma_i(l_i)) - d(p, x)}{d(\gamma_i(l_i), x)} = g_{w_\infty}(v^f, w_\infty) \quad (2.3)$$

holds.

Here $x = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i(l_i)$ and \exp_x^{-1} denotes the local inverse map of the exponential map \exp_x around the zero vector and $w_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} \dot{\gamma}_i(l_i) \in T_x M$.

A similar generalization of the first variation formula can be written in the case when the convergence of the points sequence (x_i) to x lies on the geodesic segments sequence γ_i oriented from $\gamma_i(l_i)$ to x . Indeed, we have

Proposition 2.3 (Generalized first variation formula, backward version)

Let $\{\gamma_i : [0, l_i] \rightarrow M\}$ be a convergent sequence of minimal geodesic segments emanating from a point p on an n -dimensional Riemann-Finsler manifold M .

If the limit

$$v^b := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{F(\exp_{\gamma_i(l_i)}^{-1}(x))} \exp_{\gamma_i(l_i)}^{-1}(x) \quad (2.4)$$

exists, then

$$g_{w_\infty}(v^b, w_\infty) = \min\{g_w(v^b, w); w \text{ is a unit velocity tangent vector at } x \text{ of } \gamma \in (p, x)\}.$$

Moreover,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d(p, \gamma_i(l_i)) - d(p, x)}{d(\gamma_i(l_i), x)} = g_{w_\infty}(v^b, w_\infty) \quad (2.5)$$

holds.

Here $x = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i(l_i)$ and $w_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} \dot{\gamma}_i(l_i)$.

From now on, we will fix a Jordan arc $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_p$, i.e. c is injective and continuous.

Let us recall that if (M, d) is a metric space, then the *length* of a curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ is defined by

$$L_d(\gamma|_{[a,b]}) := \sup \left[\sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right],$$

where the sup is taken over all n and all partitions $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ of $[a, b]$.

A *rectifiable curve* is a curve with finite length.

We can state now the main result of this section.

Theorem 2.4 *Let $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_p$ be a Jordan arc. Then c is rectifiable.*

From our previous discussions it can be seen that if two points $y_1, y_2 \in \mathcal{C}_p$ are in the same connected component of the cut locus of p , then there is a Jordan arc contained in \mathcal{C}_p joining them. Therefore, we can define the *intrinsic metric* on \mathcal{C}_p as follows:

1. if $y_1, y_2 \in \mathcal{C}_p$ are in the same connected component,

$$(y_1, y_2) := \inf\{L_d(c) : c \text{ is a rectifiable arc in } \mathcal{C}_p \text{ joining } y_1 \text{ and } y_2\}, \quad (2.6)$$

2. otherwise $(y_1, y_2) := +\infty$.

Theorem 2.5 *If (M, F) is a forward complete Riemann-Finsler surface and \mathcal{C}_p is the cut locus of a point $p \in M$, then the intrinsic metric topology of \mathcal{C}_p is equivalent to the induced topology of \mathcal{C}_p from (M, d) , where d is the Finslerian distance on M .*

References

- [BCS] D. Bao, S. S. Chern, Z. Shen, *An Introduction to Riemann Finsler Geometry*, Springer, GTM **200**, 2000.
- [ShT] K. Shiohama, M. Tanaka, *Cut loci and distance spheres on Alexandrov surfaces*, Séminaires & Congrès, Collection SMF **No.1**, Actes de la table ronde de Géométrie différentielle en l'honneur Marcel Berger (1996), 531–560.
- [SST] K. Shiohama, T. Shioya, and M. Tanaka, *The Geometry of Total Curvature on Complete Open Surfaces*, Cambridge tracts in mathematics **159**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [TS] M. Tanaka, S. V. Sabau, *The cut locus and distance function from a closed subset of a Finsler manifold*, in preparation.

Minoru TANAKA

Department of Mathematics
Tokai University
Hiratsuka City, Kanagawa Pref.
259–1292 Japan

tanaka@tokai-u.jp

Sorin V. SABAU

Department of Human Science and Informatics
Tokai University
Sapporo City, Hokkaido
005-8601 Japan
`sorin@tspirit.tokai-u.jp`