# Bochner formula on Finsler manifolds and applications

太田 慎一（京都大学・理）*

**概 要**

一般のフィンスラー多様体 $(M, F)$ と $M$ 上の測度 $m$ について，対応する重みつきリッチ曲率と非線形ラプラシアンを用いた Bochner-Weitzenböck 公式が成り立つ．応用として，Bakry-Émery 型，Li-Yau 型の各勾配評価と，Li-Yau 型の Harnack 不等式を得る．

## 1 序

本講演では，Bonn 大学の Karl-Theodor Sturm 氏との共同研究 [OS3] について述べる．フィンスラー多様体 $(M, F)$ は，各点 $x \in M$ での接空間 $T_xM$ にノルム $F|_{T_xM}$ （より一般には，非対称性 $F(-v) \neq F(v)$ を許すミンコフスキノルム）を与えられた多様体である．特に全ての点 $x$ で $F|_{T_xM}$ が内積によって与えられるとき，$(M, F)$ はリーマン多様体となる．フィンスラー多様体には距離や測地線などの幾何学的な量が自然に導入される．一方，測度としては $M$ 上の任意の $\mathcal{C}^\infty$ 正測度 $m$ を考える．

最近の研究により，適切に定義されたリッチ曲率（正確には $m$ に応じて定まる重みつきリッチ曲率）が，フィンスラー多様体 $(M, F, m)$ の幾何的・解析的性質を調べる上で有用なことが明らかになってきている（[Oh1]，[OS1]，[太田] 参照）．このリッチ曲率を用いた研究の更なる発展として，[OS3] で次の Bochner-Weitzenböck 公式を得た：任意の $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ に対し，

$$\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla} u)^2}{2}\right) - D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u) = \mathrm{Ric}_\infty(\boldsymbol{\nabla} u) + \|\boldsymbol{\nabla}^2 u\|^2_{HS(\boldsymbol{\nabla} u)}$$

が集合 $\{x \in M \mid \boldsymbol{\nabla} u(x) \neq 0\}$ 上では点ごとに，$M$ 全体では弱い意味で成り立つ（定理 3.1，定理 3.3）．$\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}$ などの記号については後述するが，この公式がリーマン多様体のときと全く同じ形をしている（フィンスラー多様体特有の項は現れない）ことに注意されたい．この公式の解析的な応用として，Bakry-Émery 型の勾配評価（定理 4.1），Li-Yau 型の勾配評価（定理 4.3）と Harnack 不等式（定理 4.4）が得られる．

*sohta@math.kyoto-u.ac.jp; http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~sohta/

# 2　フィンスラー多様体

始めに，フィンスラー幾何の基本的な概念を概観する．より詳しくは，[BCS]，[Sh] などを参照されたい．

## 2.1　フィンスラー多様体の定義と幾何学的量

$M$ を連結 $\mathcal{C}^\infty$ 多様体で次元 $n$ が 2 以上なものとする（$n=1$ ではリーマン多様体との違いがない）．以降では，$x \in M$ の近傍 $U$ の局所座標 $(x^i)_{i=1}^n$ に対し，$TU$ に

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

で導入される座標 $(x^i, v^i)_{i=1}^n$ を考える．

**定義 2.1 (フィンスラー構造)** $M$ の接束 $TM$ 上の非負関数 $F : TM \longrightarrow [0,\infty)$ が次の 3 条件を満たすとき，$F$ を $M$ の $\mathcal{C}^\infty$ **フィンスラー構造**，$(M,F)$ を $\mathcal{C}^\infty$ **フィンスラー多様体**と呼ぶ：

(1)　（正則性）$F$ は $TM \setminus \{0\}$ 上 $\mathcal{C}^\infty$ である．但し，$\{0\} := \{0 \in T_xM \mid x \in M\}$.

(2)　（**正等質性**）任意の $v \in TM$，$c > 0$ に対し，$F(cv) = cF(v)$ が成り立つ．

(3)　（**強凸性**）任意の $v \in T_xM \setminus \{0\}$ に対し，$n$ 次対称行列

$$g_{ij}(v) := \frac{1}{2}\frac{\partial(F^2)}{\partial v^i \partial v^j}(v) \tag{2.1}$$

が正定値である．

各接空間 $T_xM$ の中で，$F$ の開単位球 $\{v \in T_xM \mid F(v) < 1\}$ は原点を含む原点対称とは限らない凸集合であり，強凸性は単位球面 $\{v \in T_xM \mid F(v) = 1\}$ が正に曲がっていることを意味する．特に $F|_{T_xM}$ は狭義凸（一次独立な $v, w \in T_xM$ に対し $F(v+w) < F(v)+F(w)$）であり，また各 $v \in T_xM \setminus \{0\}$ に対し (2.1) の行列 $g_{ij}(v)$ は $T_xM$ の内積を定める．この内積を $g_v$ で表す：

$$g_v\left( \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) := \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_{ij}(v). \tag{2.2}$$

$g_v$ の単位球面は $F|_{T_xM}$ の単位球面と 2 次まで接する（図 1 参照，特に $g_v(v,v) = F(v)^2$ が成り立つ）．この意味で $g_v$ は $F$ を $v$ の方向で最も良く近似する内積と解釈でき，フィンスラー幾何へのリーマン幾何的なアプローチで重要な役割を果たす．

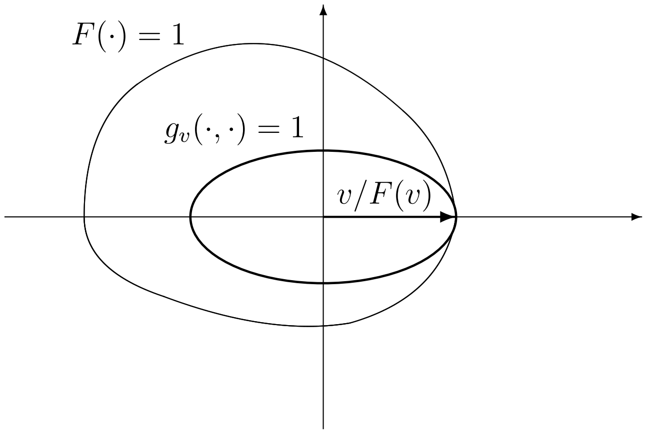


図 1

$F$ から幾つかの幾何学的量が自然に導入される．

- **距離**：$x, y \in M$ に対し，$x$ から $y$ への距離を
$$d(x,y) := \inf\left\{ \int_0^1 F(\dot\eta)\,dt \,\middle|\, \eta : [0,1] \longrightarrow M,\ \mathcal{C}^1,\ \eta(0)=x,\ \eta(1)=y \right\}$$
で定める．但し，$d(x,y) \neq d(y,x)$ となり得るので，厳密な意味では距離ではない．

- **測地線**：$\mathcal{C}^\infty$ 曲線 $\eta : [0,l] \longrightarrow M$ が局所最短かつ速さ一定（つまり，$F(\dot\eta)$ が定数）であるとき，測地線と呼ぶ．

- **指数写像**：$v \in T_xM$ に対し，測地線 $\eta : [0,1] \longrightarrow M$ で $\dot\eta(0) = v$ を満たすものが存在するとき，$\exp_x(v) := \eta(1)$ と定める．

- **完備性**：指数写像が $TM$ 全体で定義されるとき，つまり任意の測地線 $\eta : [0,l] \longrightarrow M$ が $[0,\infty)$ まで拡張できるとき，$(M,F)$ は前向き完備であるという．このとき，Hopf-Rinow の定理より，任意の 2 点は測地線で結べる．

## 2.2 重みつきリッチ曲率

フィンスラー多様体のリッチ曲率は，接続を用いて定義される（接続の取り方は複数あるが，曲率は同じになることが知られている）．しかしその定義は煩雑なため，ここでは Shen による有用な解釈を述べる．(**注意**：これから述べるのは定理であり，リッチ曲率の定義ではない．)

単位接ベクトル $v \in T_xM \cap F^{-1}(1)$ を固定し，それを全ての積分曲線が測地線である $\mathcal{C}^\infty$ ベクトル場 $V$ に $x$ の近傍 $U$ 上で拡張する（つまり，$V(x) = v$）．すると，(2.2) により $U$ のリーマン計量 $g_V$ が定まる．このとき，$g_V$ についての $v$ のリッチ曲率 $\mathrm{Ric}^V(v)$ は，$F$ についてのリッチ曲率 $\mathrm{Ric}(v)$ と一致する（特に，$\mathrm{Ric}^V(v)$ は $V$ の取り方に依らない）．

次に，重みつきリーマン多様体の理論を参考にして，リッチ曲率を測度の取り方に応じて変形する．以降，$M$ 上の $\mathcal{C}^\infty$ 正測度 $m$ を任意に固定する（すなわち，局所座標を用いて $m = \varphi\, dx^1 \cdots dx^n$ と書いたとき，$\varphi$ が $\mathcal{C}^\infty$ かつ正）．単位接ベクトル $v \in T_xM$ を上と同様に積分曲線が全て測地線である $\mathcal{C}^\infty$ ベクトル場 $V$ に拡張し，リーマン計量 $g_V$ を考える．測地線 $\eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ を $\dot\eta(0) = v$ を満たすものとする．更に，$g_V$ のリーマン体積測度を $\mathrm{vol}_V$ で表し，$m = e^{-\psi}\,\mathrm{vol}_V$ により関数 $\psi$ を定める．

**定義 2.2 (重みつきリッチ曲率)** $N \in (n, \infty)$ に対し，

$$\mathrm{Ric}_N(v) := \mathrm{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0) - \frac{(\psi \circ \eta)'(0)^2}{N - n}.$$

極限として，

$$\mathrm{Ric}_\infty(v) := \mathrm{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0),$$
$$\mathrm{Ric}_n(v) := \begin{cases} \mathrm{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0) & \text{if } (\psi \circ \eta)'(0) = 0, \\ -\infty & \text{if } (\psi \circ \eta)'(0) \neq 0. \end{cases}$$

$\mathrm{Ric}_\infty$ は解析学や確率論で重要な **Bakry-Émery テンソル**に他ならない．また，$(\psi\circ\eta)'(0)$ は Shen らによって良く研究されている **S 曲率** $\mathbf{S}(v)$ と一致する（[Sh] 参照）．定義から明らかに，重みつきリッチ曲率はパラメータ $N$ について単調増加である：

$$\mathrm{Ric}_N(v) \le \mathrm{Ric}_{N'}(v) \qquad \forall N < N'.$$

従って，$\mathrm{Ric}_\infty$ を下から押さえるのが最も易しく，$\mathrm{Ric}_n$ を下から押さえるのが最も難しい．一般のフィンスラー多様体 $(M, F)$ に対しては，$\mathrm{Ric}_n > -\infty$ を満たす測度 $m$ が存在するとは限らない（[Oh2]）．

重みつきリッチ曲率 $\mathrm{Ric}_N$ が $K \in \mathbb{R}$ 以上である空間は，リッチ曲率が $K$ 以上かつ次元が $N$ 以下である様に振る舞うことが知られている．実際，$N \in [n, \infty]$ と $K \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{Ric}_N$ が $K$ 以上であることは Lott, Sturm, Villani の意味での**曲率次元条件** $\mathsf{CD}(K, N)$ と同値である（[Oh1]）．すると，曲率次元条件の一般論により，多くの幾何学的・解析的性質が得られる（[Vi]，[太田] 参照）．曲率次元条件とは，簡単に言うと確率測度のなす距離空間（Wasserstein 空間）上のある種のエントロピーの凸性である．例えば，$\mathsf{CD}(K, \infty)$ は相対エントロピーの $K$ 凸性として定義され，特に $K > 0$ ならば対数ソボレフ不等式や測度の集中を導く．また，$N < \infty$ に対し，$\mathsf{CD}(K, N)$ は Bishop-Gromov 型の体積比較定理を導く．

## 2.3　非線形ラプラシアン

続けて，Bochner-Weitzenböck 公式の記述に必要なラプラシアンを定義する．詳しくは [OS1] を参照されたい．

微分可能な関数 $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ の点 $x \in M$ での**勾配ベクトル**$\boldsymbol{\nabla} u(x) \in T_x M$ を，微分 $Du(x) \in T_x^* M$ の Legendre 変換と定義する．すなわち，$\boldsymbol{\nabla} u(x)$ は

$$[Du(x)]\big(\boldsymbol{\nabla} u(x)\big) = F^*\big(Du(x)\big)^2, \qquad F\big(\boldsymbol{\nabla} u(x)\big) = F^*\big(Du(x)\big)$$

を満たす唯一の $T_x M$ の元である（$F^*$ は $F$ の双対ノルム）．$u \in H^1_{\mathrm{loc}}(M)$ に作用する**非線形ラプラシアン**$\boldsymbol{\Delta}$ を，

$$\int_M \phi \boldsymbol{\Delta} u \, dm := -\int_M D\phi(\boldsymbol{\nabla} u) \, dm \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$$

と弱い意味で定義する．Legendre 変換は内積空間以外では非線形なので，$\boldsymbol{\Delta}$ は非線形作用素である（$\boldsymbol{\Delta}(u_1 + u_2) = \boldsymbol{\Delta} u_1 + \boldsymbol{\Delta} u_2$ とは限らない）．このラプラシアンは $\mathrm{Ric}_N$ と相性が良く，例えばラプラシアンの比較定理が成り立つことが知られている（[OS1]）．次の性質は，我々の Bochner-Weitzenböck 公式の意味を考える上で重要である．

**注意 2.3** $u \in H_0^1(M)$ に対し，可測なベクトル場 $V$ で全ての $x \in M$ で $V(x) \neq 0$ かつ $\boldsymbol{\nabla} u(x) \neq 0$ ならば $V(x) = \boldsymbol{\nabla} u(x)$ を満たすものを取り，関数 $f$ の $g_V$ についての勾配ベクトル場を

$$\nabla^V f := \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(V) \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

で表す．このとき，$\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u} f$ を

$$\int_M \phi \Delta^{\boldsymbol{\nabla} u} f \, dm := -\int_M D\phi(\nabla^V f) \, dm \qquad \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$$

と定めると，$\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u} u = \boldsymbol{\Delta} u$ が成り立つ．つまり，線形作用素 $\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}$ と非線型作用素 $\boldsymbol{\Delta}$ は，$\underline{u\text{ に作用するときは}}$ 一致する．

ラプラシアン $\boldsymbol{\Delta}$ に対応する**非線形熱方程式** $\partial_t u = \boldsymbol{\Delta} u$ は，$F$ の正則性と強凸性より，それほど扱いにくい方程式ではない．実際，[OS1] で示されたように，任意の初期値 $u \in H_0^1(M)$ から始まる解 $(u_t)_{t \in [0,\infty)}$ が存在し，それは $x$ について $H^2_{\mathrm{loc}}$ かつ $(0,\infty) \times M$ 上 $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ である．更に，$(u_t)_{t \in [0,\infty)}$ は（$\overleftarrow{d}(x,y) := d(y,x)$ についての）Wasserstein 空間内の相対エントロピーの勾配流と一致する．

# 3　Bochner-Weitzenböck 公式

$u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ に対し，$M_u := \{x \in M \mid Du(x) \neq 0\}$ とおく．$M_u$ ではリーマン計量 $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ を考えることができ，点ごとの計算により次の Bochner-Weitzenböck 公式が得られる．

**定理 3.1 (点ごと Bochner-Weitzenböck 公式)** 任意の $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ に対し，

$$\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla} u)^2}{2}\right) - D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u) = \mathrm{Ric}_\infty(\boldsymbol{\nabla} u) + \|\boldsymbol{\nabla}^2 u\|^2_{HS(\boldsymbol{\nabla} u)} \tag{3.1}$$

が $M_u$ の各点で成り立つ．また，各 $N \in [n,\infty)$ に対し，

$$\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla} u)^2}{2}\right) - D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u) \geq \mathrm{Ric}_N(\boldsymbol{\nabla} u) + \frac{(\boldsymbol{\Delta} u)^2}{N} \tag{3.2}$$

がやはり $M_u$ の各点で成り立つ．

(3.1) で，$\boldsymbol{\nabla}^2 u$ は勾配ベクトル場 $\boldsymbol{\nabla} u$ の $\boldsymbol{\nabla} u$ を参照ベクトルとする共変微分 $D^{\boldsymbol{\nabla} u}(\boldsymbol{\nabla} u): TM \longrightarrow TM$ （[BCS] 参照），$\|\boldsymbol{\nabla}^2 u\|_{HS(\boldsymbol{\nabla} u)}$ はその $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ についての Hilbert-Schmidt ノルムを表す．(3.1) の証明は，本質的にリーマン多様体と同様の計算によって行われる（但し，全く同じではない，注意 3.2 参照）．最も重要な点は，正しい定式化（どこで $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ を使うか？）を見つけることにある．(3.2) は (3.1) から標準的な方法で導かれる．

**注意 3.2** (a) $D^{\boldsymbol{\nabla} u}(\boldsymbol{\nabla} u)$ の詳しい定義は述べなかったが，これは $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ についての共変微分とは異なることを注意する．両者は <u>$\boldsymbol{\nabla} u$ の積分曲線が測地線になる</u>ときは一致するが，これは $u$ への非常に強い制限である．(重みつきリッチ曲率の定義の過程で見たように，$\boldsymbol{\nabla} u$ の積分曲線が測地線になることは，$\mathrm{Ric}_\infty(\boldsymbol{\nabla} u)$ が $(M, g_{\boldsymbol{\nabla} u}, m)$ のリッチ曲率 $\mathrm{Ric}_\infty^{\boldsymbol{\nabla} u}(\boldsymbol{\nabla} u)$ と一致するための条件でもある.）従って，(3.1) は重みつきリーマン多様体 $(M, g_{\boldsymbol{\nabla} u}, m)$ の Bochner-Weitzenböck 公式とは <u>異なる</u>．

(b) 一方，(3.1) の左辺に現れる $\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}(F(\boldsymbol{\nabla} u)^2)$，$D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u)$ は $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ と $F$ で一致する（注意 2.3 参照）．

$M_u$ の外では，$\boldsymbol{\Delta} u$ などいくつかの量が点ごとには意味を持たないので，積分した形で考える必要がある．この点はリーマン多様体のときよりも慎重に議論する必要がある．

**定理 3.3 (積分版 Bochner-Weitzenböck 公式)** 任意の $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(M) \cap \mathcal{C}^1(M)$ で $\boldsymbol{\Delta} u \in H^1_{\mathrm{loc}}(M)$ であるものに対し，

$$\begin{aligned} &-\int_M D\phi\left(\nabla^{\boldsymbol{\nabla} u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla} u)^2}{2}\right)\right) dm \\ &= \int_M \phi\big\{D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u) + \mathrm{Ric}_\infty(\boldsymbol{\nabla} u) + \|\boldsymbol{\nabla}^2 u\|^2_{HS(\boldsymbol{\nabla} u)}\big\}\, dm \end{aligned} \tag{3.3}$$

が全ての $\phi \in H^1_c(M) \cap L^\infty(M)$ について成り立つ．また，各 $N \in [n, \infty)$ に対し，

$$-\int_M D\phi\left(\nabla^{\boldsymbol{\nabla} u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla} u)^2}{2}\right)\right) dm \geq \int_M \phi\left\{D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u) + \mathrm{Ric}_N(\boldsymbol{\nabla} u) + \frac{(\boldsymbol{\Delta} u)^2}{N}\right\} dm \quad (3.4)$$

が全ての非負関数 $\phi \in H^1_c(M) \cap L^\infty(M)$ について成り立つ．

# 4　応用

Bochner-Weitzenböck 公式は極めて有用な公式であり，リーマン多様体では数多くの応用が知られている．一方，フィンスラー多様体での研究は始まったばかりであり，これからの展開が期待される．ここでは，解析的な応用として，リッチ曲率の下限の下での勾配評価を考える．証明はリーマン多様体の場合と同様の議論（[Da] 参照）に沿って行われる．技術的な理由により，以降では $M$ をコンパクトとする．

熱方程式 $\partial_t u = \boldsymbol{\Delta} u$ の解 $u : [0, T] \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，可測ベクトル場の 1 助変数族 $(V_t)_{t \in [0,T]}$ で，全ての $(t, x) \in [0, T] \times M$ で $V_t(x) \neq 0$ かつ $\boldsymbol{\nabla} u_t(x) \neq 0$ なら $V_t(x) = \boldsymbol{\nabla} u_t(x)$ であるものを固定する．この $V$ についての時間に依存するラプラシアン $\Delta^V$（注意 2.3 参照）の生成する線形対称マルコフ推移作用素を $(P^{\boldsymbol{\nabla} u}_{s,t})_{0 \leq s < t \leq T}$ で表す．定理 3.3 の (3.3) を用いて，次が示される．

**定理 4.1 (Bakry-Émery 型勾配評価)** $(M, F, m)$ がある $K \in \mathbb{R}$ について $\mathrm{Ric}_\infty \geq K$ を満たすとし，$u : [0, T] \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ を熱方程式の解とする．このとき，任意の $0 \leq s < t \leq T$ と $x \in M$ に対し，

$$F\big(\boldsymbol{\nabla} u_t(x)\big)^2 \leq e^{-2K(t-s)} P^{\boldsymbol{\nabla} u}_{s,t}\big(F(\boldsymbol{\nabla} u_s)^2\big)(x) \quad (4.1)$$

が成り立つ．

(4.1) は，左辺に現れる非線形な作用 $u_s \longmapsto u_t$ と，右辺の線形な作用 $P^{\boldsymbol{\nabla} u}_{s,t}$ を混合した形となっている．

**注意 4.2** リプシッツ関数 $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ のリプシッツ定数 $\mathrm{Lip}\, f$ を

$$\mathrm{Lip}\, f := \sup_{x,y \in M} \frac{f(y) - f(x)}{d(x, y)}$$

と定義すると，連続な $u_0$ に対し，(4.1) より

$$\mathrm{Lip}(u_t) \leq e^{-Kt}\, \mathrm{Lip}(u_0)$$

が成り立つ．この性質は，リーマン多様体では熱流の Wasserstein 距離についての収縮性

$$W_2(u_t, \tilde{u}_t) \leq e^{-Kt} W_2(u_0, \tilde{u}_0) \quad (4.2)$$

と同値であることが知られている（[vRS]）．更に，この同値性はより一般の線形半群へ拡張されている（[Ku]）．一方，フィンスラー多様体では収縮性 (4.2) は成り立たない（[OS2]）．つまり，曲率次元条件や勾配評価と違い，収縮性には リーマン構造であること が本質的に必要である．

次に，$N$ が有限な場合には，(3.4) を用いて次が得られる．

**定理 4.3 (Li-Yau 型勾配評価)** $(M,F,m)$ がある $K\in\mathbb{R}$ と $N\in[n,\infty)$ について $\mathrm{Ric}_N\geq K$ を満たすとし，$K':=\min\{K,0\}$ とおく．このとき，正の値を取る熱方程式の解 $u:[0,T]\times M\longrightarrow(0,\infty)$ と任意の $(t,x)\in(0,T]\times M$，$\theta>1$ について，

$$F\big(\boldsymbol{\nabla}(\log u)(t,x)\big)^2-\theta\partial_t(\log u)(t,x)\leq N\theta^2\left(\frac{1}{2t}-\frac{K'}{4(\theta-1)}\right) \tag{4.3}$$

が成り立つ．

上の勾配評価を用いて，更に次が得られる．

**定理 4.4 (Li-Yau 型 Harnack 不等式)** $(M,F,m)$ がある $K\in\mathbb{R}$ と $N\in[n,\infty)$ について $\mathrm{Ric}_N\geq K$ を満たすとし，$K':=\min\{K,0\}$ とおく．このとき，非負の値を取る熱方程式の解 $u:[0,T]\times M\longrightarrow[0,\infty)$ と任意の $0<s<t\leq T$，$x,y\in M$，$\theta>1$ について，

$$u(s,x)\leq u(t,y)\cdot\left(\frac{t}{s}\right)^{\theta N/2}\exp\left(\frac{\theta d(x,y)^2}{4(t-s)}-\frac{\theta K'N(t-s)}{4(\theta-1)}\right) \tag{4.4}$$

が成り立つ．

特に $K=0$ の場合は $\theta$ を 1 に収束させることができ，すると (4.3)，(4.4) はそれぞれ

$$F\big(\boldsymbol{\nabla}(\log u)(t,x)\big)^2-\partial_t(\log u)(t,x)\leq\frac{N}{2t}$$
$$u(s,x)\leq u(t,y)\cdot\left(\frac{t}{s}\right)^{N/2}\exp\left(\frac{d(x,y)^2}{4(t-s)}\right)$$

となる．

# 5 発展

最後に，今後の課題について簡単に述べる．

- 応用では $M$ をコンパクトとしたが，これを（前向き）完備な空間に拡張したい．リーマン多様体における [Da] の議論では，カットオフ関数の構成でフィンスラー多様体ではそのままではうまく行かないところがある．

- 前節では解析的な応用のみを述べたが，リーマン多様体の場合のように幾何学的な応用もあるはずである．これについては引き続き研究中である．

## 参考文献


[BCS] D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen, An introduction to Riemann-Finsler geometry, Springer-Verlag, New York, 2000.

[Da] E. B. Davies, Heat kernels and spectral theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Ku] K. Kuwada, Duality on gradient estimates and Wasserstein controls, J. Funct. Anal. **258** (2010), 3758–3774.

[Oh1] S. Ohta, Finsler interpolation inequalities, Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), 211–249.

[Oh2] S. Ohta, Vanishing S-curvature of Randers spaces, Differential Geom. Appl. **29** (2011), 174–178.

[OS1] S. Ohta and K.-T. Sturm, Heat flow on Finsler manifolds, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1386–1433.

[OS2] S. Ohta and K.-T. Sturm, Non-contraction of heat flow on Minkowski spaces, Preprint (2010). Available at arXiv:1009.2312

[OS3] S. Ohta and K.-T. Sturm, Bochner-Weitzenböck formula and Li-Yau estimates on Finsler manifolds, Preprint (2011). Available at arXiv:1104.5276

[vRS] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature, Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), 923–940.

[Sh] Z. Shen, Lectures on Finsler geometry, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001.

[Vi] C. Villani, Optimal transport, old and new, Springer-Verlag, 2009.

[太田] 太田 慎一, 確率測度の空間の幾何学, 数学 第 63 巻 (2011), 21–42.