測度距離空間のリッチ曲率と熱流

太田 慎一 (京都大学・理)*

1. 序

曲率は空間の曲がり方を測る数値であり，リーマン多様体では局所座標系を通した計算で定義される．微分構造を持たない空間では曲率そのものを定義することはできないが,「曲率がある定数以上・以下」という条件を，それをリーマン多様体で特徴づける性質を通して定式化できることがある．そのような性質は曲率の本質を突いたものであり，リーマン多様体の場合に限っても示唆に富むものであることが多い．

微分構造を用いない曲率条件の代表例には Alexandrov-Toponogov の三角形比較定理を基にしたものがあり，その意味で「断面曲率が下や上から押さえられた距離空間」（**Alexandrov 空間**，**CAT 空間**）は広く研究されてきた（[BBI] など参照）．リッチ曲率で同様の定式化がどうすれば可能かは長い間未解決であったが,最適輸送理論を用いた興味深い手法により「リッチ曲率が下から押さえられた測度距離空間」という概念が Lott, Sturm, Villani によって導入され（[St2], [St3], [LV1], [LV2], [Vi2]），近年非常に活発に研究されている．本稿では，この「リッチ曲率が下から押さえられた測度距離空間」の定式化及び応用と（2–4 節; [太田] も参照)，そのような空間上の熱流についてのごく最近の進展（5 節; [GKO], [AGS2], [AGS3] 参照）を解説する．

2. Wasserstein 空間

始めに，最適輸送理論で用いられる (Kantorovich-Rubinstein-)Wasserstein 空間の基礎的な事実を述べる．最適輸送理論とは，確率測度 μ を別の確率測度 ν へ最小のコストで輸送する（押し出す）方法に関する理論であり，その最小輸送コストを μ と ν の間の距離と見なした距離空間が Wasserstein 空間である．より詳しくは [Vi1], [Vi2], [太田] を参照されたい．

(X,d) を完備可分距離空間とし，X 上のボレル確率測度全体のなす集合を $\mathcal{P}(X)$ で表す．各 $p\in[1,\infty)$ に対し，$\int_X d(x,y)^p\,\mu(dy)<\infty$ をある（よって全ての）$x\in X$ で満たす $\mu\in\mathcal{P}(X)$ のなす部分集合を $\mathcal{P}^p(X)$ で表す．また，台がコンパクトな確率測度のなす部分集合を $\mathcal{P}_c(X)\subset\bigcap_{p\in[1,\infty)}\mathcal{P}^p(X)$ で表す．X 上のボレル測度 m が与えられたとき，m について絶対連続な $\mu\in\mathcal{P}(X)$ のなす部分集合を $\mathcal{P}_{\mathrm{ac}}(X,m)$ と書く．

本研究は科学研究費若手研究（B）23740048 の助成を受けたものである．
* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学大学院理学研究科
e-mail: sohta@math.kyoto-u.ac.jp
web: http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~sohta/

2つの確率測度 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ に対し，直積空間上の確率測度 $\pi \in \mathcal{P}(X \times X)$ が任意のボレル集合 $A \subset X$ について

$$\pi(A \times X) = \mu(A), \qquad \pi(X \times A) = \nu(A)$$

を満たすとき，π は $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X \times X)$ の**カップリング**であるといい，μ, ν のカップリング全体を $\Pi(\mu, \nu)$ で表す．

定義 2.1 $p \in [1, \infty)$ に対し，$\mu, \nu \in \mathcal{P}^p(X)$ の間の L^p**-Wasserstein 距離**を

$$W_p(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \left(\int_{X \times X} d(x, y)^p \, \pi(dxdy) \right)^{1/p}$$

と定義し，$(\mathcal{P}^p(X), W_p)$ を X 上の L^p**-Wasserstein 空間**と呼ぶ．また，上の inf を実現する $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ を μ と ν の**最適カップリング**と呼ぶ．

実際に $(\mathcal{P}^p(X), W_p)$ は完備可分な距離空間になる．各点 $x \in X$ に x でのディラック測度 $\delta_x \in \mathcal{P}^p(X)$ を対応させることにより，(X, d) は $(\mathcal{P}^p(X), W_p)$ に等長的に埋め込まれる．列 $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^p(X)$ が W_p について $\mu \in \mathcal{P}^p(X)$ に収束するための必要十分条件は，μ_i が μ に弱収束し，かつ

$$\lim_{R \to \infty} \limsup_{i \to \infty} \int_{X \setminus B(x_0, R)} d(x_0, x)^p \, \mu_i(dx) = 0, \ B(x_0, R) := \{y \in X \,|\, d(x, r) < R\},$$

がある（よって全ての）$x_0 \in X$ について成り立つことである．特に (X, d) が有界ならば，W_p の定める位相は弱位相と一致する（逆に言うと，W_p は弱位相を距離づける）．Wasserstein 距離 W_p は底空間 (X, d) の距離という「horizontal な情報」を持っているため,「vertical な情報」にしか依らない全変動などとは全く違うものであることを注意する．

以降では $p = 2$ の場合のみを扱う．X がリーマン多様体の場合，Wasserstein 距離 W_2 についての最短線（測地線）は **Kantorovich ポテンシャル**と呼ばれる関数の勾配ベクトル場を用いて記述される．これはユークリッド空間の場合に Brenier [Br] によって示され，McCann [Mc] によりコンパクトリーマン多様体に，Fathi-Figalli [FF] や Figalli-Gigli [FG] により非コンパクトリーマン多様体に拡張された．$\mu, \nu \in \mathcal{P}^2(X)$ に対し，Kantorovich ポテンシャルとは，**Kantorovich 双対性**

$$\frac{1}{2} W_2(\mu, \nu)^2 = \sup \left\{ \int_X \psi \, d\nu - \int_X \varphi \, d\mu \,\middle|\, \psi(y) - \varphi(x) \le \frac{1}{2} d(x, y)^2 \right\} \tag{2.1}$$

の等号を与える可測関数の組を (φ, ψ) としたとき，φ のことを言う．

定理 2.2 ([FG]) (M,g)を完備リーマン多様体，m_gをgから定まる体積測度とする．任意の$\mu_0 \in \mathcal{P}^2_{\mathrm{ac}}(M,m_g)$と$\mu_1 \in \mathcal{P}^2(M)$に対し，$\mu_0(\Omega)=1$を満たす開集合$\Omega \subset M$とその上の局所弱凸関数$\varphi:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$で，次の性質を満たすものが存在する：勾配ベクトル場に沿うμ_0の押し出し

$$\mu_t := (\mathcal{T}_t)_\sharp \mu_0, \quad \mathcal{T}_t(x) := \exp_x\bigl(t\nabla\varphi(x)\bigr), \quad t \in (0,1),$$

がμ_0からμ_1への一意な最短測地線を与える．すなわち，

$$W_2(\mu_0,\mu_t) = tW_2(\mu_0,\mu_1), \quad W_2(\mu_t,\mu_1) = (1-t)W_2(\mu_0,\mu_1) \quad \forall t \in (0,1).$$

φが**局所弱凸**であるとは，任意の$x \in M$の十分小さい近傍$U \ni x$上で，$\varphi|_U$がある$K \in \mathbb{R}$に対しK**凸**になることである（つまり，任意のUに含まれる測地線$\gamma:[0,1] \longrightarrow U$に沿って

$$\varphi\bigl(\gamma(t)\bigr) \le (1-t)\varphi\bigl(\gamma(0)\bigr) + t\varphi\bigl(\gamma(1)\bigr) - \frac{K}{2}(1-t)td\bigl(\gamma(0),\gamma(1)\bigr)^2 \quad \forall t \in (0,1)$$

が成り立つ.）特にそのとき，Alexandrov-Bangertの定理よりφはΩの殆ど全ての点で2回微分可能であり，従って$\mathcal{T}_t$は1回微分可能である．νも絶対連続であるときには，$\mathcal{T}_1$の1回微分を用いた変数変換公式（Monge-Amperè等式）が成立する．

3. リッチ曲率の下限の特徴づけ

定理2.2より，Wasserstein空間の測地線は底空間の測地線に沿った測度の押し出し（輸送）として記述できる．従って，その挙動は測地線による変分の変分ベクトル場，つまりヤコビ場を通してリッチ曲率で制御できる．このような考え方はCordero-Erausquin, McCann, Schmuckenschläger [CMS]によって導入され，後にvon Renesse, Sturm [vRS]によりリッチ曲率の下限の特徴づけに利用された．

3.1. 重みのない場合

(M,g)をn次元リーマン多様体，m_gを体積測度とする．曲率に興味があるため，常に$n \ge 2$を仮定する．Ricをリッチテンソルとし，ある$K \in \mathbb{R}$と任意の$v \in TM$について$\mathrm{Ric}(v,v) \ge K|v|^2$が成り立つとき，リッチ曲率が$K$以上（$\mathrm{Ric} \ge K$）であると言う．

$\mu \in \mathcal{P}(M)$のm_gについての**相対エントロピー** $\mathrm{Ent}_{m_g}(\mu)$を，$\mu = \rho m_g \in \mathcal{P}_{\mathrm{ac}}(M,m_g)$かつ$\int_{\{\rho<1\}} \rho\log\rho\, dm_g > -\infty$なら

$$\mathrm{Ent}_{m_g}(\mu) := \int_M \rho\log\rho\, dm_g,$$

そうでなければ$\mathrm{Ent}_{m_g}(\mu) := \infty$と定義する．これはボルツマンエントロピーの符号を逆にしたものである．

定理 3.1 ([vRS]) (M,g) を完備リーマン多様体，$K\in\mathbb{R}$ とする．このとき，(M,g) のリッチ曲率が K 以上であるための必要十分条件は，Ent_{m_g} が K 凸である（すなわち，任意の W_2 についての最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}\subset\mathcal{P}^2(M)$ と $t\in[0,1]$ に対し，

$$\mathrm{Ent}_{m_g}(\mu_t)\le(1-t)\,\mathrm{Ent}_{m_g}(\mu_0)+t\,\mathrm{Ent}_{m_g}(\mu_1)-\frac{K}{2}(1-t)tW_2(\mu_0,\mu_1)^2 \tag{3.1}$$

が成り立つ）ことである．

$\mathrm{Ent}_{m_g}(\mu_0)=\infty$ もしくは $\mathrm{Ent}_{m_g}(\mu_1)=\infty$ ならば (3.1) は自明なため，$\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}^2_{\mathrm{ac}}(M,m_g)$ としてよく，その場合はその間の最短測地線は一意である（定理 2.2）．

$\mathrm{Ric}\ge K$ から Ent_{m_g} の K 凸性を導くには，$\mathrm{Ent}_{m_g}(\mu_t)$ の振る舞いをヤコビ場を通して評価する．逆向きは，次節で触れる Brunn-Minkowski 不等式を用いる．

3.2. 重みつきの場合

定理 3.1 で $\mathrm{Ric}\ge K$ が Ent_{m_g} の K 凸性と同値であることを見たが，実は $\mathrm{Ric}\ge K$ は次元 n に依存するより強い「エントロピーの凸性」とも同値である．それを述べるためには，体積測度 m_g に重みをつけた場合，すなわちある $\Psi\in C^\infty(M)$ を用いて $m=e^{-\Psi}m_g$ と m_g を変形した場合を考えた方がわかりやすい．このとき，対応する（m の振る舞いを制御する）リッチ曲率は，次元に当たるパラメータ $N\in[n,\infty]$ を込めて次のように定義される．

定義 3.2 n 次元重みつきリーマン多様体 $(M,g,e^{-\Psi}m_g)$ と単位接ベクトル $v\in TM$ に対し，v の**重みつきリッチ曲率**を以下のように定義する：$N\in(n,\infty)$ の場合は，

$$\mathrm{Ric}_N(v):=\mathrm{Ric}(v,v)+\mathrm{Hess}\,\Psi(v,v)-\frac{\langle\nabla\Psi,v\rangle^2}{N-n}.$$

$N=n,\infty$ の場合は，極限として，

$$\mathrm{Ric}_n(v):=\begin{cases}\mathrm{Ric}(v,v)+\mathrm{Hess}\,\Psi(v,v) & \text{if } \langle\nabla\Psi,v\rangle=0,\\ -\infty & \text{if } \langle\nabla\Psi,v\rangle\neq 0,\end{cases}$$

$$\mathrm{Ric}_\infty(v):=\mathrm{Ric}(v,v)+\mathrm{Hess}\,\Psi(v,v).$$

$\mathrm{Ric}_N(v)$ はパラメーター N について単調増加（$n\le N<N'\le\infty$ ならば $\mathrm{Ric}_N(v)\le\mathrm{Ric}_{N'}(v)$）であることに注意する．また，重みのない場合（$\Psi\equiv 0$）は，全ての $N\in[n,\infty]$ について $\mathrm{Ric}_N(v)=\mathrm{Ric}(v,v)$ である．Ric_∞ は解析学や確率論で重要な **Bakry-Émery テンソル**（[BE]）に他ならず，有限次元の場合は Qian [Qi] によって拡張されたものである（幾何的な応用については [Lo] なども参照）．

$N<\infty$ のとき，Ric_N は **Rényi エントロピー** S_N の挙動を制御する．ここでは簡単のため絶対連続な測度 $\mu=\rho m\in\mathcal{P}_{\mathrm{ac}}(M,m)$ のみを考え，

$$S_N(\mu):=-\int_M\rho^{(N-1)/N}\,dm$$

と定義する．$\mathrm{Ric}_N \geq K$ の特徴づけを述べるため，関数を2つ用意する．$K \in \mathbb{R}$, $N \in (1,\infty)$，$r \in (0,\infty)$ （$K>0$ のときは $r \in (0, \pi\sqrt{(N-1)/K})$）に対し，

$$\mathbf{s}_{K,N}(r) := \begin{cases} \sqrt{(N-1)/K}\sin(r\sqrt{K/(N-1)}) & \text{for } K>0, \\ r & \text{for } K=0, \\ \sqrt{-(N-1)/K}\sinh(r\sqrt{-K/(N-1)}) & \text{for } K<0. \end{cases}$$

また，$t \in (0,1)$ に対し，

$$\beta^t_{K,N}(r) := \left(\frac{\mathbf{s}_{K,N}(tr)}{t\mathbf{s}_{K,N}(r)}\right)^{N-1}, \qquad \beta^t_{K,\infty}(r) := e^{K(1-t^2)r^2/6}.$$

定理 3.3 ([St1], [St2], [St3], [LV1], [LV2]) (M,g,m) を n 次元完備重みつきリーマン多様体，$K \in \mathbb{R}$ とする．

(i) Ric_∞ が K 以上であるための必要十分条件は，Ent_m が（定義 3.1 と同じ意味で）K 凸であることである．

(ii) $N \in [n,\infty)$ に対し，Ric_N が K 以上であるための必要十分条件は，任意の最短測地線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathcal{P}^2_{\mathrm{ac}}(M,m)$（$\mu_t = \rho_t m$）と対応する最適カップリング $\pi \in \Pi(\mu_0,\mu_1)$，任意の $t \in [0,1]$ に対し，

$$\begin{aligned} &S_N(\mu_t) \\ &\leq -\int_{M\times M}\left\{(1-t)\left(\frac{\beta^{1-t}_{K,N}(d(x,y))}{\rho_0(x)}\right)^{1/N} + t\left(\frac{\beta^t_{K,N}(d(x,y))}{\rho_1(x)}\right)^{1/N}\right\}\pi(dxdy) \end{aligned}$$

が成り立つことである．

重みのない場合の (i) が定理 3.1 に当たる．$\mathrm{Ric}_N \leq \mathrm{Ric}_\infty$ より，(ii) の「エントロピーの凸性」は (i) より強い条件である．また，特に $K=0$ のとき，$\beta^t_{0,N} \equiv 1$ より (ii) の式は S_N の凸性

$$S_N(\mu_t) \leq (1-t)S_N(\mu_0) + tS_N(\mu_1)$$

を意味する．適切な方法で重みつきリッチ曲率を定義することにより，定理 3.3 はフィンスラー多様体に拡張される（[Oh2]）．フィンスラー多様体は各接空間にノルムが与えられた多様体である．

4. 曲率次元条件

定理 3.1, 3.3 で述べた（重みつき）リッチ曲率の下限の特徴づけは，微分構造を用いずに距離と測度のみで記述されている．従って，リッチ曲率そのものは意味を持たない測度距離空間 (X,d,m) についても，それらの性質を満たすことをもって

「Ric_N が K 以上である」と見なすことが可能であり，そのとき (X,d,m) は**曲率次元条件** $\mathsf{CD}(K,N)$ **を満たす**と言う（正確な定義は [St2], [St3], [LV1], [LV2], [Vi2, Part III], [太田] 参照，Sturm と Lott-Villani の定義は微妙に異なる）.

曲率次元条件 $\mathsf{CD}(K,N)$ から，Ric_N が K 以上のリーマン多様体と共通する様々な性質が導かれる．最適輸送を用いた証明自体も新しいものがあり興味深いが，ここでは結果のみを述べる.

定理 4.1 ([St3]) 測度距離空間 (X,d,m) がある $K\in\mathbb{R}$ と $N\in(1,\infty)$ について $\mathsf{CD}(K,N)$ を満たすとき，次が成り立つ.

(i) **（Bonnet-Myers の定理）** $K>0$ ならば，X の直径は $\pi\sqrt{(N-1)/K}$ 以下である.

(ii) **（Bishop-Gromov 体積比較定理）** 任意の $x\in X$ と $0<r<R<\infty$（$K>0$ のときは $R\le\pi\sqrt{(N-1)/K}$）に対し，

$$\frac{m(B(x,R))}{m(B(x,r))}\le\frac{\int_0^R \mathbf{s}_{K,N}(t)^{N-1}\,dt}{\int_0^r \mathbf{s}_{K,N}(t)^{N-1}\,dt}.$$

証明は，$B(x,R)$ 上の一様分布と x でのディラック測度に $\mathsf{CD}(K,N)$ を適用する．より一般に，2 つのボレル集合上の一様分布に $\mathsf{CD}(K,N)$ を適用することにより，**Brunn-Minkowski 不等式**を拡張したものが得られる（[vRS], [St3]）．これはリーマン多様体の場合でも曲率次元条件を用いて初めて証明された．尚，古典的な Brunn-Minkowski 不等式は，$A,B\subset\mathbb{R}^n$ に対し，$Z_t:=\{(1-t)x+ty\,|\,x\in A,\,y\in B\}$ の体積の n^{-1} 乗が t についての凹関数であることを主張するものであった（[Le, §2.2] 参照）.

次に，$K>0$ の場合に $\mathsf{CD}(K,N)$ が種々の関数不等式を導くことを見る．このような関係は Otto, Villani [OV] によって示唆され，Lott, Villani [LV1], [LV2] により組織的に調べられた.

定理 4.2 ([LV2]) (X,d,m) が $m(X)=1$ かつある $K>0$ について $\mathsf{CD}(K,\infty)$ を満たすとき，次が成り立つ.

(i) **（Talagrand 不等式）** 任意の $\mu\in\mathcal{P}^2(X)$ に対し，

$$\mathrm{Ent}_m(\mu)\ge\frac{K}{2}W_2(m,\mu)^2.$$

(ii) **（対数ソボレフ不等式）** 任意の $\int_X f^2\,dm=1$ なるリプシッツ関数 $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ に対し，

$$\mathrm{Ent}_m(f^2m)\le\frac{2}{K}\int_X|\nabla f|^2\,dm.$$

(iii) **(大域ポアンカレ不等式)** 任意の $\int_X f\,dm = 0$ なるリプシッツ関数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し,

$$\int_X f^2\,dm \le \frac{1}{K}\int_X |\nabla f|^2\,dm.$$

(i), (ii) は K 凸関数の基本的な性質から従い,(iii) は巧妙な計算による.(i) または (ii) からは測度の集中が導かれる([Le, §5.1, §6.1] 参照).$N < \infty$ で $\mathsf{CD}(K,N)$ が満たされる場合には,大域ポアンカレ不等式は **Lichnerowicz 不等式**

$$\int_X f^2\,dm \le \frac{N-1}{NK}\int_X |\nabla f|^2\,dm$$

に改良される([LV1]).

リッチ曲率が下から,次元が上から一様に押さえられたリーマン多様体の族は,**測度つき Gromov-Hausdorff 収束**([Fu] 参照)について収束する部分列を持つ(**Gromov の precompact 性**,[Gr, §5.A]).極限に現れる測度距離空間はもはや多様体とは限らないが,Cheeger と Colding による一連の研究 [CC] により,幾何構造などについての著しい結果が得られている.曲率次元条件は測度つき Gromov-Hausdorff 収束で保たれる([St2], [St3], [LV1], [LV2])ものの,フィンスラー多様体(特にノルム空間)でも満たされるため,リーマン多様体の極限空間の研究にどの程度有用かは不透明である.

5. 勾配流としての熱流

熱流は次の 2 通りの方法で**勾配流**と見なせる(本稿ではポテンシャル関数が減少する方向に進む勾配流を考える):

(I) L^2 空間でのエネルギーの勾配流.

(II) Wasserstein 空間での相対エントロピーの勾配流.

(I) の考え方は古典的である.実際,エネルギー $\mathcal{E}(f) = \int |\nabla f|^2/2$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f+tg) &= \frac{1}{2}\int \left\{|\nabla f|^2 + 2t\langle \nabla f, \nabla g\rangle + t^2|\nabla g|^2\right\} \\ &= \mathcal{E}(f) - t\langle \Delta f, g\rangle_{L^2} + O(t^2)\end{aligned}$$

であり,従って '$\nabla\mathcal{E}(f) = -\Delta f$' と見なせる.よって熱方程式 $\partial_t f = \Delta f$ は $\mathcal{E}$ の勾配流の方程式 '$\partial_t f = -\nabla\mathcal{E}(f)$' と同値になる.

(II) の視点はより新しく,(I) と (II) が一致することは始めに $\mathbb{R}^n$ の場合に Jordan, Kinderlehrer, Otto [JKO] により示され,その後リーマン多様体やフィンスラー多様体に拡張された([Sa], [Oh1], [Vi2, Chapter 23], [Er], [OS1]).これらの滑らかな空間では (I) のエネルギーの勾配流の解析はしやすく,(I)=(II) の証明は,相対エントロピーの勾配流が熱方程式を解くという方針で行われる.

最近，全く異なる方法により (I)=(II) は滑らかでない空間に拡張され，更に (I) と (II) の利点を合わせて豊富な（解析的）応用が得られることもわかってきた（[GKO], [AGS2], [AGS3]）．ここではまず滑らかな場合の従来の証明法の一例を概説し，それから滑らかでない場合の証明の概略及び応用を述べる．

5.1. (I)=(II) の 2 つの証明

簡単のため，この小節と次小節を通して (M, g) をコンパクトリーマン多様体とし，Ent_{m_g} を単に Ent と書く．空間の拡張については最後の小節で述べる．

まず，空間の微分構造を使う証明の一例を紹介する．Wasserstein 空間内の勾配流を定式化するために，曲線の接ベクトルと Ent の勾配ベクトルを次のように導入する．W_2 について局所リプシッツな曲線 $(\mu_t)_{t>0} \subset \mathcal{P}(M)$ に対し，**連続の方程式**

$$\partial_t \mu_t + \mathrm{div}(\Phi_t \mu_t) = 0$$

を弱い意味で解く，すなわち

$$\int_0^\infty \int_M \{\partial_t \phi + \langle \nabla \phi, \Phi \rangle\}\, d\mu_t dt = 0 \qquad \forall \phi \in C_c^\infty\big((0,\infty) \times M\big) \tag{5.1}$$

を満たす $(0,\infty) \times M$ 上のボレルベクトル場 Φ （$\Phi_t(x) := \Phi(t,x) \in T_x M$）が存在する．($(\mu_t)_{t>0}$ は M 上の分布の流れなので，その時間変化が M 上のベクトル場で記述されるのは自然である．）この Φ を $(\mu_t)_{t>0}$ の**接ベクトル場**と見なし，$\dot{\mu}_t := \Phi_t$ と書く．

一方，Ent が $\mu = \rho m_g$ で（W_2 で測って）最も減少する方向は，具体的な計算により $-\nabla\rho/\rho$ で与えられることがよく知られている（つまり，'$-\nabla \mathrm{Ent}(\mu) = -\nabla\rho/\rho$'）．勾配流の方程式 $\dot{\mu}_t = -\nabla\rho_t/\rho_t$ を連続の方程式 (5.1) に代入すると，

$$\int_0^\infty \int_M \{\rho_t \partial_t \phi - \langle \nabla \phi, \nabla \rho_t \rangle\}\, dm_g dt = 0 \qquad \forall \phi \in C_c^\infty\big((0,\infty) \times M\big).$$

従って $(\rho_t)_{t>0}$ は熱方程式 $\partial_t \rho = \Delta\rho$ の弱解である． $\square$

つぎに，主に空間の距離構造を使う新しい証明法を述べる．この場合は接ベクトルや勾配ベクトルそのものを扱うことは出来ないため，それらの「大きさ」のみを用いて議論する．このような勾配流の理論については [AGS1] を参照されたい．局所リプシッツな曲線 $(\mu_t)_{t>0} \subset \mathcal{P}(M)$ について，

$$|\dot{\mu}_t| := \lim_{s \to t} \frac{W_2(\mu_s, \mu_t)}{|s-t|}$$

は殆ど全ての $t > 0$ で存在する．$\mathrm{Ent}(\mu) < \infty$ である $\mu \in \mathcal{P}(M)$ について，

$$|\nabla \mathrm{Ent}|(\mu) := \limsup_{\nu \to \mu} \frac{\max\{\mathrm{Ent}(\mu) - \mathrm{Ent}(\nu), 0\}}{W_2(\mu, \nu)}$$

と定める（Entが減少する方向のみを考えた傾き）．このとき，任意の $0 < r < s$ に対し，

$$\mathrm{Ent}(\mu_s) \geq \mathrm{Ent}(\mu_r) - \frac{1}{2}\int_r^s \{|\dot{\mu}_t|^2 + |\nabla \mathrm{Ent}|(\mu_t)^2\}\, dt$$

が常に成り立つ．等号（すなわち‘$\leq$’）の成立は‘$\dot{\mu}_t = -\nabla \mathrm{Ent}(\mu_t)$’と同値であり，そのとき $(\mu_t)_{t>0}$ をEntの**勾配曲線**と呼ぶ．任意の始点からの一意な勾配曲線の存在が，Entの凸性（及びEntの特殊な性質）から従う（[Gi]）．

以上の議論より，$(\rho_t)_{t>0}$ がエネルギーの勾配流である $\mu_t = \rho_t m_g$ について，殆ど全ての $t > 0$ で次の3つの式を示せば十分である：

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{Ent}(\mu_t)] = -\int_M \frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t}\, dm_g, \tag{5.2}$$

$$|\nabla \mathrm{Ent}|(\mu_t)^2 \leq \int_M \frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t}\, dm_g, \tag{5.3}$$

$$|\dot{\mu}_t|^2 \leq \int_M \frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t}\, dm_g. \tag{5.4}$$

ここで，(5.3), (5.4) の右辺は μ_t の m_g についての **Fisher 情報量**である．(5.2) は熱方程式と部分積分から従い，(5.3) はよく知られた評価である．(5.4) は熱方程式の解と W_2 という一見関係のないものを結びつける最も重要で非自明な式であり，証明は次の桑田氏のアイディアによる．Kantorovich双対性 (2.1) より，

$$\frac{1}{2}W_2(\mu_t, \mu_{t+s})^2 = \sup_{\varphi}\left\{\int_M (Q_1\varphi)\, d\mu_{t+s} - \int_M \varphi\, d\mu_t\right\} \tag{5.5}$$

が成り立つ．但し，$Q_r\varphi$ で **Hamilton-Jacobi 半群**

$$Q_r\varphi(x) := \inf_{y\in M}\left\{\varphi(y) + \frac{d(x,y)^2}{2r}\right\} \quad \text{for } r \in (0,1], \qquad Q_0\varphi := \varphi,$$

を表した．これは **Hamilton-Jacobi 方程式**

$$\frac{d}{dr}(Q_r\varphi) + \frac{|\nabla(Q_r\varphi)|^2}{2} = 0$$

のHopf-Lax型の粘性解を与える．(5.5) そのものは古典的な式だが，ここでsupの中身を

$$\int_M \int_0^1 \frac{d}{dr}\big[(Q_r\varphi)\rho_{t+rs}\big]\, dr dm_g$$

と書き直す．積分の中身の r 微分のうち，ρ_{t+rs} を熱方程式，$Q_r\varphi$ を Hamilton-Jacobi方程式を用いて評価すると，(5.4) の式が得られる． $\square$

5.2. 応用

熱流を相対エントロピーの勾配流と見なすことにより，リッチ曲率と熱流の関係が見やすくなる．$K \in \mathbb{R}$ に対し $\mathrm{Ric} \geq K$ は Ent の K 凸性と同値であった（定理 3.1）．勾配流の一般論から期待されるように，Ent の K 凸性は熱流の K **収縮性**を導く．

定理 5.1 ([vRS]) $\mathrm{Ric} \geq K$ ならば，任意の熱方程式の解 $(\rho_t)_{t\geq 0}, (\sigma_t)_{t\geq 0}$ で $\mu_t = \rho_t m_g \in \mathcal{P}(M)$, $\nu_t = \sigma_t m_g \in \mathcal{P}(M)$ であるものに対し，

$$W_2(\mu_t, \nu_t) \leq e^{-Kt} W_2(\mu_0, \nu_0) \qquad \forall t > 0$$

が成り立つ（また逆も正しい）．

K 収縮性は更に次の **Bakry-Émery 型勾配評価**を導く．

定理 5.2 ([vRS]) $\mathrm{Ric} \geq K$ ならば，任意の熱方程式の解 $(u_t)_{t\geq 0}$ に対し，

$$|\nabla u_t|(x)^2 \leq e^{-2Kt} P_t(|\nabla u_0|^2)(x) \qquad \forall x \in M,\ \forall t > 0$$

が成り立つ（また逆も正しい）．但し，P_t を熱半群とした．

より一般の線形半群についても，上の収縮性と勾配評価は同値であることが知られている（[Ku]）．収縮性から勾配評価を導く方法の概略を述べる（[Ku] 参照）．p_t を熱核とし，$P_t\delta_x$ $(= p_t(x,\cdot)m_g)$ と $P_t\delta_y$ の最適カップリングを π_t とおくと，

$$\begin{aligned}
&u_t(x) - u_t(y) \\
&= \int_{M\times M} \{p_t(x,z)u_0(z) - p_t(y,w)u_0(w)\}\, m_g(dz)m_g(dw) \\
&= \int_{M\times M} \{u_0(z) - u_0(w)\}\, \pi_t(dzdw) \\
&\leq \bigg(\int_{M\times M} \frac{|u_0(z) - u_0(w)|^2}{d(z,w)^2}\, \pi_t(dzdw) \bigg)^{1/2} \bigg(\int_{M\times M} d(z,w)^2\, \pi_t(dzdw) \bigg)^{1/2}.
\end{aligned}$$

ここで K 収縮性より

$$\bigg(\int_{M\times M} d(z,w)^2\, \pi_t(dzdw) \bigg)^{1/2} = W_2(P_t\delta_x, P_t\delta_y) \leq e^{-Kt} d(x,y).$$

全体を $d(x,y)$ で割り $y \to x$ とすると，$P_t\delta_y \to P_t\delta_x$（$w \to z$）であり，

$$|\nabla u_t|(x) \leq e^{-Kt} \bigg(\int_M |\nabla u_0|^2\, d(P_t\delta_x) \bigg)^{1/2} = e^{-Kt} P_t(|\nabla u_0|^2)(x)^{1/2}.$$

□

5.3. 拡張について

距離構造を用いた (I)=(II) の証明は始めに [GKO] でコンパクト Alexandrov 空間の場合に行われ，Ambrosio, Gigli, Savaré [AGS2] により曲率次元条件 $\mathsf{CD}(K,\infty)$ をある $K \in \mathbb{R}$ について満たす測度距離空間にまで拡張された．[AGS2] の証明は基本的に [GKO] を踏襲しているが，エネルギー $\mathcal{E}$ の定義をより慎重に議論する必要がある．

$\mathsf{CD}(K,\infty)$ はフィンスラー多様体でも満たされるため，このようにして導入された熱流は線形とは限らない．線形性は空間が「リーマン的」であることを特徴づけていると考えられ，実際それはエネルギー $\mathcal{E}$ が双線形（更に Dirichlet 形式）であることと同値であることが [AGS3] で示されている．また，その場合には前小節で述べた応用（収縮性，勾配評価）も同様の議論により拡張される．一方，フィンスラー多様体では収縮性は成り立たないが（[OS2]），勾配評価は Bochner-Weitzenböck 公式を用いてある程度可能である（[OS3]）．

6. 今後の課題・展望

[AGS3] で導入された「リーマン的曲率次元条件」=「$\mathsf{CD}(K,\infty)$+ 熱流の線形性」は興味深い概念であり，更なる発展が期待される．一方，$N < \infty$ での対応する理論はリーマン多様体の場合でも不明な点が多く，今後の重要な課題である．

通常の曲率次元条件を満たす空間についても未だ基本的な問題の幾つかが未解決のままになっている．例えば，$K \neq 0$ かつ $N < \infty$ のときは局所的な $\mathsf{CD}(K,N)$ から大域的な $\mathsf{CD}(K,N)$ は導かれないと考えられているが，具体的な反例は見つかっていない（[BS], [DS] 参照）．これと関連して，リーマン多様体，フィンスラー多様体及びその極限以外に曲率次元条件を満たす面白い例があるかも検討すべき問題である．例えば，Wiener 空間は $\mathsf{CD}(1,\infty)$ を満たし（[St2], [FSS]），Heisenberg 群は全ての $K \in \mathbb{R}$ と $N \in (1,\infty]$ に対し $\mathsf{CD}(K,N)$ を満たさない（[Ju]）ことなどが知られている．

参考文献

[AGS1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[AGS2] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below, Preprint (2011). Available at arXiv:1106.2090

[AGS3] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below, Preprint (2011). Available at arXiv:1109.0222

[BS] K. Bacher, K.-T. Sturm, Localization and tensorization properties of the curvature-dimension condition for metric measure spaces, J. Funct. Anal. **259** (2010), 28–56.

[BE] D. Bakry and M. Émery, Diffusions hypercontractives (French), Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, 177–206, Lecture Notes in Math. **1123**, Springer, Berlin, 1985.

[Br] Y. Brenier, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 375–417.

[BBI] D. Burago, Yu. Burago and S. Ivanov, A course in metric geometry, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[CC] J. Cheeger and T. H. Colding, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I, II, III, J. Differential Geom. **46** (1997), 406–480; ibid. **54** (2000), 13–35; ibid. **54** (2000), 37–74.

[CMS] D. Cordero-Erausquin, R. J. McCann and M. Schmuckenschläger, A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb, Invent. Math. **146** (2001), 219–257.

[DS] Q. Deng, K.-T. Sturm, Localization and tensorization properties of the curvature-dimension condition for metric measure spaces, II, J. Funct. Anal. **260** (2011), 3718–3725.

[Er] M. Erbar, The heat equation on manifolds as a gradient flow in the Wasserstein space, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **46** (2010), 1–23.

[FSS] S. Fang, J. Shao, K.-T. Sturm, Wasserstein space over the Wiener space, Probab. Theory Related Fields **146** (2010), 535–565.

[FF] A. Fathi and A. Figalli, Optimal transportation on non-compact manifolds, Israel J. Math. **175** (2010), 1–59.

[FG] A. Figalli and N. Gigli, Local semiconvexity of Kantorovich potentials on non-compact manifolds, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **17** (2011), 648–653.

[Fu] K. Fukaya, Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator, Invent. Math. **87** (1987), 517–547.

[Gi] N. Gigli, On the heat flow on metric measure spaces: existence, uniqueness and stability, Calc. Var. Partial Differential Equations **39** (2010), 101–120.

[GKO] N. Gigli, K. Kuwada and S. Ohta, Heat flow on Alexandrov spaces, to appear in Comm. Pure Appl. Math.

[Gr] M. Gromov, Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces, Birkhäuser, Boston, MA, 1999.

[JKO] R. Jordan, D. Kinderlehrer and F. Otto, The variational formulation of the Fokker-Planck equation, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), 1–17.

[Ju] N. Juillet, Geometric inequalities and generalized Ricci bounds in the Heisenberg group, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), 2347–2373.

[Ku] K. Kuwada, Duality on gradient estimates and Wasserstein controls, J. Funct. Anal. **258** (2010), 3758–3774.

[Le] M. Ledoux, The concentration of measure phenomenon, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Lo] J. Lott, Some geometric properties of the Bakry-Émery-Ricci tensor, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 865–883.

[LV1] J. Lott and C. Villani, Weak curvature conditions and functional inequalities, J. Funct. Anal. **245** (2007), 311–333.

[LV2] J. Lott and C. Villani, Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport, Ann. of Math. **169** (2009), 903–991.

[Mc] R. J. McCann, Polar factorization of maps on Riemannian manifolds, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), 589–608.

[Oh1] S. Ohta, Gradient flows on Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces, Amer. J. Math. **131** (2009), 475–516.

[Oh2] S. Ohta, Finsler interpolation inequalities, Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), 211–249.

[OS1] S. Ohta and K.-T. Sturm, Heat flow on Finsler manifolds, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1386–1433.

[OS2] S. Ohta and K.-T. Sturm, Non-contraction of heat flow on Minkowski spaces, to appear in Arch. Ration. Mech. Anal.

[OS3] S. Ohta and K.-T. Sturm, Bochner-Weitzenböck formula and Li-Yau estimates on Finsler manifolds, Preprint (2011). Available at arXiv:1104.5276

[OV] F. Otto and C. Villani, Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality, J. Funct. Anal. **173** (2000), 361–400.

[Qi] Z. Qian, Estimates for weighted volumes and applications, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), 235–242.

[vRS] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature, Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), 923–940.

[Sa] G. Savaré, Gradient flows and diffusion semigroups in metric spaces under lower curvature bounds, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345** (2007), 151–154.

[St1] K.-T. Sturm, Convex functionals of probability measures and nonlinear diffusions on manifolds, J. Math. Pures Appl. **84** (2005), 149–168.

[St2] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. I, Acta Math. **196** (2006), 65–131.

[St3] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. II, Acta Math. **196** (2006), 133–177.

[Vi1] C. Villani, Topics in optimal transportation, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Vi2] C. Villani, Optimal transport, old and new, Springer-Verlag, 2009.

[太田] 太田 慎一, 確率測度の空間の幾何学, 数学 第63巻 (2011), 21–42.