

## 論 説

## 確率測度の空間の幾何学

太 田 慎 一

本論説の目的は、最適輸送理論の基礎の紹介と、最近の発展の主に幾何学的な側面の解説である。最適輸送理論とは、一言で言うと‘ある場所にあるものを他の場所へ最小のコストで移動する方法’を研究するものである。最適輸送理論はその成り立ちから自然に確率論や経済学と深く関わっており、20世紀終盤からは偏微分方程式論において再び活発に研究されはじめた。近年では幾何学や力学系とも結びついて新たな展開を見せている。興味を持たれた読者は、この分野の中心人物の1人である Villani の 1000 ページ近い大著 [Vi2] に歴史的背景や最近の発展も含めて詳述されているため、そちらを参照されたい。本論説も [Vi2] を大いに参考に行っている。その他の文献として [AGS], [RR], [Vi1] を挙げておく。

以下では、1節で基礎的な事柄を述べたあと、2節でユークリッド空間内の最適輸送について解説する。3節ではリーマン多様体内の最適輸送を扱い、そこで登場する、リッチ曲率の下限を特徴づける曲率次元条件は、次の4節で詳しく論じられる。最後の5節は曲率次元条件のフィンスラー多様体への拡張に当てられる。

本論説中では、測度  $\mu$  の写像  $f$  による押し出し (像測度) を  $f_{\#}\mu$  であらわす。また、距離空間  $(X, d)$  上のボレル確率測度全体のなす集合を  $\mathcal{P}(X)$ 、各  $p \in [1, \infty)$  に対し、ある  $x \in X$  で  $\int_X d(x, y)^p d\mu(y) < \infty$  を満たす  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  のなす部分集合を  $\mathcal{P}_p(X)$  であらわす。このとき、 $\mu(X)$  が有限であることから、三角不等式により  $\int_X d(x, y)^p d\mu(y) < \infty$  は全ての  $x \in X$  で成り立つことに注意する。台がコンパクトな確率測度のなす部分集合を  $\mathcal{P}_c(X) \subset \bigcap_{p \in [1, \infty)} \mathcal{P}_p(X)$  であらわす。

## 1 モンジュとカントロヴィチの問題

最適輸送理論のはじまりは、モンジュ (Gaspard Monge, 1746-1818) が18世紀に提出した次のような問題にあるとされる ([Mo], [Vi2, Chapter 3]): ‘ある (複数の) 場所から掘り出した土を別の場所での工事に使う。土の輸送費用を重さと移動距離の積とするとき、輸送にかかる費用の総和を最小にする方法を求めよ。’ ここで、掘り出す土の量と工事に必要な土の量は場所ごとにあらかじめ決められており、その総重量は一致するとしている。これは極めて自然な問いであり、また政治家として海軍大臣も務めたモンジュらしい実際的な問題である。モンジュはこの問題を以下のように数学的に定式化した:

**モンジュの問題** 与えられた  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^3)$  に対し、 $\Phi_{\#}\mu = \nu$  を満たす ( $\mu$  を  $\nu$  に輸送する) 可測写像  $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  の中で、輸送コスト

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|x - \Phi(x)\| d\mu(x) \quad (1.1)$$

を最小にするものを見つけよ. ここで  $\|\cdot\|$  は標準的ユークリッドノルムである. 最小値を与える  $\Phi$  を  $\mu$  から  $\nu$  への**最適輸送**という.

これは自然に, より一般の空間  $X, Y$  とコスト関数  $c: X \times Y \rightarrow (-\infty, \infty]$  について, 与えられた  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$  に対し,  $\Phi_{\#}\mu = \nu$  を満たす写像  $\Phi$  で  $\int_X c(x, \Phi(x)) d\mu(x)$  を最小にするものを見つけよ, という問題へ拡張される (これも含めてモンジュの問題と呼ばれる). 本論説で扱うのは  $X = Y$  が距離空間,  $c$  がその距離の 2 乗という状況である. モンジュ自身は解  $\Phi$  の満たすべき性質についての研究は残しているが (例えば, 最適輸送の道筋は途中で交わらない, [Vi2, Chapter 8]), 存在性の証明は与えなかった. 存在性が完全に解決されたのは, 次節の冒頭で述べるように, 最近のことである.

1940 年代になり, カントロヴィチ (Leonid Vital'evich Kantorovich, 1912-1986) は, 始めはモンジュの仕事は知らずに, 次のような問題を考察した ([Ka1], [Ka2]):

**カントロヴィチの問題** コンパクト距離空間  $X$  と非負連続関数  $c: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  が与えられたとする. 与えられた  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$  に対し,  $\mu$  と  $\nu$  のカップリング  $\pi \in \mathcal{P}(X \times X)$  で

$$\int_{X \times X} c(x, y) d\pi(x, y) \quad (1.2)$$

を最小にするものを見つけよ. そのような  $\pi$  を  $\mu$  と  $\nu$  の**最適カップリング**という.

ここで,  $\pi \in \mathcal{P}(X \times X)$  が  $\mu$  と  $\nu$  の**カップリング**であるとは, 自然な射影  $p_i(x_1, x_2) = x_i$  ( $i = 1, 2$ ) に対し  $(p_1)_{\#}\pi = \mu$  かつ  $(p_2)_{\#}\pi = \nu$  を満たすことである.  $\mu$  と  $\nu$  のカップリング全体のなす集合を  $\Pi(\mu, \nu)$  であらわす. 直積測度  $\mu \times \nu$  は  $\mu$  と  $\nu$  のカップリングであるが, これは効率の良い方法とは限らない (例えば, これから主に考える  $(X, d)$  が距離空間,  $c = d^2$  という状況では,  $\pi$  の台が対角成分  $\{(x, x) | x \in X\}$  に近いほど (1.2) は小さい).  $\Phi_{\#}\mu = \nu$  なる写像  $\Phi$  があつたとき,  $(\text{Id}_X \times \Phi)_{\#}\mu$  は  $\mu$  と  $\nu$  のカップリングであり, よってカントロヴィチの問題はモンジュの問題を拡張し, 条件を緩めたものである. カントロヴィチの設定は, その対称性とカップリングという条件の凸性 ( $\pi, \pi' \in \Pi(\mu, \nu)$  ならば  $(\pi + \pi')/2 \in \Pi(\mu, \nu)$ ) により, モンジュの設定よりも見通しが良くなっている ( $\Phi_{\#}\mu = \nu$  という条件は凸ではない). 次節で見ると, モンジュの問題はカントロヴィチの問題を経由して解けることが多い. また,  $\mu$  が 1 点のディラック測度で  $\nu$  はそうではないとき, モンジュの問題には明らかに解が存在しないが, カントロヴィチの問題は考えることができる. 尚, カントロヴィチは線型計画法に関する業績により 1975 年にノーベル経済学賞を受賞している.

20 世紀終盤から最適輸送理論は偏微分方程式論との関連の中で再び脚光を浴び, 更にリーマン幾何学や力学系とも結びついて活発に研究されている. そして今日では, 数学に限らず極めて広い分野に応用されている ([Vi2, Chapter 3], [Vi2] には 846 もの文献が引用されている).

最後に, 次節以降の準備のために, 表題の '確率測度の空間の幾何学' の展開される舞台である Wasserstein 空間の定義を与える. それは, カントロヴィチの問題のコスト (1.2) の最小値が  $\mu$  と  $\nu$  がどの程度近いかを表していると考え, それを  $\mu$  と  $\nu$  の間の距離としたものである.

**定義 1.1 (Wasserstein 空間)** 距離空間  $(X, d)$  と  $p \in [1, \infty)$  に対し,  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$  の間の  $L^p$ -

Wasserstein 距離を

$$d_p^W(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left( \int_{X \times X} d(x, y)^p d\pi(x, y) \right)^{1/p}$$

と定義し、 $(\mathcal{P}_p(X), d_p^W)$  を  $L^p$ -Wasserstein 空間という。

本論説で主に扱うのは  $p = 2$  の場合であり、そのときは単に Wasserstein 空間 (距離) という。各  $x \in X$  に  $x$  でのディラック測度  $\delta_x \in \mathcal{P}_2(X)$  を対応させることにより、 $X$  は  $(\mathcal{P}_2(X), d_2^W)$  に等長的に埋め込まれる。列  $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_p(X)$  が  $d_p^W$  について  $\mu \in \mathcal{P}_p(X)$  に収束するための必要十分条件は、 $\mu_i$  が  $\mu$  に弱収束し、かつ

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{X \setminus B(x_0, R)} d(x_0, x)^p d\mu_i(x) = 0$$

がある (よって全ての)  $x_0 \in X$  について成り立つことである。特に  $(X, d)$  が有界ならば、 $d_p^W$  の定める位相は弱位相と一致する (逆に言うと、 $d_p^W$  は弱位相を距離づける)。Wasserstein 距離  $d_p^W$  は底空間  $(X, d)$  の距離の情報を持っているため、全変動などとは全く違うものであることを注意しておく。例えば、 $\mu$  と  $\nu$  の台が共通部分を持たないとき  $\mu - \nu$  の全変動は 2 だが、台が十分小さくかつ互いに近ければ、Wasserstein 距離は小さい。

## 2 ユークリッド空間内の最適輸送

この節では、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  内の最適輸送を取り上げる。この最も基本的な状況においても、多くの非自明な現象が見られる。例えば、コスト  $c$  を標準的ユークリッド距離  $c(x, y) = \|x - y\|$  とする元々のモンジュの問題の状況での最適輸送写像の存在は、Sudakov [Su] で証明が与えられたがそれには誤りがあり、厳密な証明は幾分強い仮定の下でまず Evans–Gangbo [EG] によって、 $\mu$  の絶対連続性のみを仮定する一般の状況ではそれぞれ独立に Ambrosio [Am], Caffarelli–Feldman–McCann [CFM], Trudinger–Wang [TW] によって初めて与えられた ([BB1] も参照)。この状況での困難な点は、コスト  $c$  の凸性が高くないことにある。一方、本論説でこれ以降扱うのはより凸性の高い距離の 2 乗  $c(x, y) = \|x - y\|^2$  (または  $c(x, y) = \|x - y\|^2/2$ ) であり、この状況では最適輸送のシンプルで美しい記述ができる。また、次節以降で見ると、距離の 2 乗は曲率とも相性が良い。

### 2.1 Brenier の定理

Brenier は、距離の 2 乗をコストとするときの最適輸送はある関数の勾配ベクトル場で記述できることを示した ([KnSm], [BB1] も参照)。これは示唆に富んだ非常に深い定理である。

**定理 2.1 (Brenier [Br])** 確率測度  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$  をとり、 $\mu$  はルベーグ測度に対して絶対連続とする。このとき、ある  $\mathbb{R}^n$  上の凸関数  $f$  で写像  $\Phi := \nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が  $\mu$  から  $\nu$  への一意な最適輸送を与えるものが存在する。つまり、 $\Phi$  は  $\Phi_{\#}\mu = \nu$  かつ

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x - \Phi(x)\|^2 d\mu(x) = d_2^W(\mu, \nu)^2 \quad (2.1)$$

を満たす。

式 (2.1) より、写像  $\Phi$  から得られるカップリング  $\pi = (\text{Id}_{\mathbb{R}^n} \times \Phi)_{\#}\mu$  は  $\mu$  と  $\nu$  の最適カップリングを与える。換言すると、カントロヴィチの問題の解  $\pi$  の台はある写像  $\Phi$  のグラフ上に集中し、従って

4 論 説

同時にモンジュの問題の解を与える。特に、最適輸送は1つのマスを複数の場所に分割して運ぶことはない。また、最適輸送は常に直線(測地線)に沿って行われる。更に、アレクサンドロフの定理により凸関数  $f$  は殆ど至るところ2階微分可能であり、写像  $\Phi$  は殆ど至るところ1階微分可能である。

**注意 2.2** 一般に、 $\mu$  と  $\nu$  が滑らかな測度であっても  $\Phi$  は連続ですらない。このような不連続性は、 $\mu$  の台が凸でない場合や、台が凸であっても底空間が(ある点で)負曲率をもつ場合には不可避である。現在までのところ、 $\Phi$  がある程度の滑らかさを持つことが知られているのは、ユークリッド空間や球面などの特別な状況のみである ([Vi2, Chapter 12], [Fi] 参照)。

定理 2.1 の証明の粗筋を述べる。まず、 $\mathbb{R}^n$  上のリプシッツ関数の組  $(\varphi, \psi)$  で

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq \frac{\|x - y\|^2}{2}$$

を全ての  $x, y \in \mathbb{R}^n$  で満たすもののなす集合を  $\text{Lip}$  とおく。このとき、明らかに

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in \text{Lip}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\nu \right\} \leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\|x - y\|^2}{2} d\pi(x, y) \quad (2.2)$$

が成り立つ。左辺の上限を実現する  $(\varphi, \psi)$  を取ると、

$$\psi(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\|x - y\|^2}{2} - \varphi(x) \right\}, \quad \varphi(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\|x - y\|^2}{2} - \psi(y) \right\} \quad (2.3)$$

を満たす。等号  $\varphi(x) + \psi(y) = \|x - y\|^2/2$  が成立する  $(x, y)$  で  $x$  について微分して(不等号  $\leq$  は常に成り立つことに注意)、 $\nabla\varphi(x) = x - y$  を得る。よって  $\Phi(x) := x - \nabla\varphi(x) = \exp_x(-\nabla\varphi(x))$  として  $\pi := (\text{Id}_{\mathbb{R}^n} \times \Phi)_\# \mu$  とおくと、 $\pi$  について殆ど全ての  $(x, y)$  で  $\varphi(x) + \psi(y) = \|x - y\|^2/2$  が成り立つ。また、 $(\varphi, \psi)$  が (2.2) の上限を与えることより、 $\Phi_\# \mu = \nu$  でなければならない。従って、この  $(\varphi, \psi)$  と  $\pi$  により (2.2) で等号が成り立ち、これを**カントロヴィチ双対性**という。  $\Phi(x) = \nabla(\|\cdot\|^2/2 - \varphi)(x)$  より求める関数  $f$  は  $f = \|\cdot\|^2/2 - \varphi$  で与えられ、 $\psi$  を用いた表示  $f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\psi(y) - \|y\|^2/2 + \langle x, y \rangle\}$  より  $f$  は確かに凸関数である。

**注意 2.3**  $t \in [0, 1]$  に対し  $\Phi_t(x) := (1 - t)x + t\nabla f(x) = \exp_x(-t\nabla\varphi(x))$ ,  $\mu_t := (\Phi_t)_\# \mu$  とおくと、これは  $\mu_0 = \mu$  から  $\mu_1 = \nu$  への Wasserstein 空間  $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n, d_2^W))$  内の最短測地線を与える。更に、

$$\varphi_t(x) := -\frac{1}{t} \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\|x - y\|^2}{2} - t\varphi(y) \right\} = -\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{t}{2} \left\| \frac{x - y}{t} \right\|^2 - \varphi(y) \right\} \quad (2.4)$$

とおくと、 $\exp(-(1 - t)\nabla\varphi_t)$  は  $\mu_t$  から  $\mu_1$  への最適輸送を与える。一方、 $-\varphi_t$  は**ハミルトン・ヤコビ方程式**

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\|\nabla\phi\|^2}{2} = 0$$

の Hopf-Lax 型の(唯一の粘性)解である(ラグランジアンは  $\|\cdot\|^2/2$ , [Ev, §10.3.4] 参照)。ハミルトン・ヤコビ方程式は力学系、特に**弱 KAM 理論**で重要な役割を果たす。弱 KAM 理論と最適輸送理論の関係については [BB2], [FF], [Vi2, Chapter 8] 参照。

## 2.2 Wasserstein 空間のリーマン構造

Wasserstein 空間  $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n), d_2^W)$  は無限次元であるため、通常の意味でのリーマン構造は定義できない。しかし、前節の最適輸送の記述を用いると、幾分形式的ではあるがある種のリーマン構造を導入できる。定理 2.1 より確率測度  $\mu, \nu$  の間の最適輸送はある凸関数  $f$  を用いて  $\Phi = \nabla f$  によって与えられ、また  $\varphi = \|\cdot\|^2/2 - f$  として  $t \in [0, 1]$  に対し  $\Phi_t(x) = \exp_x(-t\nabla\varphi(x))$  とおくと、 $(\mu_t = (\Phi_t)_\# \mu)_{t \in [0, 1]}$  は  $\mu_0 = \mu$  から  $\mu_1 = \nu$  への Wasserstein 空間内の最短測地線を与える。すると、 $f$  が凸であるという条件は  $\|\cdot\|^2/2 - \varphi$  が凸であるという条件になる。逆に、 $\|\cdot\|^2/2 - \varphi$  が凸関数であるような関数  $\varphi$  と任意の  $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$  に対し、 $\Phi = \exp(-\nabla\varphi)$  は  $\mu$  から  $\Phi_\# \mu$  への最適輸送を与える。任意の  $C^2$  関数  $\phi$  に対し  $\|\cdot\|^2/2 + \varepsilon\phi$  は  $\varepsilon > 0$  が十分小さければ凸なので、 $\mu_t = [\exp(t\nabla\phi)]_\# \mu$  は  $t \in [0, \varepsilon]$  の範囲では最短測地線である。従って、この  $\nabla\phi$  を Wasserstein 空間の接ベクトルと考えることができる。

すると、次のように  $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n), d_2^W)$  のリーマン構造を定義するのは自然である ([Ot] 参照) :  $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$  での接空間を

$$T_\mu \mathcal{P}_2 := \overline{\{\nabla\varphi \mid \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}},$$

その内積を、 $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  に対し、

$$\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle_\mu := \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle d\mu$$

と定める。ここで、 $T_\mu \mathcal{P}_2$  の定義の閉包は内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$  から定まるノルムについてとり、内積は  $\{\nabla\varphi \mid \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}$  から  $T_\mu \mathcal{P}_2$  に連続的に拡張される。 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  は  $\mathbb{R}^n$  上の台がコンパクトな  $C^\infty$  関数全体のなす集合をあらわす。集合  $\{\nabla\varphi \mid \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}$  は  $\mu$  によらないため、このリーマン構造は等質的であるように見えるかもしれないが、内積が基点  $\mu$  によることから、実際には複雑な構造を持っている。Otto はこのリーマン構造から導かれる距離が Wasserstein 距離と一致し、更に断面曲率が非負であることを示した。後者については次節で距離空間の幾何学の観点からの説明を与える (命題 3.3 参照)。

## 2.3 Wasserstein 空間を用いた熱流の解釈

最適輸送理論と偏微分方程式論の関係のひとつのあらわれは、ある種の発展方程式の解が Wasserstein 空間上の関数の勾配流として実現できることにある。典型的な例は相対エントロピーの勾配流が熱流と一致することであり、これはユークリッド空間の場合に Jordan–Kinderlehrer–Otto [JKO] によって示された。ここで、 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  のルベグ測度  $L$  についての相対エントロピーは、 $L$  に対して絶対連続な  $\mu = \rho L$  については

$$\text{Ent}_L(\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho \log \rho dL, \tag{2.5}$$

それ以外の  $\mu$  については  $\text{Ent}_L(\mu) := \infty$  と定義される。[JKO] では、勾配流の方程式 ' $\partial(\rho L)/\partial t = -\nabla \text{Ent}_L(\rho L)$ ' の解  $\rho$  は熱方程式  $\partial\rho/\partial t = \Delta\rho$  を解くということが示された。相対エントロピーは情報理論などでは Kullback–Leibler divergence と呼ばれ、統計力学のボルツマンエントロピーとは符号が逆であることに注意する。従って、 $\mu$  が平らである方が相対エントロピーは小さく、特に  $\mu$

が有界集合  $A \subset \mathbb{R}^n$  上の一様分布  $\mu = L(A)^{-1}L|_A$  のときは,  $\text{Ent}_L(\mu) = -\log L(A)$  となる. 熱流は分布を平らにしていく流れであり, それが相対エントロピーの勾配流となることは直観的な理解と一致する.

[JKO] の勾配流の構成法を解説する. まず, 始点となる絶対連続な確率測度  $\mu_0 = \rho_0 L \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$  を選ぶ. 次に, 十分小さい  $\tau > 0$  に対し, 時間  $k\tau \in \mathbb{N}\tau$  での勾配流の離散近似を

$$\text{Ent}_L(\nu) + \frac{d_2^W(\mu^\tau((k-1)\tau), \nu)^2}{2\tau}$$

の最小値を与える  $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$  を  $\mu^\tau(k\tau) = \rho^\tau(k\tau)L$  と定めて, 帰納的に  $\{\mu^\tau(k\tau)\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  を定義する. すると近似の幅  $\tau$  を 0 に近づけていったとき,  $\rho^\tau$  は  $\rho_0$  を始点とする熱流  $\rho$  に  $L^1$  で弱収束する. 同様の議論でポテンシャル  $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  付きの場合も扱うことができ, そのとき関数  $\mu \mapsto \text{Ent}_L(\mu) + \int_{\mathbb{R}^n} V d\mu$  の勾配流は発展方程式  $\partial\rho/\partial t = \Delta\rho + \text{div}(\rho\nabla V)$  の解を与える.

勾配流に関する関連する結果として [Ma] と [AGS] を挙げておく. これらを踏まえて, [Oh4] や [Sa] では [JKO] の結果のリーマン多様体を含む一般の空間への拡張を試みているが, それについては次節で述べる. 熱流に関してより広く知られているのは,  $L^2$  空間内のディリクレエネルギーの勾配流が熱流に一致することであろう. このとき, ディリクレエネルギーは底空間に関わらず凸関数であるが, 相対エントロピーの凸性は底空間の幾何学的な構造, 具体的にはリッチ曲率の下からの評価を反映する. これも次節以降で詳しく扱う.

### 3 リーマン多様体内の最適輸送

この節ではリーマン多様体  $(M, g)$  内の最適輸送を取り上げる.  $M$  には  $g$  から定まる距離を入れ, その上の Wasserstein 空間  $(\mathcal{P}_2(M), d_2^W)$  を考えると,  $M$  の幾何学的な構造, 特に断面曲率やリッチ曲率の下からの評価と,  $(\mathcal{P}_2(M), d_2^W)$  の構造は密接に関係する. リーマン幾何に明るくない読者のために一言述べておくと, 断面曲率は 1 点からでる 2 本の測地線の遠ざかり方をあらわし (正曲率ではユークリッド空間より遅く, 負曲率では速く遠ざかる), そのトレースを取ったリッチ曲率は同心球の体積 (あるいは同心球面の面積) の増え方を制御する. 例えば,  $m_g$  を  $g$  から定まる体積測度とするとき, リッチ曲率が非負の  $n$  次元リーマン多様体の半径  $r, R$  の同心球の体積比は,

$$\frac{m_g(B(x, R))}{m_g(B(x, r))} \leq \left(\frac{R}{r}\right)^n$$

と同じ次元のユークリッド空間の球の体積比で上から押さえられる. これは Bishop–Gromov 体積比較定理の特別な場合であり, 球面の面積についての同様の評価を Bishop の不等式という ([Ch] など参照). 従って, リッチ曲率が最適輸送と関係することは直観的には理解できるであろう.

#### 3.1 McCann の定理

定理 2.1 によりユークリッド空間内の最適輸送は凸関数  $f$  の勾配ベクトル場  $\nabla f$  を  $\mathbb{R}^n$  への写像と見なしたものの, 或いは  $\|\cdot\|^2/2 - \varphi$  が凸であるような関数  $-\varphi$  の勾配ベクトル場と指数写像の合成  $\exp(-\nabla\varphi)$  で記述できた. これは,  $(d^2/2)$  凹関数という関数族を導入することでリーマン多様体に拡張できる.

$X, Y \subset M$  をコンパクト集合とする.  $X$  上の関数  $\varphi$  が  $(X, Y)$  に関して  $(d^2/2)$  凹であるというこ

とを,  $\varphi(x) = \inf_{y \in Y} \{d(x, y)^2/2 - \psi(y)\}$  を全ての  $x \in X$  で満たす関数  $\psi$  が存在することとして定義する ((2.3) と比べよ). このような  $\varphi$  は Lipschitz 連続であり, またリーマン多様体上の凸関数がそうであるように, 殆ど至るところ 2 階微分可能である.  $X, Y$  としては (コンパクトな台を持つ) 確率測度の台を含むように十分大きいものを取れば何でもよいので, 以降では省略する.

**定理 3.1 (McCann [Mc])**  $(M, g)$  を完備リーマン多様体,  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_c(M)$  をその上のコンパクトな台を持つ確率測度とし,  $\mu$  は  $m_g$  に対して絶対連続であるとする. このとき, ある  $(d^2/2)$  凹関数  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$  で写像  $\Phi := \exp(-\nabla\varphi)$  が  $\mu$  から  $\nu$  への一意な最適輸送を与えるものが存在する. つまり,  $\Phi_{\#}\mu = \nu$  かつ

$$\int_M d(x, \Phi(x))^2 d\mu(x) = d_2^W(\mu, \nu)^2$$

が成り立つ.

証明は前節のユークリッド空間の場合と同様にできる (実際, 前節の証明は [Mc] を参考にした). すなわち,  $X, Y$  を  $\mu, \nu$  の台を含むコンパクト集合とし,  $\varphi(x) + \psi(y) \leq d(x, y)^2/2$  を全ての  $x \in X, y \in Y$  で満たす Lipschitz 関数の組  $(\varphi, \psi)$  のなす族を  $\text{Lip}(X, Y)$  とおくと, カントロヴィチ双対性

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in \text{Lip}(X, Y)} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu \right\} = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{M \times M} \frac{d^2}{2} d\pi$$

の左辺の上限を与える  $(\varphi, \psi)$  の  $\varphi$  が求める  $(d^2/2)$  凹関数である. 定理 3.1 はアレクサンドロフ空間やフィンセラ多様体へも拡張される ([Be], [Oh6]).

### 3.2 リーマン多様体上の Wasserstein 空間のリーマン構造

定理 3.1 により, リーマン多様体上の Wasserstein 空間についても, ユークリッド空間の場合と同様に Otto 流のリーマン構造を定義できる ([Lo2] 参照). しかしここでは, 距離空間の幾何学を参考にしたより直接的な方法について述べる. そのためにまず, アレクサンドロフ空間の定義を復習する ([BBI], [塩谷] など参照).

実数  $k$  に対し,  $\mathbb{M}^2(k)$  で定断面曲率  $k$  を持つ完備単連結 2 次元リーマン多様体をあらわす. (すなわち,  $k = 1$  なら単位球面,  $k = 0$  ならユークリッド平面,  $k = -1$  なら双曲平面.) 距離空間  $(X, d)$  の任意の 2 点  $x, y$  に対し, 長さ  $d(x, y)$  の曲線  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  で  $\gamma(0) = x$  かつ  $\gamma(1) = y$  なるものが存在するとき (一意とは限らない),  $(X, d)$  を **測地空間** と呼ぶ. このような曲線  $\gamma$  で速さが一定のものを  $x$  から  $y$  への **最短測地線** と呼ぶ. 例えば, 完備リーマン多様体は測地空間である.

実数  $k$  を固定する. 測地空間  $(X, d)$  の 3 点  $x, y, z$  ( $k > 0$  ならば  $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) < 2\pi/\sqrt{k}$  とする) に対し,  $\mathbb{M}^2(k)$  内の 3 点  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  で,

$$d_{\mathbb{M}^2(k)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d_X(x, y), \quad d_{\mathbb{M}^2(k)}(\tilde{y}, \tilde{z}) = d_X(y, z), \quad d_{\mathbb{M}^2(k)}(\tilde{z}, \tilde{x}) = d_X(z, x)$$

を満たすものが等長変換を除いて一意に存在する. この三角形  $\Delta\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  を  $\Delta xyz$  の **比較三角形** といい,  $\tilde{y}$  から  $\tilde{z}$  への (一意な) 最短測地線を  $\gamma_{\tilde{y}\tilde{z}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}^2(k)$  であらわす.

**定義 3.2 (アレクサンドロフ空間)** 測地空間  $(X, d)$  の任意の 3 点  $x, y, z$  と  $y$  から  $z$  への任意の最短測地線  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  に対し,  $\mathbb{M}^2(k)$  内の比較三角形  $\Delta\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  との比較において,

$$d_X(x, \gamma(1/2)) \geq d_{\mathbb{M}^2(k)}(\tilde{x}, \gamma_{\tilde{y}\tilde{z}}(1/2)) \tag{3.1}$$

が成り立つとき、 $(X, d)$  を **曲率  $k$  以上のアレクサンドロフ空間** という。

直観的に言えば、アレクサンドロフ空間の三角形は定曲率空間の三角形よりも ‘太っている’。完備リーマン多様体が曲率  $k$  以上のアレクサンドロフ空間であるための必要十分条件は、断面曲率が  $k$  以上であることである。  $k = 0$  のとき、上の式 (3.1) は

$$d(x, \gamma(1/2))^2 \geq \frac{1}{2}d(x, y)^2 + \frac{1}{2}d(x, z)^2 - \frac{1}{4}d(y, z)^2 \quad (3.2)$$

と書き直せる。また、上の定義で不等式 (3.1) の符号を逆にしたものが満たされるとき、 $(X, d)$  は **CAT( $k$ ) 空間** であるという。完備単連結リーマン多様体が CAT( $k$ ) 空間であるための必要十分条件は、断面曲率が  $k$  以下であることである。

アレクサンドロフ空間 (や CAT( $k$ ) 空間) ではある種の接空間やその上の内積を考えることができる。具体的には、点  $x \in X$  の **方向空間**  $\Sigma_x$  (単位接球面に当たる) を  $x$  から出る速さ 1 の最短測地線の全体の、下で導入される角度  $\angle_x$  による完備化とする。  $\gamma, \eta \in \Sigma_x$  に対し、曲率条件 (3.1) より、  $\mathbb{M}^2(k)$  内の比較三角形での角度  $\angle \widetilde{\gamma(s)} \widetilde{x} \widetilde{\eta(t)}$  は  $s, t > 0$  について単調非増加 (CAT( $k$ ) 空間では単調非減少) であり、  $\gamma$  と  $\eta$  の間の **角度** を  $\angle_x(\gamma, \eta) := \lim_{s, t \downarrow 0} \angle \widetilde{\gamma(s)} \widetilde{x} \widetilde{\eta(t)}$  と定義できる。点  $x$  での **接錐**  $C_x$  (接空間に当たる) は  $(\Sigma_x, \angle_x)$  のユークリッド錐であり、 **内積**  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  は角度  $\angle_x$  を用いて自然に定められる。

アレクサンドロフ空間上の Wasserstein 空間については、次が知られている。

**命題 3.3** ([St3], [LV1]) (1) コンパクト測地空間  $(X, d)$  上の Wasserstein 空間  $(\mathcal{P}(X), d_2^W)$  が非負曲率アレクサンドロフ空間であるための必要十分条件は、底空間  $(X, d)$  が非負曲率アレクサンドロフ空間であることである。

(2) 測地空間  $(X, d)$  が非負曲率アレクサンドロフ空間でないとき、 $(\mathcal{P}(X), d_2^W)$  はどんな  $k \in \mathbb{R}$  についても曲率  $k$  以上のアレクサンドロフ空間にはならない。

**注意 3.4** 上の (1) は  $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n), d_2^W)$  が非負曲率を持っているという Otto の観察を説明する。一方、同様の関係は曲率の上からの評価については成り立たない。実際、 $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^2), d_2^W)$  でさえ CAT(0) 空間ではない ([AGS, Example 7.3.3] 参照)。

命題 3.3(1) の必要性は  $(X, d)$  が  $(\mathcal{P}(X), d_2^W)$  に等長的に埋め込まれていることから自明であり、十分性は  $\mathcal{P}(X)$  内の最短測地線を  $X$  内の最短測地線の族としてあらわし、それらについての曲率条件 (3.2) を積分することで得られる。また、(2) は  $X$  内に少しでも負に曲がった三角形があれば  $\mathcal{P}(X)$  には幾らでも負に曲がった三角形があることを主張する。この現象は次のようにして観察できる。  $X$  内に負に曲がった三角形  $\triangle xyz$  があつたとし、十分小さい  $\varepsilon > 0$  について  $\mathcal{P}(X)$  内の 3 点  $\delta_x, \mu_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\delta_x + \varepsilon\delta_y, \nu_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\delta_x + \varepsilon\delta_z$  を考える ( $d(y, z)$  は  $d(x, y)$  と  $d(x, z)$  に比べて十分小さいとする)。このとき、

$$d_2^W(\delta_x, \mu_\varepsilon) = \varepsilon d(x, y), \quad d_2^W(\delta_x, \nu_\varepsilon) = \varepsilon d(x, z), \quad d_2^W(\mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon) = \varepsilon d(y, z)$$

となり、三角形  $\triangle \delta_x \mu_\varepsilon \nu_\varepsilon$  は  $\triangle xyz$  の  $\varepsilon^{-2}$  倍だけ負に曲がっている。よって、 $\varepsilon$  を 0 に近づけていけば、幾らでも負に曲がった三角形が  $\mathcal{P}(X)$  内に存在することがわかる。この議論で本質的な点は、非負曲率性 (3.2) は距離の定数倍で不変であるが、曲率が負の定数以上であるという条件は不変ではないことであり、従って上のようなスケージングの議論によって曲率の下限は  $-\infty$  になってしまう。以



上の考察より, [Oh4] では次のような条件を導入した.

**定義 3.5 (一様平滑性)** ある定数  $S \geq 1$  が存在し, 測地空間  $(X, d)$  の任意の 3 点  $x, y, z$  と  $y$  から  $z$  への任意の最短測地線  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  に対して

$$d(x, \gamma(1/2))^2 \geq \frac{1}{2}d(x, y)^2 + \frac{1}{2}d(x, z)^2 - \frac{S^2}{4}d(y, z)^2 \quad (3.3)$$

が成り立つとき,  $(X, d)$  は **(2-) 一様平滑** であるという.

この条件は, バナッハ空間において Ball–Carlen–Lieb [BCL] によって導入されたものの非線型空間への一般化であり, 例えば  $L^p$  空間は  $2 \leq p < \infty$  のとき  $S = \sqrt{p-1}$  として一様平滑である. 他方,  $S = 1$  のときの一様平滑性 (3.3) は非負曲率性 (3.2) に他ならず, これは (リーマン多様体でない) フィンスラー多様体では成り立たない. (特に, (3.2) を満たすバナッハ空間はヒルベルト空間のみである.) つまり, 一様平滑性はバナッハ空間論の非線型化, 並びにアレクサンドロフ空間論のフィンスラー空間への拡張という 2 つの異なる道筋の交差する点にある ([Oh3], [Oh5] 参照).

命題 3.3(1) と同様にして, 次が示せる.

**命題 3.6** ([Oh4]) コンパクト測地空間  $(X, d)$  上の Wasserstein 空間  $(\mathcal{P}(X), d_2^W)$  が一様平滑であるための必要十分条件は,  $(X, d)$  が一様平滑であることである. このとき, 定数  $S$  は  $(X, d)$  と  $(\mathcal{P}(X), d_2^W)$  で等しい.

$(X, d)$  を曲率  $-1$  以上のアレクサンドロフ空間とすると,  $X$  の十分小さい近傍は一様平滑であり, 定数  $S$  は近傍を小さくするにつれて  $1$  に近づく, つまりリーマン構造に近づく. この評価を精密に行うことで,  $(X, d)$  を曲率  $-1$  以上のコンパクトアレクサンドロフ空間とするとき, 点  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  を始点とする 2 本の速さ  $1$  の最短測地線  $\alpha, \beta: [0, \varepsilon] \rightarrow \mathcal{P}(X)$  に対し, 極限  $\angle_\mu(\alpha, \beta) := \lim_{t \downarrow 0} \angle(\widetilde{\alpha}(t), \widetilde{\beta}(t))$  が存在し (比較三角形は  $M^2(0) = \mathbb{R}^2$  の中でとる), これを角度として接錐上の内積を定められる ([Oh4, Theorem 3.6]). ここで重要なのは極限  $\angle_\mu(\alpha, \beta)$  が  $s, t$  の  $0$  への収束の仕方に依らないことであり, これはバナッハ空間では成り立ち得ない. 従って, これはフィンスラー構造ではなく, 真にリーマン構造と呼ぶべきものである. 次小節で触れるように, このリーマン構造を用いてコンパクトリーマン多様体上の Wasserstein 空間内の勾配流を構成することができる.

### 3.3 相対エントロピーの凸性, 熱流の収縮性とリッチ曲率

前節では, ユークリッド空間上の Wasserstein 空間  $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n), d_2^W)$  内の (ルベーグ測度に対する) 相対エントロピーの勾配流が熱流に一致することを述べた. この熱流の特徴づけは, 勾配流の異なる定式化に基づいて, Ohta [Oh4], Savaré [Sa], Villani [Vi2] により (コンパクト) リーマン多様体に拡張された. この中で [Oh4] では, 前小節で導入した Wasserstein 空間のリーマン構造を用いて, Perel'man–Petrunin [PP], Lytchak [Ly] のアレクサンドロフ空間上の弱凸関数の勾配流を参考にした, 最も厳密な定式化を採用している. その際, 勾配流の構成には相対エントロピーの弱凸性が必要であるが, それはリッチ曲率を下から押さえることと同値である. すなわち, 次が成り立つ.

**定理 3.7 (von Renesse–Sturm [vRS])**  $(M, g)$  を完備コンパクトリーマン多様体,  $K$  を実数とするとき,  $(M, g)$  のリッチ曲率が  $K$  以上であるための必要十分条件は, 任意の  $(\mathcal{P}(M), d_2^W)$  内の最短測地線  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(M)$  と  $t \in [0, 1]$  に対し,

$$\text{Ent}_{m_g}(\alpha(t)) \leq (1-t)\text{Ent}_{m_g}(\alpha(0)) + t\text{Ent}_{m_g}(\alpha(1)) - \frac{K}{2}(1-t)t d_2^W(\alpha(0), \alpha(1))^2 \quad (3.4)$$

が成り立つことである。ここで、 $m_g$  は  $g$  から定まる体積測度である。

上の不等式 (3.4) が成り立つとき、 $\text{Ent}_{m_g}$  は  $K$  凸であるという。このエントロピーの凸性は、次節以降で詳しく扱う曲率次元条件の特別な場合である。直観的に説明すると、 $\alpha(0)$ 、 $\alpha(1)$  を半径  $r$  の開球上の一様分布としたとき、 $\alpha(1/2)$  は  $K > 0$  ならば半径  $r$  の球より大きい範囲に台を持ち、よってその相対エントロピーは  $\alpha(0)$ 、 $\alpha(1)$  の相対エントロピーより小さい。従って  $\text{Ent}_{m_g} \circ \alpha$  の凸性は  $K$  が大きいほど高くなる。

定理 3.7 の証明の方針をもう少し詳しく述べるために、関数を 2 つ準備する。 $K \in \mathbb{R}$ 、 $N \in (1, \infty)$ 、 $r \in (0, \infty)$  ( $K > 0$  のときは  $r \in (0, \pi\sqrt{(N-1)/K})$ ) に対し、

$$s_{K,N}(r) := \begin{cases} \sqrt{(N-1)/K} \sin(r\sqrt{K/(N-1)}) & (K > 0), \\ r & (K = 0), \\ \sqrt{-(N-1)/K} \sinh(r\sqrt{-K/(N-1)}) & (K < 0). \end{cases} \quad (3.5)$$

また、 $t \in (0, 1)$  に対し、

$$\beta_{K,N}^t(r) := \left( \frac{s_{K,N}(tr)}{ts_{K,N}(r)} \right)^{N-1}, \quad \beta_{K,\infty}^t(r) := e^{K(1-t^2)r^2/6}. \quad (3.6)$$

必要性の  $K = 0$  の場合は Cordero-Erausquin–McCann–Schmuckenschläger [CMS] によって得られており、一般の場合もその技法を用いる。まず  $\alpha$  は  $\alpha(0)$  から  $\alpha(1)$  への最適輸送なので、定理 3.1 よりある  $(d^2/2)$  関数  $\varphi$  が存在し、 $\Phi_t := \exp(-t\nabla\varphi)$  と定めて  $\alpha(t) = (\Phi_t)_\#(\alpha(0))$  が成り立つ。この  $\varphi$  は殆ど至るところ 2 階微分可能なので、 $\Phi_t$  は殆ど至るところ 1 階微分可能であり、更にそのヤコビアン  $\mathbf{J}[\Phi_t]$  は  $\alpha(0)$  と  $\alpha(1)$  の密度の比に一致する。つまり、 $\alpha(t) = \rho_t m_g$  としたとき、

$$\rho_0(x) = \mathbf{J}[\Phi_t](x) \cdot \rho_t(\Phi_t(x)) \quad (3.7)$$

が殆ど全ての  $x$  で成り立つ。従って、 $\rho_t$  の挙動を調べるためには  $\mathbf{J}[\Phi_t]$  の振る舞いを見ればよい。ある  $x \in M$  を止めて  $\gamma(t) := \Phi_t(x)$  とおく。 $\Phi_t$  は測地線の族  $t \mapsto \Phi_t(y) = \exp_y(-t\nabla\varphi(y))$  に沿った写像なので、 $\Phi_t$  の変分ベクトル場は  $\gamma$  に沿ったヤコビ場である。ヤコビ場の定義式とリッチ曲率を用いた計算により、 $\text{Ric} \geq K$  ならば、 $d = d(x, \Phi_1(x))$  とおいて

$$\mathbf{J}[\Phi_t](x)^{1/n} \geq (1-t)\beta_{K,n}^{1-t}(d)^{1/n} + t\beta_{K,n}^t(d)^{1/n}\mathbf{J}[\Phi_1](x)^{1/n} \quad (3.8)$$

が成り立つ。 $(\alpha(1)$  がディラック測度ならば (3.8) は  $\mathbf{J}[\Phi_t](x) \geq (1-t)^n\beta_{K,n}^{1-t}(d)$  となり、これは Bishop の比較定理に他ならない。) この不等式と計算による評価

$$\log [\beta_{K,n}^{1-t}(d)^{1-t} \cdot \beta_{K,n}^t(d)^t] \geq \frac{K}{2}(1-t)td^2$$

を変数変換 (3.7) と合わせて、求める  $K$  凸性 (3.4) を得る。十分性は、ある測地線  $\gamma: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$  の端点を中心とする半径  $r$  の開球上の一様分布に  $t = 1/2$  として (3.4) (より詳しくは後述するブルン・ミンコフスキ不等式、定理 4.9) を適用し、 $\varepsilon$  と  $r$  を 0 に近づけていけば得られる。

一方、熱流とリッチ曲率の関係については、次が知られている。

**定理 3.8 (von Renesse–Sturm [vRS])** ( $(M, g)$  を完備リーマン多様体、 $K$  を実数とするとき、

$(M, g)$  のリッチ曲率が  $K$  以上であるための必要十分条件は、任意の  $x, y \in M$  と  $t > 0$  に対し

$$d_2^W(p(t, x, \cdot)m_g, p(t, y, \cdot)m_g) \leq e^{-tK}d(x, y) \quad (3.9)$$

が成り立つことである。ここで、 $p: (0, \infty) \times M \times M \rightarrow [0, \infty)$  は  $M$  の熱核をあらわす。

この熱核の収縮性 (3.9) は、勾配流の一般論により相対エントロピーの  $K$  凸性 (3.4) から期待される性質であるが、前小節で導入した  $(\mathcal{P}(M), d_2^W)$  のリーマン構造を用いて実際に上の定理の必要性の別証明を与えることができる ([Oh4, Corollary 6.8])。その証明では  $\text{Ent}_{m_g}$  及び  $d_2^W$  についての第一変分公式を用いるが、その記述には角度が必要であり、従って  $(\mathcal{P}(M), d_2^W)$  が (フィンスラー構造ではなく) リーマン構造を持つことが本質的である。

最後にリッチ流との興味深い関係を述べて、この節を終える。多様体  $M$  の時間変化するリーマン計量  $g(\tau)$  ( $\tau \in [a, b]$ ) を考える。  $g$  がリッチ流の時間の向きを逆にした発展方程式  $\partial g / \partial \tau = 2 \text{Ric}_{g(\tau)}$  を満たすとき、**逆向きリッチ流**であるという。ここで、 $\text{Ric}_{g(\tau)}$  は時刻  $\tau$  でのリーマン計量  $g(\tau)$  についてのリッチ曲率テンソルをあらわす。このような  $(M, g(\tau))$  はリッチ曲率が非負の (時間変化しない) リーマン多様体と類似の性質を持つことが知られている。  $(M, g(\tau))$  の熱方程式を、  $g(\tau)$  に付随するラプラシアンを  $\Delta_{g(\tau)}$  であらわして、

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \Delta_{g(\tau)} u \quad (3.10)$$

で定める。このとき、次の著しい関係が成り立つ。

**定理 3.9 (McCann–Topping [MT])**  $M$  をコンパクトリーマン多様体、  $g(\tau)$  ( $\tau \in [a, b]$ ) をその時間変化するリーマン計量とする。このとき、任意の  $\int_M u_\tau dm_{g(\tau)} = \int_M v_\tau dm_{g(\tau)} \equiv 1$  なる熱方程式 (3.10) の非負解  $u_\tau = u(\tau, \cdot)$ ,  $v_\tau = v(\tau, \cdot)$  に対し  $d_2^W(u_\tau m_{g(\tau)}, v_\tau m_{g(\tau)})$  が  $\tau$  についての単調非増加関数であるための必要十分条件は、  $g$  が微分不等式

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} \leq 2 \text{Ric}_{g(\tau)} \quad (3.11)$$

を満たすことである。

特に、逆向きリッチ流に付随する熱流は非拡散性を持つ。直観的には、(3.11) は負曲率を持つ部分を縮めることによってその効果を打ち消し、結果として非負曲率を持っているような振る舞いが現れてくる。このような Wasserstein 空間の勾配流とリッチ流の関係、更には Perelman のポアンカレ予想と幾何化予想の解決で用いられた手法に関連する進展については、[Lo3], [To] も参照。

#### 4 曲率次元条件

前節の定理 3.7 で相対エントロピーの  $K$  凸性とリッチ曲率が  $K$  以上であることの同値性を見たが、これは曲率次元条件、更には  $N$  リッチ曲率という、より広い枠組みの中の特別な場合と見なせる。これらの条件は微分構造を必要とせず、測地空間  $(X, d)$  とその上のボレル測度  $m$  で任意の開球の測度が正で有限なもの組  $(X, d, m)$  に対して定義できる。以降では、この組  $(X, d, m)$  を単に測度距離空間という。測地空間とは任意の 2 点の間に最短線が引ける距離空間であった。離散的な空間への拡張に向けての試みについては、[O1] など参照。

#### 4.1 測地空間内の最適輸送

微分構造を持たない一般の距離空間では、定理 2.1, 3.1 のように、ある関数の勾配ベクトル場と指数写像を用いて最適輸送を記述することは不可能である。しかし、測地空間では少なくとも測地線という概念は意味があり、最適輸送は測地線のなす集合上の確率測度（言い換えれば、測地線の族）を用いて記述される。

$(X, d)$  を測地空間とする。  $\Gamma(X)$  を  $X$  の最短測地線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  全体のなす集合とし、その距離構造を  $d_{\Gamma(X)}(\gamma_1, \gamma_2) := \sup_{t \in [0, 1]} d_X(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  で定める。各  $t \in [0, 1]$  に対し、写像  $e_t : \Gamma(X) \rightarrow X$  を  $e_t(\gamma) := \gamma(t)$  と定義し、これは連続であることに注意する。

**命題 4.1 ([LV1])**  $(X, d)$  をコンパクト測地空間とする。このとき  $(\mathcal{P}(X), d_2^W)$  は測地空間であり、また任意の  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$  とその間の最短測地線  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(X)$  に対し、あるボレル確率測度  $\Xi \in \mathcal{P}(\Gamma(X))$  が存在し、  $(e_0 \times e_1)_\# \Xi$  は  $\mu$  と  $\nu$  の最適カップリングを与え、かつ  $(e_t)_\# \Xi = \alpha(t)$  が全ての  $t \in [0, 1]$  で成り立つ。

#### 4.2 $N$ リッチ曲率 (LV) と曲率次元条件 (CD)

$(X, d, m)$  を測度距離空間とする。Lott–Villani [LV1], [LV2] は、**displacement convex 関数**という概念を用いて ' $N$  (次元) リッチ曲率が  $K$  以上である' という条件を導入した。まず  $N \in [1, \infty)$  に対し、 $\mathcal{DC}_N$  を連続凸関数  $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  で  $U(0) = 0$  かつ  $\varphi(s) = s^N U(s^{-N})$  が  $(0, \infty)$  上凸であるもの全体のなす集合とする。同様にして、連続凸関数  $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  で  $U(0) = 0$  かつ  $\varphi(s) = e^s U(e^{-s})$  が  $\mathbb{R}$  上凸であるもの全体を  $\mathcal{DC}_\infty$  であらわす。この  $\mathcal{DC}_N$  は  $N$  についての単調減少列である、つまり、 $N < N' (\leq \infty)$  ならば  $\mathcal{DC}_{N'} \subset \mathcal{DC}_N$  が成り立つ。  $U'(\infty) := \lim_{r \rightarrow \infty} U(r)/r$  とおき、  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  を  $\mu = \rho m + \mu^s$  とルベーク分解して、

$$U_m(\mu) := \int_X U(\rho) dm + U'(\infty) \mu^s(X)$$

と定める ( $U'(\infty) = \infty$  のときは  $\infty \cdot 0 = 0$  とする)。  $N < \infty$  のとき、 $\mathcal{DC}_N$  の最も重要な元は  $U(r) = Nr(1 - r^{-1/N})$  であり、これは **Rényi エントロピー**

$$U_m(\rho m) = N - N \int_X \rho^{1-1/N} dm \quad (4.1)$$

を導く。更に、 $N$  を無限大に発散させた極限として、 $U(r) = r \log r \in \mathcal{DC}_\infty$  と相対エントロピー  $U_m(\rho m) = \int_X \rho \log \rho dm = \text{Ent}_m(\rho m)$  が得られる。

**定義 4.2 ( $N$  リッチ曲率,  $\text{LV}(K, N)$ )**  $(X, d, m)$  を測度距離空間とする。  $K \in \mathbb{R}$ ,  $N \in (1, \infty]$  に対し次が成り立つとき、  $(X, d, m)$  は  **$K$  以上の  $N$  リッチ曲率を持つ** という (以降、これを  $\text{LV}(K, N)$  と略記する) : 任意の  $\mu_0 = \rho_0 m + \mu_0^s, \mu_1 = \rho_1 m + \mu_1^s \in \mathcal{P}_c(X)$  に対し、ある  $\mu_0$  から  $\mu_1$  への最短測地線  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(X)$  が存在し、全ての  $U \in \mathcal{DC}_N$  と  $t \in (0, 1)$  で

$$\begin{aligned} U_m(\alpha(t)) &\leq (1-t) \int_{X \times X} \beta_{K, N}^{1-t}(d(x, y)) U\left(\frac{\rho_0(x)}{\beta_{K, N}^{1-t}(d(x, y))}\right) d\pi_x(y) dm(x) \\ &\quad + t \int_{X \times X} \beta_{K, N}^t(d(x, y)) U\left(\frac{\rho_1(y)}{\beta_{K, N}^t(d(x, y))}\right) d\pi_y(x) dm(y) \\ &\quad + U'(\infty) \{(1-t)\mu_0^s(X) + t\mu_1^s(X)\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

が成り立つ。ここで、 $\pi$  は命題 4.1 によって得られる  $\alpha$  に付随する  $\mu_0$  と  $\mu_1$  の最適カップリングであり、 $\pi_x, \pi_y$  はそれを  $\mu_0, \mu_1$  を用いて  $d\pi(x, y) = d\pi_x(y)d\mu_0(x) = d\pi_y(x)d\mu_1(y)$  と分解したものをあらわす。(関数  $\beta_{K,N}^t$  の定義は (3.6) 参照.)

$\mu_0, \mu_1$  が共に絶対連続である場合には (4.2) の右辺の最後の項は現れず、

$$U_m(\alpha(t)) \leq (1-t) \int_{X \times X} \frac{\beta_{K,N}^{1-t}(d(x,y))}{\rho_0(x)} U\left(\frac{\rho_0(x)}{\beta_{K,N}^{1-t}(d(x,y))}\right) d\pi(x,y) \\ + t \int_{X \times X} \frac{\beta_{K,N}^t(d(x,y))}{\rho_1(y)} U\left(\frac{\rho_1(y)}{\beta_{K,N}^t(d(x,y))}\right) d\pi(x,y)$$

という、より対称性の高い式になる。実際には (4.2) は絶対連続な場合で満たされれば十分である ([LV1], [FV] 参照)。  $N = \infty$  かつ  $U(r) = r \log r$  のときはこの式は相対エントロピーの  $K$  凸性 (3.4) に他ならない。Lott–Villani とは独立に、Sturm [St3], [St4] も本質的に等しい条件を導入した。

**定義 4.3 (曲率次元条件,  $CD(K, N)$ )**  $(X, d, m)$  を測度距離空間とする。  $K \in \mathbb{R}$ ,  $N \in (1, \infty]$  に対し、定義 4.2 の性質が絶対連続な  $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_c(X)$  と、  $N = \infty$  のときは  $U(r) = r \log r$ ,  $N < \infty$  のときは全ての  $N' \in [N, \infty]$  について  $U(r) = N'r(1 - r^{-1/N'})$  で成り立つとき、  $(X, d, m)$  は**曲率次元条件  $CD(K, N)$  を満たす**という。

以降では、LV と CD を区別せず、合わせて曲率次元条件と呼ぶことがある。

**注意 4.4** (a)  $X$  の 4 点  $z, x_0, x_1, x_2$  に対し、  $z$  が  $x_0$  と  $x_1$ ,  $x_0$  と  $x_2$  の中点 (つまり、  $i = 0, 1, 2$  に対し  $2d(z, x_i) = d(x_0, x_1) = d(x_0, x_2)$ ) ならば  $x_1 = x_2$  であるとき、  $(X, d)$  は**非分岐 (nonbranching)** であるという。例えば、リーマン多様体やアレクサンドロフ空間は非分岐である。  $(X, d, m)$  が非分岐なコンパクト測度距離空間であるとき、絶対連続な測度の間の最適輸送は一意に定まり、(4.2) を  $\mu_0, \mu_1$  の台を細かく分割して適用することができる。それを再び積分することで、  $U(r) = Nr(1 - r^{-1/N})$  についての (4.2) は  $CD(K, N)$  と  $LV(K, N)$ , 更には (Borell–) Brascamp–Lieb 不等式も導く ([St4], [Ba] 参照)。但し、次節で見ると  $CD(K, N)$  はバナッハ空間でも成り立つ条件であり ( $n$  次元バナッハ空間は  $LV(0, n)$  を満たす)、非分岐性は  $CD(K, N)$  からは従わない。

(b) 非分岐なコンパクト測度距離空間  $(X, d, m)$  では、  $CD(K, \infty)$  は局所的な条件であることが知られている ([St3, Theorem 4.17])。つまり、  $(X, d, m)$  が局所的に  $CD(K, \infty)$  を満たせば、それは大域的にも成り立つ。これはリーマン多様体の曲率が局所的に定義されることから期待される性質であり、実際アレクサンドロフ空間の定義は局所的な条件である。しかし、非分岐ではない測度距離空間や、また非分岐であっても  $N < \infty$  のときには、  $CD(K, N)$  が局所的な条件かどうかはわかっていない。

前節の定理 3.7 の証明で用いた技法をより精密に適用することで、リーマン多様体では LV と CD はリッチ曲率を下から押さえることと同値であることがわかり、更にそれは重みつき状況にまで拡張される。リーマン多様体  $(M, g)$  と、ある  $C^\infty$  関数  $\psi \in C^\infty(M)$  を用いて  $m = e^{-\psi} m_g$  と書ける  $M$  上の測度  $m$  との 3 つ組を、**重みつきリーマン多様体**という。重みつきリーマン多様体ではリッチ曲率は次元に当たるパラメータ  $N \in [n, \infty]$  をこめて次のように変形される。

**定義 4.5 (重みつきリッチ曲率)**  $n$  次元重みつきリーマン多様体  $(M, g, e^{-\psi} m_g)$  と単位接ベクトル  $v \in TM$  に対し、  $v$  の**重みつきリッチ曲率**を以下のように定義する：

- (1)  $\langle \nabla \psi, v \rangle = 0$  ならば  $\text{Ric}_n(v) := \text{Ric}(v) + \text{Hess } \psi(v, v)$ ,  $\langle \nabla \psi, v \rangle \neq 0$  ならば  $\text{Ric}_n(v) := -\infty$ .  
 (2)  $N \in (n, \infty)$  に対し,  $\text{Ric}_N(v) := \text{Ric}(v) + \text{Hess } \psi(v, v) - \langle \nabla \psi, v \rangle^2 / (N - n)$ .  
 (3)  $\text{Ric}_\infty(v) := \text{Ric}(v) + \text{Hess } \psi(v, v)$ .

$n \leq N < N' \leq \infty$  であれば  $\text{Ric}_N(v) \leq \text{Ric}_{N'}(v)$  であることに注意する. 無限次元の場合の  $\text{Ric}_\infty$  は Bakry–Émery テンソル [BE] に他ならず, 有限次元の場合は Qian [Qi] によって拡張されたものである. 重みつきリーマン多様体の解析的, 幾何的な研究については [Lo1] なども参照.

**定理 4.6** ([St2], [St3], [St4], [LV1], [LV2])  $(M, g, e^{-\psi} m_g)$  を重みつき完備  $n$  次元リーマン多様体とすると,  $K \in \mathbb{R}$ ,  $N \in [n, \infty]$  に対し, 次は同値である:

- (I) 全ての単位接ベクトル  $v \in TM$  に対し,  $\text{Ric}_N(v) \geq K$  が成り立つ.  
 (II)  $(M, g, e^{-\psi} m_g)$  は  $\text{CD}(K, N)$  を満たす.  
 (III)  $(M, g, e^{-\psi} m_g)$  は  $\text{LV}(K, N)$  を満たす.

このような特徴づけは, 断面曲率を下や上から押さえた場合には三角形の比較定理によって与えられ, 同様の性質を満たす距離空間, つまりアレクサンドロフ空間や  $\text{CAT}(k)$  空間は深く研究されてきた. しかし, 特に解析的にはより自然な条件であるリッチ曲率を下から押さえた空間の, 微分構造を用いない測度距離空間でも意味のある定式化での特徴づけは, 長い間重要な未解決問題であった. 定理 4.6 はこの問題に対するひとつの解答であり, 実際に曲率次元条件を満たす測度距離空間は (重みつき) リッチ曲率を下から押さえたリーマン多様体と共通の様々な性質を持つことがわかってきている. それについては次小節で述べることにし, もうひとつの重要な性質は次の保存則である.

**定理 4.7** ([St3], [St4], [LV1], [LV2]) コンパクト測度距離空間の列  $\{(X_i, d_i, m_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  が一様に  $\text{CD}(K, N)$  (または  $\text{LV}(K, N)$ ) を満たし, かつあるコンパクト測度距離空間  $(X, d, m)$  に測度つき Gromov–Hausdorff 収束するならば,  $(X, d, m)$  も  $\text{CD}(K, N)$  (または  $\text{LV}(K, N)$ ) を満たす.

測度つき Gromov–Hausdorff 収束の定義は [Fu] など参照. この保存則により, Cheeger–Colding [CC] の一連の研究で調べられた, 一様にリッチ曲率を下から押さえたリーマン多様体の列の極限に現れる空間は, 曲率次元条件を満たす. 但し, 次節で見ると, 曲率次元条件はフィンスラー多様体を含むより広い対象に適用できる概念であり, 従って Cheeger–Colding の行ったような空間の局所構造の解析は難しいと思われる. 例えば, バナッハ空間はリッチ曲率を一様に押さえたリーマン多様体の極限には現れないが, 曲率次元条件の意味では非負リッチ曲率を持つ.

### 4.3 応用

曲率次元条件の応用は多岐にわたる. まず, 集合の測度に関する評価からはじめる.

**定理 4.8 (ボンネ・マイヤースの定理, Bishop–Gromov 体積比較定理, [St4])** ある  $K \in \mathbb{R}$  と  $N \in (1, \infty)$  に対し,  $(X, d, m)$  が  $\text{CD}(K, N)$  を満たすとする. このとき,  $K > 0$  ならば  $X$  の直径は  $\pi \sqrt{(N-1)/K}$  以下である. また, 任意の  $x \in X$  と  $0 < r < R < \infty$  ( $K > 0$  のときは  $R \leq \pi \sqrt{(N-1)/K}$ ) に対し,

$$\frac{m(B(x, R))}{m(B(x, r))} \leq \frac{\int_0^R s_{K, N}(t)^{N-1} dt}{\int_0^r s_{K, N}(t)^{N-1} dt}$$

が成り立つ. ここで,  $B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ . (関数  $s_{K, N}$  の定義は (3.5) 参照.)

証明は,  $B(x, R)$  上の一様分布と  $x$  でのディラック測度に  $\text{CD}(K, N)$  を適用する. 同様に一様分布

を用いた議論により、より一般に次が得られる。これはリーマン多様体の場合でも曲率次元条件を用いて初めて得られた結果である。

**定理 4.9 (ブルン・ミンコフスキ不等式, [vRS], [St4])**  $(X, d, m)$  がある  $K \in \mathbb{R}$ ,  $N \in (1, \infty]$  に対し  $CD(K, N)$  を満たすとする。このとき、 $0 < m(A), m(B) < \infty$  なるボレル集合  $A, B \subset X$  と  $t \in (0, 1)$  に対し、 $N < \infty$  ならば

$$m(Z_t)^{1/N} \geq (1-t) \inf_{x \in A, y \in B} \beta_{K,N}^{1-t}(d(x,y))^{1/N} \cdot m(A)^{1/N} \\ + t \inf_{x \in A, y \in B} \beta_{K,N}^t(d(x,y))^{1/N} \cdot m(B)^{1/N},$$

$N = \infty$  ならば

$$\log m(Z_t) \geq (1-t) \log m(A) + t \log m(B) + \frac{K}{2} (1-t)t d_2^W \left( \frac{m|_A}{m(A)}, \frac{m|_B}{m(B)} \right)^2$$

が成り立つ。ここで  $Z_t$  は、 $A$  の点と  $B$  の点を結ぶ最短測地線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  全体の集合を  $\Gamma(A, B)$  として、 $Z_t := \{\gamma(t) \mid \gamma \in \Gamma(A, B)\}$  と定める。

尚、古典的なブルン・ミンコフスキ不等式は、 $A, B \subset \mathbb{R}^n$  に対し  $L(Z_t)^{1/n}$  が  $t$  についての凹関数であることを主張するものであった ([Ga], [Le] 参照)。次に、曲率次元条件が種々の関数不等式を導くことを見る。このような関係は Otto–Villani [OV] によって示唆され、Lott–Villani [LV1], [LV2] により組織的に調べられた。

**定理 4.10 ([LV1], [LV2])**  $(X, d, m)$  が  $m(X) = 1$  かつ、ある  $K > 0$  について  $LV(K, \infty)$  を満たすとき、次が成り立つ：

(i) **(Talagrand 不等式)** 任意の絶対連続な  $\mu \in \mathcal{P}_2(X)$  に対し、

$$\text{Ent}_m(\mu) \geq \frac{K}{2} d_2^W(m, \mu)^2.$$

(ii) **(対数ソボレフ不等式)** 任意の  $\int_X f^2 dm = 1$  なるリプシッツ関数  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  に対し、

$$\text{Ent}_m(f^2 m) \leq \frac{2}{K} \int_X |\nabla f|^2 dm.$$

(iii) **(大域ポアンカレ不等式)** 任意の  $\int_X f dm = 0$  なるリプシッツ関数  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  に対し、

$$\int_X f^2 dm \leq \frac{1}{K} \int_X |\nabla f|^2 dm.$$

証明はいずれも巧妙な計算による。定理 4.10 が適用される典型的な例はガウス分布  $(\mathbb{R}^n, e^{-c\|\cdot\|^2/2L})$  ( $c$  は正定数) であり、これは  $\text{Ric}_\infty \geq c$  及び  $LV(c, \infty)$  を満たす。より一般に  $(\mathbb{R}^n, e^{-\psi})$  は  $\text{Hess } \psi \geq K > 0$  のとき  $LV(K, \infty)$  を満たし、このような空間で対数ソボレフ不等式などが成り立つことは以前から良く知られていた。 $N < \infty$  で  $LV(K, N)$  が満たされるときには、大域ポアンカレ不等式は次のように改良される。

**定理 4.11 (リヒネロビッツ不等式, [LV2])** ある実数  $K > 0$  と  $N \in (1, \infty)$  に対し、 $(X, d, m)$  が  $LV(K, N)$  を満たすとする。このとき、任意の  $\int_X f dm = 0$  なるリプシッツ関数  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  に対し、

$$\int_X f^2 dm \leq \frac{N-1}{NK} \int_X |\nabla f|^2 dm$$

が成り立つ.

対数ソボレフ不等式は測度の集中を導く ([Le, Theorem 5.3]).  $m(X) = 1$  のとき, 測度距離空間  $(X, d, m)$  の**集中関数**を,  $r > 0$  に対し

$$\alpha_{(X,d,m)}(r) := \sup \{1 - m(B(A, r)) \mid A \subset X, m(A) \geq 1/2\}$$

で定義する. 但し,  $B(A, r) := \{y \in X \mid \inf_{x \in A} d(x, y) < r\}$ .

**命題 4.12**  $(X, d, m)$  が  $m(X) = 1$  かつ, ある  $K > 0$  について  $\text{LV}(K, \infty)$  を満たすとする. このとき, 任意の  $r > 0$  で  $\alpha_{(X,d,m)}(r) \leq e^{-Kr^2/8}$  が成り立つ.

#### 4.4 測度の収縮性 (MCP)

曲率次元条件をディラック測度と一様分布の間のみ課したものを, 測度の収縮性という ([Oh1], [St4] 参照). これは Bishop の不等式の自然な一般化であり, 類似の性質は [CC] や [Gr], またアレクサンドロフ空間論から派生して [St1] や [KS1] でも考えられていた.

**定義 4.13 (測度の収縮性,  $\text{MCP}(K, N)$ )**  $(X, d, m)$  を測度距離空間とする. 実数  $K \in \mathbb{R}$ ,  $N \in (1, \infty)$  に対し次が成り立つとき,  $(X, d, m)$  は**測度の収縮性  $\text{MCP}(K, N)$  を満たす**という: 任意の  $x \in X$  と  $0 < m(A) < \infty$  なる可測集合  $A \subset X$  ( $K > 0$  ならば  $A \subset B(x, \pi\sqrt{(N-1)/K})$ ) に対し, ある  $\delta_x$  から  $m(A)^{-1}m|_A$  への最短測地線  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(X)$  が存在し, 全ての  $t \in (0, 1)$  で測度としての不等式

$$dm \geq (e_t)_\# \left( t \left\{ \frac{s_{K,N}(tL(\gamma))}{s_{K,N}(L(\gamma))} \right\}^{N-1} m(A) d\Xi(\gamma) \right)$$

が成り立つ. ここで  $\Xi$  は命題 4.1 で与えられる  $(e_t)_\# \Xi = \alpha(t)$  なる  $\mathcal{P}(\Gamma(X))$  の元であり,  $L(\gamma)$  は  $\gamma$  の長さをあらわす.

完備  $n$  次元リーマン多様体  $(M, g, m_g)$  では  $\text{MCP}(K, n)$  はリッチ曲率が  $K$  以上であることと同値である ([Oh1], [St4]). また,  $(X, d, m)$  が非分岐であるとき,  $\text{CD}(K, N)$  は  $\text{MCP}(K, N)$  を導く ([St4]). しかし,  $\text{MCP}$  は  $\text{CD}$  を導かない. 例えば,  $\mathbb{R}^n$  内の十分小さい球はある  $\varepsilon > 0$  に対し  $\text{MCP}(\varepsilon, n+1)$  を満たすが, 定理 4.6 より  $\text{CD}(\varepsilon, n+1)$  は満たさない. また, ハイゼンベルグ群  $\mathbb{H}^n$  は  $\text{MCP}(0, 2n+3)$  を満たすが,  $\text{CD}(K, N)$  は (どんな  $K, N$  についても) 満たさない ([Ju]).

$\text{MCP}$  は  $\text{CD}$  に比べて扱いやすい概念であり, 例えば曲率  $k$  以上の  $n$  次元アレクサンドロフ空間は  $\text{MCP}((n-1)k, n)$  を満たすが ([Oh1], [KS2]),  $\text{CD}((n-1)k, n)$  を満たすかは重要未解決問題として残っている (最近, Petrunin [Pet] が肯定的に解いたと主張した). 更に,  $\text{MCP}$  は空間の直積や錐を取る操作で保たれるが ([Oh2]), 同様の性質は  $\text{CD}$  では (非分岐で  $N = \infty$  のときの直積 ([St3]) を除いて) 知られていない.  $\text{MCP}$  の下でも前節で述べたボンネ・マイヤースの定理, Bishop–Gromov 体積比較定理や, 局所ポアンカレ不等式が成り立つ ([Oh1], [St4], [vR]).

### 5 フィンスラー多様体内の最適輸送

最後に, これまで述べてきた手法がフィンスラー多様体にも適用できることを述べる. ポイントは



リッチ曲率をどう定義するかである。フィンスラー多様体は、距離が非対称になるような、リーマン多様体とは本質的に異なる状況を含む幅広い対象であり、バナッハ空間の幾何学への応用も期待される。フィンスラー幾何学の基礎については [BCS], [Sh2], そのリッチ曲率と最適輸送については [Oh6], [OS], [Oh7] 参照。

### 5.1 フィンスラー多様体の定義

まず、フィンスラー多様体の基本的な概念を復習する。\$n\$ 次元多様体 \$M\$ の開集合 \$U\$ 上の局所座標系 \$(x^i)\_{i=1}^n\$ に対し、対応する \$\cup\_{x \in U} T\_x M\$ の座標 \$(x^i; v^i)\_{i=1}^n\$ を \$v = \sum\_{i=1}^n v^i (\partial/\partial x^i)|\_{\pi(v)}\$ により定める。同様に、\$\cup\_{x \in U} T\_x^\* M\$ の座標 \$(x^i; \omega^i)\_{i=1}^n\$ を \$\omega = \sum\_{i=1}^n \omega^i dx^i\$ で定める。

**定義 5.1 (フィンスラー構造)** \$n\$ 次元 \$C^\infty\$ 多様体 \$M\$ に対し、その接束上の関数 \$F : TM \to [0, \infty)\$ が次の条件を満たすとき、\$F\$ は \$M\$ の \$C^\infty\$ 級フィンスラー構造であるという：

- (a) **(正則性)** \$F\$ は \$TM \setminus 0\$ 上 \$C^\infty\$。但し、\$0\$ は \$TM\$ の零切断をあらわす。
- (b) **(正等質性)** 任意の \$v \in TM\$ と \$\lambda > 0\$ に対し、\$F(\lambda v) = \lambda F(v)\$。
- (c) **(強凸性)** 任意の \$v \in TM \setminus 0\$ に対し、\$n\$ 次正方行列

$$(g_{ij}(v)) := \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (F^2)}{\partial v^i \partial v^j} (v) \right) \tag{5.1}$$

は正定値。

言い換えると、\$F\$ の各 \$T\_x M\$ への制限はミンコフスキノルムを与え、かつそれは \$x\$ について滑らかに変化する。接空間が全てユークリッド空間に標準的内積を入れたものであるリーマン多様体とは違い、フィンスラー多様体では接空間に現れるミンコフスキ空間は多様であり、かつ同じ多様体上の 2 点の接空間も互いに等長とは限らない。これによりリーマン多様体とは本質的に異なる現象が起こり得る。全ての接空間が (平行移動によって) 等長的であるようなフィンスラー多様体は **Berwald 型** と呼ばれる。これはフィンスラー多様体全体から見れば狭い族であるが、リーマン多様体全体とミンコフスキ空間全体を含む重要かつ手頃な研究対象である。

定義とその帰結について幾つか注意を与える。

**注意 5.2** (a) 正則性は \$TM \setminus 0\$ でのみ課されている。実際、\$F^2|\_{T\_x M}\$ が原点 \$0 \in T\_x M\$ で \$C^2\$ となるのは、\$F|\_{T\_x M}\$ が内積を定める場合に限る。

(b) 等質性は正の方向 (\$\lambda > 0\$) でのみ成り立ち、よって \$F(-v) \neq F(v)\$ となることは許されている。\$F(\lambda v) = |\lambda| F(v)\$ が全ての \$\lambda \in \mathbb{R}\$ と \$v \in TM\$ で成り立つとき (つまり \$F|\_{T\_x M}\$ がノルムであるとき)、\$F\$ は **絶対等質的 (absolutely homogeneous)** または **reversible** であるという。

(c) 強凸性より、\$F|\_{T\_x M}\$ を内積を用いて \$v\$ の方向に 2 次まで近似できる。具体的には、(5.1) の \$g\_{ij}(v)\$ を用いて、

$$g_v \left( \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \sum_{j=1}^n \hat{w}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x \right) := \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(v) w^i \hat{w}^j \tag{5.2}$$

と \$T\_x M\$ の内積を定義すると、\$g\_v(v, v) = F(v)^2\$ かつ \$g\_v\$ の単位球面は \$F|\_{T\_x M}\$ の単位球面と \$v/F(v)\$ で 2 次まで接する。この意味で、\$g\_v\$ は \$F|\_{T\_x M}\$ の \$v\$ 方向での最も良い近似を与える内積である。

\$\mathcal{L}^\* : T^\*M \to TM\$ を **ルジャンドル変換** とする。すなわち、各 \$\omega \in T\_x^\*M \setminus 0\$ に対し、\$F(v) = F^\*(\omega)\$ かつ \$\omega \cdot v = F^\*(\omega)^2\$ を満たす \$v \in T\_x M\$ を \$\mathcal{L}^\*(\omega)\$ とする。\$F\$ の強凸性よりそのような \$v\$ は一意に定

まり, 具体的には

$$\mathcal{L}^*(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \omega^i} \left[ \frac{(F^*)^2}{2} \right] (\omega) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とあらわすことができる. ルジャンドル変換を用いて,  $C^1$  関数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  の  $x \in M$  での**勾配ベクトル**を  $\nabla f(x) := \mathcal{L}^*(df_x) \in T_x M$  と定義する. 構成法より  $\nabla f(x)$  は  $f$  が最も増える方向を向いている.

$C^1$  曲線  $\eta: [0, l] \rightarrow M$  の**長さ**を  $L(\eta) := \int_0^l F(\dot{\eta}(t)) dt$  で定め, 2点  $x, y \in M$  の間の**距離**  $d(x, y)$  を  $x$  から  $y$  への  $C^1$  曲線の長さの下限と定義する. このとき,  $F$  は正の方向にのみ等質であるため,  $d(x, y) \neq d(y, x)$  となり得る (注意 5.2 参照).  $d$  は慣習上 ‘距離’ と呼ばれるため, 非対称な状況を考えることは不自然に感じられるかもしれないが,  $F$  が時間やエネルギーなどを測っていると考えれば, そのような状況は極めて自然に現れる.  $C^1$  曲線  $\gamma: [0, l] \rightarrow M$  が局所最短かつ定速であるとき, **測地線**であるという. この条件は接続を用いて微分方程式で書くこともでき, 結果的には全ての測地線は  $C^\infty$  である.  $v \in T_x M$  に対し,  $\dot{\gamma}(0) = v$  なる測地線  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  が存在するとき, **指数写像**を  $\exp_x(v) := \gamma(1)$  で定義する. 指数写像が  $TM$  全体で定義できるとき,  $(M, F)$  は **forward complete** であるといい, このとき  $M$  の任意の 2 点の間に最短測地線が存在する (つまり,  $(M, d)$  は非対称な測地空間である). 以降では, これを単に完備であるという.

### 5.2 重みつきリッチ曲率

フィンスラー幾何でリーマン幾何の断面曲率に当たるものは旗曲率 (flag curvature) である. 旗曲率は接続を用いて定義されるが, それは煩雑であり, 幾何学的な意味もわかりづらい. そこでここでは, Shen [Sh2, Chapter 6] による直観的な導入法を紹介する. この方法は (少なくともリーマン幾何学者にとっては) はるかにわかりやすく, また極めて有用である.

単位接ベクトル  $v \in T_x M$  を固定し, まずこれを  $x$  の近傍  $U$  上の  $C^\infty$  ベクトル場  $V$  で,  $V(x) = v$  かつ全ての積分曲線が測地線であるようなものに拡張する. ひとつの例は, 十分小さい  $\varepsilon > 0$  と  $\dot{\gamma}(0) = v$  なる測地線  $\gamma: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$  を用いて  $V = \nabla[d(\gamma(-\varepsilon), \cdot)]$  としたものである. (5.2) により,  $V$  は  $U$  のリーマン計量  $g_V$  を誘導する. このとき,  $v$  と一次独立な接ベクトル  $w \in T_x M$  に対し, **旗曲率**  $\mathcal{K}(v, w)$  は  $v$  と  $w$  の張る平面の  $g_V$  についての断面曲率である. 特に,  $\mathcal{K}(v, w)$  はベクトル場  $V$  の取り方には依らない. ここで,  $\mathcal{K}(v, w)$  は  $v$  と  $w$  の張る平面 (旗) だけではなく,  $v$  (旗竿) の選び方にも依っていることに注意する. 従って,  $\mathcal{K}(v, w) = \mathcal{K}(w, v)$  とは限らない. 同様に  $v$  の**リッチ曲率**  $\text{Ric}(v)$  は  $g_V$  についての  $v$  のリッチ曲率である. これらの曲率についても, リーマン幾何の**ボンネ・マイヤースの定理** (リッチ曲率が  $K > 0$  以上である  $(M, F)$  の直径は  $\pi\sqrt{(n-1)/K}$  以下) や**カルタン・アダマールの定理** ( $M$  が単連結かつ旗曲率が 0 以下のとき, 任意の  $x \in M$  で指数写像  $\exp_x: T_x M \rightarrow M$  は全単射) が成り立つ.

代表的なフィンスラー多様体の例を挙げる.

**例 5.3 (a) (ミンコフスキ空間)** ミンコフスキ空間  $(\mathbb{R}^n, F)$  の旗曲率は恒等的に 0 である.

**(b) (ヒルベルト幾何)**  $D \subset \mathbb{R}^n$  を有界な開凸集合で, 境界  $\partial D$  が滑らかかつ  $D \cup \partial D$  が狭義凸であるものとする. 相異なる 2 点  $x, y \in D$  に対し,  $x, y$  を通る直線と  $\partial D$  との交点のうち,  $x$  に近い方を  $x'$ ,  $y$  に近い方を  $y'$  とおく. このとき,  $D$  の**ヒルベルト距離**を

$$d_H(x, y) := \log \left( \frac{\|x' - y\| \cdot \|x - y'\|}{\|x' - x\| \cdot \|y - y'\|} \right)$$

と定める. これは  $D$  が球のときは双曲空間のクラインモデルに一致し, それ以外の場合は旗曲率が負定数のフィンスラー構造で実現される.

(c) **(タイヒミュラー空間)** タイヒミュラー空間のタイヒミュラー計量は完備フィンスラー計量である. 一方, Weil–Petersson 計量はリーマン計量であるが完備ではない.

(d)  $(M, F)$  を Berwald 型の完備単連結フィンスラー多様体としたとき,  $M$  が距離空間としてブーゼマンの意味での非正曲率空間となるための必要十分条件は, 旗曲率が 0 以下であることである ([KVK], [KK] 参照). ここで, **ブーゼマンの意味での非正曲率空間** であるとは, 任意の始点を共有する 2 本の測地線  $\gamma, \eta: [0, 1] \rightarrow M$  の間の距離関数  $d(\gamma(t), \eta(t))$  が,  $t$  について凸関数になることである.

測度を伴う状況では, 上で与えたような曲率はうまく働かない. そもそも, フィンスラー多様体ではリーマン多様体の体積測度のようにひとつの標準的な測度を選んで参照測度として固定することはできず, (ブーゼマン・) ハウスドルフ測度や Holmes–Thompson 測度のように複数の ‘標準的な’ 測度が存在する ([AT] 参照, いずれもリーマン多様体では体積測度と一致する). これに対処する方法として, [Oh6] では始めから重みつきの場合, つまり一般の測度を考え, また  $M$  上の測度を参照測度として固定することはせず, それは各单位接ベクトルごとに選ばれる (言い換えると, 単位接束上にある) とした. その定式化は, 上で述べた Shen による旗曲率, リッチ曲率の直観的な導入法を参考にしている.

$m$  を  $M$  上の  $C^\infty$  正測度とする. つまり, 任意の開集合  $U \subset M$  上で局所座標  $(x^i)_{i=1}^n$  を用いて  $dm = \phi \cdot dx^1 \cdots dx^n$  と表したとき,  $\phi$  は  $U$  上の正値  $C^\infty$  関数となる. リーマン多様体では体積測度  $m_g$  を用いて  $m = e^{-\psi} m_g$  と分解したが, フィンスラー多様体では次のようにする. まず単位接ベクトル  $v \in T_x M$  を固定し, それを  $x$  の近傍  $U$  に  $V(x) = v$  なるベクトル場  $V$  で全ての積分曲線が測地線であるようなものに拡張する.  $V$  の定める  $U$  上のリーマン計量  $g_V$  の体積測度を  $m_V$  とおき,  $m(x) = e^{-\Psi(v)} m_V(x)$  によって重み関数  $\Psi$  を定義する. 従って,  $\Psi$  は  $M$  ではなく単位接束  $F^{-1}(1)$  上の関数である.  $\gamma: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$  を  $\dot{\gamma}(0) = v$  なる測地線として,

$$\partial_v \Psi := \frac{d(\Psi \circ \gamma)}{dt}(0), \quad \partial_v^2 \Psi := \frac{d^2(\Psi \circ \gamma)}{dt^2}(0)$$

と定める. 尚,  $\partial_v \Psi$  は [Sh2] などでは **S 曲率** と呼ばれている. これらを用いて, リーマン多様体の場合と同様に重みつきリッチ曲率を定義する.

**定義 5.4 (フィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率)**  $n$  次元フィンスラー多様体  $(M, F)$  と単位接ベクトル  $v \in F^{-1}(1)$  に対し,  $v$  の **重みつきリッチ曲率** を以下のように定義する:

- (1)  $\partial_v \Psi = 0$  ならば  $\text{Ric}_n(v) := \text{Ric}(v) + \partial_v^2 \Psi$ ,  $\partial_v \Psi \neq 0$  ならば  $\text{Ric}_n(v) := -\infty$ .
- (2)  $N \in (n, \infty)$  に対し,  $\text{Ric}_N(v) := \text{Ric}(v) + \partial_v^2 \Psi - (\partial_v \Psi)^2 / (N - n)$ .
- (3)  $\text{Ric}_\infty(v) := \text{Ric}(v) + \partial_v^2 \Psi$ .

定義より  $\text{Ric}_n$  の下限が有界になるのは  $\partial_v \Psi = 0$  が全ての  $v$  で成り立つときのみであり, そのとき  $m$  は  $M$  の良い参照測度と言える. 例えば Berwald 型の  $(M, F)$  上のハウスドルフ測度はこの性質を満たす ([Sh2, §7.3]). しかし, 一般のフィンスラー多様体ではこのような良い参照測度の存在は期待

できないと思われ、従って任意の測度から始めることは理にかなっている。

### 5.3 応用

重みつきリッチ曲率の導入の仕方より、リーマン計量  $g_V$  ( $V = \nabla[d(x, \cdot)]$ ) を用いた議論によって、体積比較定理は容易に拡張される (これ以前に知られていたフィンスラー多様体の体積比較定理については, [Sh1], [Sh2] 参照)。

**定理 5.5 (Ohta [Oh6])** 完備  $n$  次元フィンスラー多様体  $(M, F, m)$  がある  $K \in \mathbb{R}$ ,  $N \in [n, \infty)$  に対し  $\text{Ric}_N(v) \geq K$  を全ての単位接ベクトル  $v \in F^{-1}(1)$  で満たすとする。このとき、任意の  $x \in M$  と  $0 < r < R$  ( $K > 0$  のときは  $R \leq \pi\sqrt{(N-1)/K}$ ) に対し、

$$\frac{m(B^+(x, R))}{m(B^+(x, r))} \leq \frac{\int_0^R s_{K,N}(t)^{N-1} dt}{\int_0^r s_{K,N}(t)^{N-1} dt}$$

が成り立つ。ここで、 $B^+(x, r) := \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$ 。

ほぼ同値な主張として、(非線型の) ラプラシアンと比較定理も成り立つ ([OS])。更に、3 節と同様に、次が成り立つ。

**定理 5.6 ([Oh6])** 完備  $n$  次元フィンスラー多様体  $(M, F, m)$  と  $K \in \mathbb{R}$ ,  $N \in [n, \infty)$  に対し、次は同値である：

- (I) 全ての単位接ベクトル  $v \in F^{-1}(1)$  に対し、 $\text{Ric}_N(v) \geq K$  が成り立つ。
- (II)  $(M, F, m)$  は  $\text{CD}(K, N)$  を満たす。
- (III)  $(M, F, m)$  は  $\text{LV}(K, N)$  を満たす。

ここで、 $\text{CD}(K, N)$ ,  $\text{LV}(K, N)$  は距離が非対称な状況に適切に拡張されたものとする。この定理により、4 節で触れた全ての結果はフィンスラー多様体に拡張される。このようなリーマン幾何の結果の完全な一般化は、通常はフィンスラー幾何では期待できない。[OS] では更に、Otto 流の  $(\mathcal{P}(M), d_2^W)$  のフィンスラー構造や熱流と勾配流の関係についても論じている。

### 文 献

- [AT] J. C. Álvarez-Paiva and A. C. Thompson, Volumes on normed and Finsler spaces, In: A sampler of Riemann-Finsler geometry, 1–48, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **50**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [Am] L. Ambrosio, Lecture notes on optimal transport problems, In: Mathematical aspects of evolving interfaces (Funchal, 2000), 1–52, Lecture Notes in Math., **1812**, Springer, Berlin, 2003.
- [AGS] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [Ba] K. Bacher, On Borell-Brascamp-Lieb inequalities on metric measure spaces, Preprint SFB 611 no. **394**, Universität Bonn, 2008.
- [BE] D. Bakry and M. Émery, Diffusions hypercontractives (French), Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, 177–206, Lecture Notes in Math., **1123**, Springer, Berlin, 1985.
- [BCL] K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms, Invent. Math. **115** (1994), 463–482.
- [BCS] D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen, An introduction to Riemann-Finsler geometry, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [BB1] P. Bernard and B. Buffoni, The Monge problem for supercritical Mañé potentials on compact manifolds, Adv. Math. **207** (2006), 691–706.
- [BB2] P. Bernard and B. Buffoni, Optimal mass transportation and Mather theory, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **9** (2007), 85–121.
- [Be] J. Bertrand, Existence and uniqueness of optimal maps on Alexandrov spaces, Adv. Math. **219** (2008), 838–851.
- [Br] Y. Brenier, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 375–417.
- [BBI] D. Burago, Yu. Burago and S. Ivanov, A course in metric geometry, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

- [CFM] L. A. Caffarelli, M. Feldman and R. J. McCann, Constructing optimal maps for Monge's transport problem as a limit of strictly convex costs, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), 1–26.
- [Ch] I. Chavel, *Riemannian geometry. A modern introduction*. Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [CC] J. Cheeger and T. H. Colding, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I, II, III, *J. Differential Geom.* **46** (1997), 406–480; *ibid.* **54** (2000), 13–35; *ibid.* **54** (2000), 37–74.
- [CMS] D. Cordero-Erausquin, R. J. McCann and M. Schmuckenschläger, A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb, *Invent. Math.* **146** (2001), 219–257.
- [Ev] L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [EG] L. C. Evans and W. Gangbo, Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem, *Mem. Amer. Math. Soc.* **137** (1999).
- [FF] A. Fathi and A. Figalli, Optimal transportation on non-compact manifolds, *Israel J. Math.* **175** (2010), 1–59.
- [Fi] A. Figalli, Regularity of optimal transport maps (after Ma-Trudinger-Wang and Loeper), *Séminaire Bourbaki*, Vol. 2008/09, Exp. No. 1009.
- [FV] A. Figalli and C. Villani, Strong displacement convexity on Riemannian manifolds, *Math. Z.* **257** (2007), 251–259.
- [Fu] K. Fukaya, Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator, *Invent. Math.* **87** (1987), 517–547.
- [Ga] R. J. Gardner, The Brunn-Minkowski inequality, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **39** (2002), 355–405.
- [Gr] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhäuser, Boston, MA, 1999.
- [JKO] R. Jordan, D. Kinderlehrer and F. Otto, The variational formulation of the Fokker-Planck equation, *SIAM J. Math. Anal.* **29** (1998), 1–17.
- [Ju] N. Juillet, Geometric inequalities and generalized Ricci bounds in the Heisenberg group, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2009, 2347–2373.
- [Ka1] L. V. Kantorovich, On the translocation of masses, *J. Math. Sci. (N. Y.)* **133** (2006), 1381–1382. (An English translation of the Russian original in *Dokl. Acad. Nauk SSSR* **37** (1942), 227–229.)
- [Ka2] L. V. Kantorovich, On a problem of Monge, *J. Math. Sci. (N. Y.)* **133** (2006), 1383. (An English translation of the Russian original in *Uspekhi Mat. Nauk* **3** (1948), 225–226.)
- [KnSm] M. Knott and C. S. Smith, On the optimal mapping of distributions, *J. Optim. Theory Appl.* **43** (1984), 39–49.
- [KK] A. Kristály and L. Kozma, Metric characterization of Berwald spaces of non-positive flag curvature, *J. Geom. Phys.* **56** (2006), 1257–1270.
- [KVK] A. Kristály, C. Varga and L. Kozma, The dispersing of geodesics in Berwald spaces of non-positive flag curvature, *Houston J. Math.* **30** (2004), 413–420.
- [KS1] K. Kuwae and T. Shioya, On generalized measure contraction property and energy functionals over Lipschitz maps, *ICPA98 (Hammamet)*. *Potential Anal.* **15** (2001), 105–121.
- [KS2] K. Kuwae and T. Shioya, Infinitesimal Bishop-Gromov condition for Alexandrov spaces, *Adv. Stud. Pure Math.* **57** (2010), 293–302.
- [Le] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [Lo1] J. Lott, Some geometric properties of the Bakry-Émery-Ricci tensor, *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), 865–883.
- [Lo2] J. Lott, Some geometric calculations on Wasserstein space, *Comm. Math. Phys.* **277** (2008), 423–437.
- [Lo3] J. Lott, Optimal transport and Perelman's reduced volume, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **36** (2009), 49–84.
- [LV1] J. Lott and C. Villani, Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport, *Ann. of Math. (2)* **169** (2009), 903–991.
- [LV2] J. Lott and C. Villani, Weak curvature conditions and functional inequalities, *J. Funct. Anal.* **245** (2007), 311–333.
- [Ly] A. Lytchak, Open map theorem for metric spaces, *St. Petersburg Math. J.* **17** (2006), 477–491.
- [Ma] U. F. Mayer, Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps, *Comm. Anal. Geom.* **6** (1998), 199–253.
- [Mc] R. J. McCann, Polar factorization of maps on Riemannian manifolds, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), 589–608.
- [MT] R. J. McCann and P. Topping, Ricci flow, entropy and optimal transportation, *Amer. J. Math.* **132** (2010), 711–730.
- [Mo] G. Monge, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, *Hist. de l'Acad. des Sciences de Paris* (1781), 666–704.
- [Oh1] S. Ohta, On the measure contraction property of metric measure spaces, *Comment. Math. Helv.* **82** (2007), 805–828.
- [Oh2] S. Ohta, Products, cones, and suspensions of spaces with the measure contraction property, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **76** (2007), 225–236.
- [Oh3] S. Ohta, Markov type of Alexandrov spaces of nonnegative curvature, *Mathematika* **55** (2009), 177–189.

- [Oh4] S. Ohta, Gradient flows on Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces, *Amer. J. Math.* **131** (2009), 475–516.
- [Oh5] S. Ohta, Uniform convexity and smoothness, and their applications in Finsler geometry, *Math. Ann.* **343** (2009), 669–699.
- [Oh6] S. Ohta, Finsler interpolation inequalities, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **36** (2009), 211–249.
- [Oh7] S. Ohta, Optimal transport and Ricci curvature in Finsler geometry, *Adv. Stud. Pure Math.* **57** (2010), 323–342.
- [OS] S. Ohta and K.-T. Sturm, Heat flow on Finsler manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* **62** (2009), 1386–1433.
- [Ol] Y. Ollivier, Ricci curvature of Markov chains on metric spaces, *J. Funct. Anal.* **256** (2009), 810–864.
- [Ot] F. Otto, The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation, *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), 101–174.
- [OV] F. Otto and C. Villani, Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality, *J. Funct. Anal.* **173** (2000), 361–400.
- [PP] G. Perel'man and A. Petrunin, Quasigeodesics and gradient curves in Alexandrov spaces, unpublished preprint (1994).
- [Pet] A. Petrunin, Alexandrov meets Lott–Villani–Sturm, Preprint 2009. Available at [arXiv:1003.5948](https://arxiv.org/abs/1003.5948)
- [Qi] Z. Qian, Estimates for weighted volumes and applications, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **48** (1997), 235–242.
- [RR] S. T. Rachev and L. Rüschendorf, Mass transportation problems. Vol. I, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [vR] M.-K. von Renesse, On local Poincaré via transportation, *Math. Z.* **259** (2008), 21–31.
- [vRS] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature, *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005), 923–940.
- [Sa] G. Savaré, Gradient flows and diffusion semigroups in metric spaces under lower curvature bounds, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **345** (2007), 151–154.
- [Sh1] Z. Shen, Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler geometry, *Adv. Math.* **128** (1997), 306–328.
- [Sh2] Z. Shen, Lectures on Finsler geometry, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001.
- [St1] K.-T. Sturm, Diffusion processes and heat kernels on metric spaces, *Ann. Probab.* **26** (1998), 1–55.
- [St2] K.-T. Sturm, Convex functionals of probability measures and nonlinear diffusions on manifolds, *J. Math. Pures Appl. (9)* **84** (2005), 149–168.
- [St3] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. I, *Acta Math.* **196** (2006), 65–131.
- [St4] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. II, *Acta Math.* **196** (2006), 133–177.
- [Su] V. N. Sudakov, Geometric problems in the theory of infinite-dimensional probability distributions, *Proc. Steklov Inst. Math.* 1979, no. 2, i–v, 1–178. (An English translation of the Russian original in *Trudy Mat. Inst. Steklov* **141** (1976), 191 pp.)
- [To] P. Topping,  $\mathcal{L}$ -optimal transportation for Ricci flow, *J. reine angew. Math.* **636** (2009), 93–122.
- [TW] N. S. Trudinger and X.-J. Wang, On the Monge mass transfer problem, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **13** (2001), 19–31.
- [Vi1] C. Villani, Topics in optimal transportation, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Vi2] C. Villani, Optimal transport, old and new, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [塩谷] 塩谷 隆, Alexandrov 空間上の幾何解析, *数学* **61** (2009), 1–20.

(年月日提出)

(おおた しんいち・京都大学大学院理学研究科)