論　説

フィンスラー多様体上の幾何解析

太　田　慎　一

本論説の目的は，フィンスラー幾何におけるリッチ曲率についての最近の進展を概説することである.[1)] フィンスラー多様体とは，各接空間に（ミンコフスキ）ノルムが与えられた多様体である．特にノルムとして内積から来るもののみを考えると，リーマン多様体が得られる．このようなリーマン多様体の一般化は有名なリーマンの就職講演で既に言及されていたが，その後の発展はリーマン幾何に比べて遅かった（歴史的な経緯などは [松本] に詳しい）.

フィンスラー多様体はリーマン多様体よりはるかに一般的な対象であり，例えば異なる 2 点の接空間が互いに等長とは限らない．従ってフィンスラー多様体にリーマン幾何の概念を拡張するには困難がつきまとうが，筆者により [Oh3] で導入された重みつきリッチ曲率は，リーマン幾何の多くの定理をフィンスラー幾何に拡張することを可能にした．この一連の研究は,「リッチ曲率が下から押さえられた（曲率次元条件を満たす）測度距離空間」の研究にも有用な示唆を与えるものである.

以降では，1 節でフィンスラー幾何の基本的な概念を述べたあと，2 節で重みつきリッチ曲率の定義を与える．3 節でフィンスラー多様体の代表的な例を挙げ，4–6 節ではそれぞれ非線形ラプラシアンと熱流，Bochner–Weitzenböck 公式，Cheeger–Gromoll 型分解定理への重みつきリッチ曲率の応用を述べる．最後に今後の展望を簡単に述べ，おまけとして本論説では殆ど登場しない座標を用いた主要な量の表示を与える.

1　フィンスラー多様体

はじめに，（フィンスラー多様体の接空間に現れる）ミンコフスキ空間とフィンスラー多様体の定義を述べ，距離などの基本的な幾何学的概念を導入する．詳しくは定番の教科書 [BCS] や [Sh2]，[Sh3] を参照されたい.

1.1　ミンコフスキ空間

ミンコフスキ（ノルム）空間は，原点についての非対称性を許すノルム空間の一般化である．簡単のため，本稿では C^∞ かつ強凸の場合のみを扱う.

定義 1.1 (ミンコフスキ空間)　非負関数 $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ が次の 3 条件を満たすとき，$\|\cdot\|$ を $\boldsymbol{C^\infty}$ **ミンコフスキノルム**，$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ を $\boldsymbol{C^\infty}$ **ミンコフスキ空間**と呼ぶ.

(1) （正則性）$\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上 C^∞ である.

(2) （**正等質性**）任意の $v \in \mathbb{R}^n$ と $c > 0$ に対し，$\|cv\| = c\|v\|$ が成り立つ.

(3) （**強凸性**）任意の $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し，n 次対称行列

$$g_{ij}(v) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\|\cdot\|^2)}{\partial v^i \partial v^j}(v) \tag{1.1}$$

は正定値である．ここで，$(v^i)_{i=1}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準的な座標を表す．

ミンコフスキノルム $\|\cdot\|$ の開単位球 $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < 1\}$ は原点を含む原点対称とは限らない凸集合であり，強凸性はその境界（単位球面）$\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ が正に曲がっていることを意味する（図 1 参照）．特に $\|\cdot\|$ は狭義凸（一次独立な $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対し $\|v + w\| < \|v\| + \|w\|$）かつ正値（$v = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0$）であるが，$\|-v\| = \|v\|$ とは限らない．従って，$d(v, w) = \|w - v\|$ とおいたとき，三角不等式

$$d(u, w) \le d(u, v) + d(v, w) \qquad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

は成り立つが，対称（$d(v, w) = d(w, v)$）とは限らない．

各 $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し，(1.1) の行列 $g_{ij}(v)$ は正定値なので $\mathbb{R}^n$ の内積を定める．この内積を g_v で表す：

$$g_v\big((a_i)_{i=1}^n, (b_j)_{j=1}^n\big) := \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_{ij}(v). \tag{1.3}$$

任意の $c > 0$ に対し $g_{cv} = g_v$ であり，また $g_v(v, v) = \|v\|^2$ が成り立つ．この内積 g_v の単位球面（図 1 の太線の楕円）は，元のノルム $\|\cdot\|$ の単位球面と $v/\|v\|$ で 2 次まで接する（強凸性は 2 次の近似が直線ではなく楕円になることを保証する）．この意味で g_v は $\|\cdot\|$ を v の方向で最も良く近似する内積と解釈でき，フィンスラー幾何へのリーマン幾何的なアプローチで重要な役割を果たす．ノルム $\|\cdot\|$ が元々内積から来るものだった場合には，明らかに g_v は元の内積と一致する．

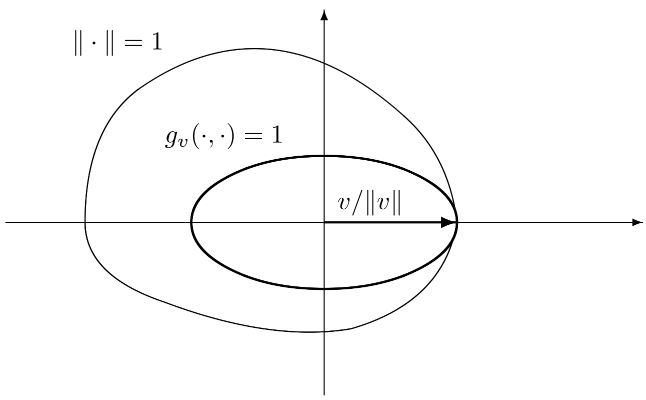

図 1

ミンコフスキノルム $\|\cdot\|$ と内積 g_v の違い（比）は，$\|\cdot\|$ の凸性（凹性）を用いて評価できる．具体的には，

$$\mathcal{S} := \sup_{v,w \neq 0} \frac{\sqrt{g_w(v, v)}}{\|v\|}, \qquad \mathcal{C} := \sup_{v,w \neq 0} \frac{\|v\|}{\sqrt{g_w(v, v)}} \tag{1.4}$$

と定義するとき，次が成り立つ（$g_v(v, v) = \|v\|^2$ より $\mathcal{S}, \mathcal{C} \ge 1$ であることに注意）．

命題 1.2　上の $\mathcal{S},\mathcal{C}$ は，それぞれ

$$\left\|\frac{v+w}{2}\right\|^2 \geq \frac{1}{2}\|v\|^2+\frac{1}{2}\|w\|^2-\frac{S^2}{4}\|w-v\|^2, \tag{1.5}$$

$$\left\|\frac{v+w}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|v\|^2+\frac{1}{2}\|w\|^2-\frac{1}{4C^2}\|w-v\|^2 \tag{1.6}$$

を全ての $v,w\in\mathbb{R}^n$ で満たす $S,C\geq 1$ の中で最小のものと一致する．また，$\mathcal{S}=1$ または $\mathcal{C}=1$ が成り立つのは $\|\cdot\|$ が内積から来るときに限る．

$S=1$ のときの (1.5) は **Alexandrov の意味での非負曲率性**，$C=1$ のときの (1.6) は**非正曲率性**（**CAT(0) 性**）を意味する（詳しくは [BBI] や [塩谷] など参照）．従って，（ミンコフスキ）ノルム空間が Alexandrov の意味で非負曲率または非正曲率を持つのは，内積空間のときに限る．

バナッハ空間論では $\mathcal{S}$ は（2 次の）**一様平滑性**，$\mathcal{C}$ は（2 次の）**一様凸性**を測る量であり，例えば L^p 空間では，$1<p<2$ で $\mathcal{C}=1/\sqrt{p-1}$（$\mathcal{S}$ は ∞），$2<p<\infty$ で $\mathcal{S}=\sqrt{p-1}$（$\mathcal{C}$ は ∞）が成り立つ（[BCL] 参照）．

1.2　フィンスラー多様体

M を境界のない連結 n 次元 C^∞ 多様体とする．以降では，開集合 $U\subset M$ の局所座標 $(x^i)_{i=1}^n$ に対し，TU に

$$v=\sum_{j=1}^n v^j\frac{\partial}{\partial x^j}$$

で導入される座標 $(x^i,v^j)_{i,j=1}^n$ を考える．

定義 1.3 (フィンスラー多様体)　M の接束 TM 上の非負関数 $F:TM\longrightarrow[0,\infty)$ が，

- $TM\setminus\{0\}$ 上 C^∞ であり（$\{0\}:=\{0\in T_xM\,|\,x\in M\}$），
- 各 $x\in M$ に対し F の T_xM への制限が（定義 1.1 の意味で）ミンコフスキノルムであるとき，

F を M の $\boldsymbol{C^\infty}$ **フィンスラー構造**，(M,F) を $\boldsymbol{C^\infty}$ **フィンスラー多様体**と呼ぶ．

フィンスラー構造 F から自然な方法で幾何学的に距離や測地線などが導入される（詳しい定義は [BCS] を参照）．

- **距離**：$x,y\in M$ に対し，x から y への**距離**を

$$d(x,y):=\inf\left\{\int_0^1 F(\dot\eta)\,dt\,\middle|\,\eta:[0,1]\longrightarrow M,\ C^1,\ \eta(0)=x,\ \eta(1)=y\right\}$$

と定める．この d も三角不等式 (1.2) を満たすが対称ではない．従って d は厳密な意味での距離関数ではないが，慣習により距離と呼ばれる．

- **測地線**：C^∞ 曲線 $\eta:[0,l]\longrightarrow M$ が局所最短かつ速さ一定（つまり，$F(\dot\eta)$ が定数）であるとき，**測地線**と呼ぶ．

- **指数写像**：$v\in T_xM$ に対し，測地線 $\eta:[0,1]\longrightarrow M$ で $\dot\eta(0)=v$ を満たすものが存在するとき，$\exp_x(v):=\eta(1)$ と定める．

- **完備性**：指数写像が TM 全体で定義されるとき，つまり任意の測地線 $\eta:[0,l]\longrightarrow M$ が $[0,\infty)$ まで拡張できるとき，(M,F) は**前向き完備**であるという．このとき，Hopf–Rinow の定理（[BCS, Theorem 6.6.1]）より，任意の 2 点を最短測地線で結べる．$\overleftarrow{F}$ を次の定義のように定め，$(M,\overleftarrow{F})$ が前向き完備であるとき，(M,F) は**後ろ向き完備**であるという．（前向き完備性と後ろ向き完備性は一般に同値ではない．M がコンパクトならば前向きかつ後ろ向き完備である．）

定義 1.4 (逆向きフィンスラー構造)　フィンスラー多様体 (M,F) の**逆向きフィンスラー構造** $\overleftarrow{F}$ を $\overleftarrow{F}(v):=F(-v)$ と定義し，$\overleftarrow{F}$ に付随する量を $\overleftarrow{d}(x,y)=d(y,x)$ などと矢印 $\leftarrow$ をつけて表す．

さて，各 $v\in T_xM\setminus\{0\}$ に対し，(1.1), (1.3) と同様にして T_xM の内積 g_v を定められる：

$$g_{ij}(v):=\frac{1}{2}\frac{\partial^2(F^2)}{\partial v^i\partial v^j}(v),$$
$$g_v\left(\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x^i},\sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial}{\partial x^j}\right):=\sum_{i,j=1}^n a_ib_jg_{ij}(v). \tag{1.7}$$

上では距離を用いて測地線を幾何学的に定義したが，座標を用いると測地線の満たす常微分方程式（Euler–Lagrange 方程式）を

$$\ddot{\eta}^i+\sum_{j,k=1}^n\gamma^i_{jk}(\dot{\eta})\dot{\eta}^j\dot{\eta}^k\equiv 0\qquad\forall i=1,2,\ldots,n \tag{1.8}$$

と書き下せる．ここで，$\gamma^i_{jk}(\dot{\eta})$ は g_v の $v=\dot{\eta}$ での M 方向への微分を用いて定義される Christoffel 記号に相当するものであり（8 節参照），点 $\eta(t)$ だけでなく方向 $\dot{\eta}(t)$ にも依存することに注意する．常微分方程式の一般論より，任意の $v\in T_xM$ を初期ベクトルとする測地線の短時間存在性や一意性がわかる．

ここで，接続について手短かに述べる．接続 ∇ は，

$$\nabla_v\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum_{i=1}^n\omega^i_j(v)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

の係数関数 $\omega^i_j(v)$ を決めれば定まるが，フィンスラー多様体ではリーマン多様体の Levi–Civita 接続のような一つの自然な接続を決めることはできない．幾つかの（自然な）接続が知られており，特に **Chern 接続**は捩れがない接続の代表的なもので，$\omega^i_j(v)=\sum_{k=1}^n\Gamma^i_{jk}(v)v^k$ で与えられる（Γ^i_{jk} の定義は 8 節参照）．実は，(1.8) は γ^i_{jk} を Γ^i_{jk} に取り替えても成り立つ（逆に言うと，Γ^i_{jk} は γ^i_{jk} を測地線の方程式が変わらない範囲で変形したもの）．また，次節で導入する曲率は接続の取り方に依らないことが知られている．

上の Γ^i_{jk} を用いて，ベクトル場 $X=\sum_{i=1}^n X^i(\partial/\partial x^i)$ の，$w\in T_xM$ による，$v\in T_xM\setminus\{0\}$ を**参照ベクトル**とする**共変微分**を

$$D^v_wX(x):=\sum_{i,j=1}^n\left\{w^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x)+\sum_{k=1}^n\Gamma^i_{jk}(v)w^jX^k(x)\right\}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \tag{1.9}$$

と定義する．

注意 1.5　上の共変微分の代わりに，$V(x)=v$ を満たす x の近傍上の適当なベクトル場 V を使い，リーマン計量 g_V についての共変微分 $D^{g_V}_wX(x)$ を考える．このとき，$D^{g_V}_wX(x)$ が $D^v_wX(x)$ と一致するには，V の積分曲線が測地線でありかつ $X(x)=v$ または $w=v$ であることが必要十分である

([Oh7, Lemma 2.3] 参照). この事実は, g_v を用いて何でもリーマン計量に帰着できるわけではないと注意している.

2　曲率

フィンスラー多様体の曲率を, ([Sh2, Section 6] に沿って) 測地線を用いて幾何学的に導入する. 重みつきリッチ曲率については [Oh3] や概説 [Oh4] を参照されたい. 以降, $n = \dim M \geq 2$ とする.

2.1　旗曲率, リッチ曲率

測地線を用いてヤコビ場, ついで旗曲率とリッチ曲率を定義する. $\eta : (0,l) \longrightarrow M$ を測地線とする. ある C^∞ 変分 $\sigma : (0,l) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ で $\sigma(t,0) = \eta(t)$ かつ各 $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対し $\sigma_s(t) := \sigma(t,s)$ が測地線であるものを用いて, その変分ベクトル場

$$X(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(t,0)$$

として表される X を η に沿う**ヤコビ場**と呼ぶ. このようにヤコビ場を定義するとき, 次の条件を満たす変換の族

$$\{R_v : T_xM \longrightarrow T_xM \mid x \in M,\, v \in T_xM \setminus \{0\}\}$$

が存在する：任意の測地線 η とそれに沿うヤコビ場 X に対し, **ヤコビ方程式**

$$D_{\dot\eta}^{\dot\eta} D_{\dot\eta}^{\dot\eta} X + R_{\dot\eta}(X) \equiv 0 \tag{2.1}$$

が成り立つ ($D_{\dot\eta}^{\dot\eta}$ は η に沿う共変微分, (1.9) 参照). また逆に, (2.1) を満たすベクトル場 X はヤコビ場になる. (2.1) より明らかに, $a, b > 0$ に対し $R_{av}(bw) = a^2 b R_v(w)$ が成り立つ (R_v の座標を用いた表示は 8 節参照).

一次独立な接ベクトル $v, w \in T_xM$ (特に $v, w \neq 0$) に対し, ヤコビ方程式 (2.1) に現れた $R_v : T_xM \longrightarrow T_xM$ を用いて, **旗曲率** $\mathcal{K}(v,w)$ を

$$\mathcal{K}(v,w) := \frac{g_v(R_v(w), w)}{F(v)^2 g_v(w,w) - g_v(v,w)^2}$$

と定義する. このとき $\mathcal{K}(v,w)$ は, v, w の張る平面 $v \wedge w \subset T_xM$ (**旗**) だけでなく, v (**旗竿**) の取り方にもよることに注意する (特に $\mathcal{K}(v,w) \neq \mathcal{K}(w,v)$ となり得る). リーマン多様体では旗曲率は断面曲率と一致する. 次に, **リッチ曲率**は旗曲率のトレースとして定義される. 具体的には, 単位ベクトル $v \in T_xM \cap F^{-1}(1)$ に対し, $\{e_i\}_{i=1}^{n-1} \cup \{v\}$ を T_xM の g_v についての正規直交基底として,

$$\mathrm{Ric}(v) := \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{K}(v, e_i).$$

これらの曲率に関して, 例えばリーマン幾何における Bonnet–Myers の定理 ($\mathrm{Ric} \geq (n-1)K > 0$ ならば $\operatorname{diam} M \leq \pi/\sqrt{K}$) や Cartan–Hadamard の定理 ($\mathcal{K} \leq 0$ ならば M の普遍被覆は $\mathbb{R}^n$ と微分同相) がそのまま拡張される ([BCS, Theorems 7.7.1, 9.4.1]).

注意 2.1　旗曲率及びリッチ曲率には, 注意 1.5 とも関連する Shen による次のような解釈がある ([Sh2, Section 6], [Sh4, Lemma 2.4]). この解釈は理論的に極めて有用であり, また直観的な理解に

も役立つ．

単位接ベクトル $v \in T_xM \cap F^{-1}(1)$ を固定し，それを全ての積分曲線が測地線である C^∞ ベクトル場 V に x の近傍 U 上で拡張する（つまり，$V(x) = v$）．すると，(1.7) により U のリーマン計量 g_V が定まる．このとき，v と一次独立な $w \in T_xM$ に対し，旗曲率 $\mathcal{K}(v,w)$ は v,w の張る平面の g_V についての断面曲率 $\mathcal{K}^V(v,w)$ と一致する（特に，$\mathcal{K}^V(v,w)$ は v の拡張 V の選び方に依らない）．同様に，v の F についてのリッチ曲率 $\mathrm{Ric}(v)$ は g_V についてのリッチ曲率 $\mathrm{Ric}^V(v)$ と一致する．（実際，注意 1.5 より $D_V^{g_V}X = D_V^V X$ であり，よって V の積分曲線 η に沿ったヤコビ方程式 (2.1) は F と g_V で同じ変換 $R_{\dot\eta}$ を導く．）

この解釈を用いると，例えば上で述べた Bonnet–Myers の定理は点 $x \in M$ から出る測地線の接ベクトル場 V に対応する g_V についての Bonnet–Myers の定理に帰着できる．

Cartan–Hadamard の定理はフィンスラー多様体に拡張できたが，一般に断面曲率に関するリーマン幾何の結果を旗曲率を用いてフィンスラー幾何に拡張することは容易ではない．例えば，フィンスラー多様体でも弧長の第 2 変分公式を書き下すことができるが，その挙動を制御するためには，旗曲率の他に (1.4) で与えられた接空間の一様平滑性・一様凸性，更に接空間の変化の仕方も評価しなければならない（[Oh2] 参照）．実際，命題 1.2 の後の議論により，フィンスラー多様体で Alexandrov の意味で曲率が上や下から押さえられるのはリーマン多様体のときのみである．一方，単連結で旗曲率が非正な Berwald 空間（3 節 (b) 参照）は，より弱い **Busemann の意味での非正曲率性**は持つことが知られている（[KVK], [KK]）．

2.2　重みつきリッチ曲率

ここまで，距離などの幾何学的な量がフィンスラー構造から自然に導かれることを見た．それでは，測度はどうであろうか？実は，フィンスラー多様体にはリーマン多様体の体積測度のような標準的な測度は存在しない．幾つかの構成的な測度（Busemann–Hausdorff 測度，Holmes–Thompson 測度など，[AT] 参照）が知られており，それらはリーマン多様体では全て体積測度と一致するが，フィンスラー多様体では互いに異なる．

そこで，以降では M 上の C^∞ 正測度 m を任意に固定する（すなわち，局所座標を用いて $m = \rho\, dx^1 \cdots dx^n$ と書いたとき，ρ が C^∞ かつ正）．そして，重みつきリーマン多様体の理論（[Qi], [Lo] 参照）を参考にして，リッチ曲率を m の取り方に応じて変形する．これは自然な方針であることが後にわかる（注意 2.3 参照）．

単位接ベクトル $v \in T_xM \cap F^{-1}(1)$ を，注意 2.1 と同様に，積分曲線が全て測地線である x の近傍 U 上の C^∞ ベクトル場 V に拡張し，リーマン計量 g_V を考える．g_V の体積測度を vol_V で表し，$m = e^{-\psi}\,\mathrm{vol}_V$ により関数 $\psi \in C^\infty(U)$ を定める．また，$\eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ を $\dot\eta(0) = v$ を満たす測地線とする．

定義 2.2 (重みつきリッチ曲率)　$N \in (n, \infty)$ に対し，

$$\mathrm{Ric}_N(v) := \mathrm{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0) - \frac{(\psi \circ \eta)'(0)^2}{N-n}.$$

極限として，

$$\mathrm{Ric}_\infty(v) := \mathrm{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0),$$

$$\mathrm{Ric}_n(v) := \begin{cases} \mathrm{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0) & \text{if } (\psi \circ \eta)'(0) = 0, \\ -\infty & \text{if } (\psi \circ \eta)'(0) \neq 0. \end{cases}$$

また，$c \geq 0$ について $\mathrm{Ric}_N(cv) := c^2 \mathrm{Ric}_N(v)$ と定める．（ψ は η 上で定義されていればよく，V の条件から $V(\eta(t)) = \dot{\eta}(t)$ なので，$\mathrm{Ric}_N(v)$ は V の取り方に依らない．）ある $K \in \mathbb{R}$ と全ての $v \in TM$ に対し $\mathrm{Ric}_N(v) \geq KF(v)^2$ が成り立つとき，**Ric_N が K 以上**であるといい，$\mathrm{Ric}_N \geq K$ で表す．

$\mathrm{Ric}_N(v)$ は重みつきリーマン多様体 $(U, g_V, e^{-\psi} \mathrm{vol}_V)$ の重みつきリッチ曲率 $\mathrm{Ric}_N^V(v)$ に他ならない．重みつきリーマン多様体での Ric_∞ は解析学や確率論で重要な **Bakry–Émery テンソル**であり，$N < \infty$ の場合の Ric_N は Qian により導入された（[BE], [Qi] 参照）．また，$(\psi \circ \eta)'(0)$ は Shen らによって良く研究されている **S 曲率** $\mathbf{S}(v)$ と一致する（[Sh1], [Sh2, §7.3] 参照）．定義から明らかに，重みつきリッチ曲率はパラメータ N について単調増加である：

$$\mathrm{Ric}_N(v) \leq \mathrm{Ric}_{N'}(v) \qquad \forall N < N'.$$

従って，Ric_∞ を下から押さえるのが最も易しく，Ric_n を下から押さえるのが最も難しい．Ric_N が測度の定数倍で不変であることも注意する（つまり，$a > 0$ について $m' := am$ とおくとき，$\mathrm{Ric}_N^{m'} = \mathrm{Ric}_N^m$）．

注意 2.3　リーマン多様体 (M, g) では上の vol_V は体積測度 vol_g と一致し，$m = e^{-\psi} \mathrm{vol}_g$ と大域的に表示できる．しかし，フィンスラー多様体 (M, F) では一般に体積測度のような「良い参照測度」は存在しない（従って任意の測度 m から始めるのが自然である）．具体的には，$\mathrm{Ric}_n > -\infty$ ($\Leftrightarrow \mathbf{S} \equiv 0$) を満たす測度 m が存在するとは限らない．例えば，Randers 空間（次節 (c) 参照）では $\mathbf{S}$ 曲率が恒等的に 0 となる測度 m を許容するための必要十分条件を書き下すことができ，それを満たさない例も知られている（[Oh5]）．特に，そのようなフィンスラー多様体では n より真に大きい N で Ric_N を考える必要がある．

2.3　曲率次元条件と応用

重みつきリーマン多様体において，$N \in [n, \infty]$ と $K \in \mathbb{R}$ に対し，Lott, Renesse, Sturm, Villani は Ric_N が K 以上であることと**曲率次元条件** $\mathsf{CD}(K, N)$ が同値であることを示した（[vRS], [St1], [St2], [St3], [LV1], [LV2]）．この同値性は定義 2.2 の重みつきリッチ曲率を用いてフィンスラー多様体（とその上の測度の組）へそのまま拡張される（[Oh3]）．曲率次元条件の一般論より，$\mathsf{CD}(K, N)$ を満たす空間はリッチ曲率が K 以上かつ次元が N 以下である様に振る舞うことが知られており，これを通してフィンスラー幾何への多くの応用が得られる．

最適輸送理論と曲率次元条件については既に論説 [太田] で解説したため，ここでは概略を述べるにとどめる（より詳しくは [Vi1], [Vi2] など参照）．曲率次元条件は最適輸送理論の言葉を用いて記述され，一言で言うと「確率測度のなす空間上のある種のエントロピーの凸性」である（N によってエントロピーを変え，K によって凸性の条件を変える）．簡単のため M をコンパクトとし，M 上のボレル確率測度全体を $\mathcal{P}(M)$ で表す．$\mu, \nu \in \mathcal{P}(M)$ の **L^2-Wasserstein 距離**を

$$W_2(\mu, \nu) := \inf_\pi \left(\int_{M \times M} d(x, y)^2 \, \pi(dxdy) \right)^{1/2}$$

と定める．但し，$\pi \in \mathcal{P}(M \times M)$ は μ と ν の**カップリング**全体，すなわち各 M への射影による押し出しが μ と ν に一致するもの全体を走る．W_2 についての μ から ν への最短線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$（μ から ν への**最適輸送**）は，ある M 上の関数 φ の勾配ベクトル場（次節参照）を初期ベクトルとする測地線に沿った μ の押し出し $\mu_t = [\exp(t\boldsymbol{\nabla}\varphi)]_\sharp \mu$ で与えられる．測地線による変分の変分ベクトル場はヤコビ場であったので，リッチ曲率を用いて μ_t の挙動を制御できる．

曲率次元条件の一般論より，Ric_N が下から押さえられたフィンスラー多様体の性質について，次の応用が得られる．

• $\mathrm{Ric}_\infty \ge K > 0$ のとき：凸関数の基本的な性質を用いて，**Talagrand 不等式**，**対数ソボレフ不等式**，**大域ポアンカレ不等式**が得られる（[LV2]；[OV] も参照）．また，Talagrand 不等式（または対数ソボレフ不等式）は**測度の集中**を導く（[Le, Chapters 5, 6] 参照）．

• $\mathrm{Ric}_N \ge K,\ N < \infty$ のとき：同心球の体積増大度についての **Bishop–Gromov 体積比較定理**が成り立つ（[St3]）．

• $\mathrm{Ric}_N \ge K > 0,\ N < \infty$ のとき：直径の上限についての **Bonnet–Myers の定理**（[St3]），大域ポアンカレ不等式を改良する **Lichnerowicz 不等式**が成り立つ（[LV1]）．

それぞれについて詳しく述べることはしないが，例えば $\mathrm{Ric}_N \ge 0$ のときの Bishop–Gromov 体積比較とは，

$$\frac{m(B^+(x,R))}{m(B^+(x,r))} \le \left(\frac{R}{r}\right)^N \qquad \forall x \in M,\ 0 < r < R$$

が成り立つことである（$B^+(x,r) := \{y \in M \,|\, d(x,y) < r\}$）．更に，一般の $K \in \mathbb{R},\ N \in [n,\infty]$ に対し，$\mathrm{Ric}_N \ge K$ は **Brunn–Minkowski の不等式**（[St3]；$N=\infty$ の場合は [Oh6, Theorem 6.1], [Vi2, Theorem 30.7] 参照）を導く．これは，同心球の体積比較である Bishop–Gromov の比較定理を，任意の 2 つの集合の測度の間の関係に拡張したものと考えられる．尚，古典的なユークリッド空間での Brunn–Minkowski 不等式とは，任意の可測集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ と $t \in [0,1]$ に対し，

$$|\{(1-t)x + ty \,|\, x \in A,\ y \in B\}|^{1/n} \ge (1-t)|A|^{1/n} + t|B|^{1/n}$$

が成り立つというものであった（$|A|$ は A のルベーグ測度）．

3　フィンスラー多様体の例

フィンスラー多様体の代表的な例を与える．

(a) （**ミンコフスキ空間**）ミンコフスキ空間 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ は，各点での接空間を $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ と自然に同一視することによって，フィンスラー多様体と見なせる．ミンコフスキ空間の旗曲率は恒等的に 0 である．更に，ルベーグ測度 $\mathbf{L}^n$ に対し，Ric_N は全ての $N \in [n,\infty]$ で恒等的に 0 である．

(b) （**Berwald 空間**，[BCS, Chapter 10]）1 節で述べた Γ^i_{jk} が M の点のみに依る（つまり，各接空間 $T_xM \setminus \{0\}$ 上で定数な）フィンスラー多様体を **Berwald 空間**と呼ぶ．このとき共変微分 (1.9) は参照ベクトルによらず一意に定まる．Berwald 空間は，フィンスラー多様体全体から比べるとかなり狭いが，リーマン多様体とミンコフスキ空間を含む扱いやすい対象である．

Berwald 空間の任意の測地線 $\eta : [0,1] \longrightarrow M$ に対し，η に沿った $(T_{\eta(0)}M, F)$ から $(T_{\eta(1)}M, F)$

への平行移動は線形等長であることが知られている（[Ic], [BCS, Proposition 10.1.1]）．よってBerwald 空間は一種類のミンコフスキ空間のみを接空間に持ち，平行移動の等長性よりホロノミー理論を用いてある種の分類も行われている（[Sz1], [Sz2]）．例えば，2 次元 Berwald 空間はリーマン多様体か局所的にミンコフスキ空間であるかのどちらかである（[Sz1], [BCS, Theorem 10.6.2]）．各接空間内の単位球の体積が一定になる M 上の測度 m_{BH} を **Busemann–Hausdorff 測度**と呼び，Berwald 空間では m_{BH} に対し $\mathbf{S} \equiv 0$（よって全ての $N \in [n, \infty]$ で $\mathrm{Ric}_N = \mathrm{Ric}$）が成り立つ（[Sh2, Proposition 7.3.1]）．従って，この場合は m_{BH} を良い参照測度として採用できる．

(c) （**Randers 空間**，[BCS, Chapter 11]）フィンスラー構造 F を，リーマン計量 g と 1 形式 β を用いて

$$F(v) = \sqrt{g(v,v)} + \beta(v)$$

と表せるフィンスラー多様体を **Randers 空間**と呼ぶ（F の正値性のため，任意の $v \in TM \setminus \{0\}$ に対し $|\beta(v)|^2 < g(v,v)$ が成り立つとする）．この F は，しばしばリーマン多様体 (M, g) に風 β が吹いている状況を表したものと解釈される（[BRS] 参照）．各 $F|_{T_xM}$ の単位球面は，g の単位球面を β の分だけずらしたものであり，楕円面を平行移動したものになる．Randers 空間は物理などの応用上重要であり，また具体的な計算もしやすい．

(d) （**ヒルベルト幾何**）$D \subset \mathbb{R}^n$ を，有界開集合で境界 ∂D が滑らかかつ正に曲がっているものとする．相異なる 2 点 $x, y \in D$ に対し，x, y を通る直線と ∂D との交点のうち，x に近い方を x'，y に近い方を y' とおく（図 2）．このとき，D の**ヒルベルト距離**を

$$d_{\mathcal{H}}(x,y) := \frac{1}{2} \log\left(\frac{|x'-y| \cdot |x-y'|}{|x'-x| \cdot |y-y'|} \right)$$

と定める（$|\cdot|$ はユークリッドノルム）．これは，D が球のときは双曲空間のクラインモデルと一致する．

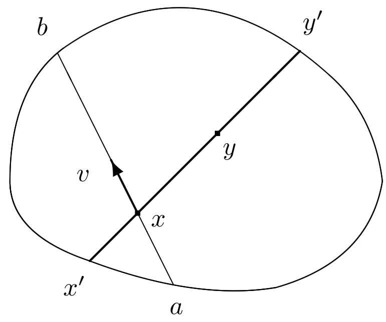

図 2

一般にヒルベルト距離 $d_{\mathcal{H}}$ はフィンスラー計量

$$F_{\mathcal{H}}(x,v) := \frac{|v|}{2}\left\{ \frac{1}{|x-a|} + \frac{1}{|x-b|} \right\}, \qquad v \in T_xD = \mathbb{R}^n,$$

で実現され（a, b はそれぞれ x から $-v$, v 方向へ伸びる半直線と ∂D との交わり，図 2），その旗曲率は恒等的に -1 になる（[Sh3, §2.3]）．また，D に制限したルベーグ測度 $\mathbf{L}^n$ に対し，

$$\mathrm{Ric}_\infty \geq -(n-1), \qquad \mathrm{Ric}_N \geq -(n-1) - \frac{(n+1)^2}{N-n} \quad \text{for } N \in (n,\infty)$$

が成り立つ ([Oh8])．ヒルベルト幾何は，幾何学的・力学系的側面から色々と研究されている ([Eg], [Be], [CV] など参照)．

(e) (**Funk 幾何**) ヒルベルト距離の対称性を捨てて，(ある意味で) 簡単にしたものを **Funk 距離**と呼ぶ．つまり，上と同じ記号で

$$d_{\mathcal{F}}(x,y) := \log\left(\frac{|x-y'|}{|y-y'|}\right)$$

とし，これは前向き完備なフィンスラー計量

$$F_{\mathcal{F}}(x,v) := \frac{|v|}{|x-b|}, \qquad v \in T_xD = \mathbb{R}^n,$$

で実現される．$(D, F_{\mathcal{F}})$ の旗曲率は恒等的に $-1/4$ であり ([Sh3, §2.3])，$\mathbf{L}^n$ に対し

$$\mathrm{Ric}_\infty \equiv -\frac{n-1}{4}, \qquad \mathrm{Ric}_N \equiv -\frac{n-1}{4} - \frac{(n+1)^2}{4(N-n)} \quad \text{for } N \in (n,\infty)$$

が成り立つ ([Oh8])．

(f) (**タイヒミュラー空間**) タイヒミュラー空間のタイヒミュラー計量は完備フィンスラー計量である．一方，Weil–Petersson 計量はリーマン計量であるが完備ではない ([EE], [Wo] など参照)．

4　非線形ラプラシアンと熱流

フィンスラー計量 F と測度 m に付随する非線形ラプラシアンを導入し，その重みつきリッチ曲率との関係を見る．また，対応する非線形熱方程式の解 (熱流) についても述べる．

4.1　非線形ラプラシアン

微分可能な関数 $u: M \longrightarrow \mathbb{R}$ の点 $x \in M$ での**勾配ベクトル** $\boldsymbol{\nabla} u(x) \in T_xM$ を，微分 $Du(x) \in T_x^*M$ の**ルジャンドル変換**と定義する．すなわち，F^* を F の双対ノルムとするとき，$\boldsymbol{\nabla} u(x)$ は

$$F\big(\boldsymbol{\nabla} u(x)\big) = F^*\big(Du(x)\big), \qquad [Du(x)]\big(\boldsymbol{\nabla} u(x)\big) = F^*\big(Du(x)\big)^2$$

を満たす唯一の T_xM の元である．定義より勾配ベクトル $\boldsymbol{\nabla} u$ は u が最も増える方向を向いている．M 上で $F(\boldsymbol{\nabla} u) \leq L$ が成り立つとき，u は

$$u(y) - u(x) \leq L d(x,y) \qquad \forall x, y \in M$$

を満たすという意味で ***L* リプシッツ**である．

$u \in H^1_{\mathrm{loc}}(M)$ に作用する**非線形ラプラシアン** $\boldsymbol{\Delta}$ を，$\boldsymbol{\nabla} u$ の m による発散で定義する．正確には，

$$\int_M \phi \boldsymbol{\Delta} u \, dm := -\int_M D\phi(\boldsymbol{\nabla} u) \, dm \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(M)$$

と弱い意味で定義する．ルジャンドル変換は内積空間以外では非線形なので，$\boldsymbol{\Delta}$ は非線形作用素である ($\boldsymbol{\Delta}(u_1+u_2) = \boldsymbol{\Delta} u_1 + \boldsymbol{\Delta} u_2$ とは限らない)．次の基本的な性質は，次節の Bochner–Weitzenböck 公式の意味を考える上でも重要である．

注意 4.1 $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(M)$ に対し，可測なベクトル場 V で，

- 全ての $x \in M$ で $V(x) \neq 0$,
- $\boldsymbol{\nabla} u(x) \neq 0$ ならば $V(x) = \boldsymbol{\nabla} u(x)$

を満たすものを取り，関数 f の g_V についての勾配ベクトル場を $\nabla^V f$ で表す．このとき，$\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u} f$ を

$$\int_M \phi \Delta^{\boldsymbol{\nabla} u} f \, dm := -\int_M D\phi(\nabla^V f) \, dm \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(M)$$

により定めると，$\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u} u = \boldsymbol{\Delta} u$ が成り立つ．つまり，($\boldsymbol{\nabla} u$ の方向に線形化された) 線形作用素 $\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}$ と非線型作用素 $\boldsymbol{\Delta}$ は，u に作用するときは一致する．

非線形ラプラシアン $\boldsymbol{\Delta}$ は重みつきリッチ曲率と相性が良く，次のラプラシアンの比較定理が成り立つ（[OS1, Theorem 5.2]）．$z \in M$ と z から出る測地線 $\eta : [0, \infty) \longrightarrow M$ に対し，

$$l_0 := \sup\{l > 0 \,|\, \gamma \text{ は } [0, l] \text{ で最短 }\}$$

が有界であるとき，$\gamma(l_0)$ を z の**切断点**（または**最小点**）と呼び，z の切断点全体（**切断跡**，**最小跡**）を Cut_z で表す．

定理 4.2 (ラプラシアンの比較定理) (M, F) を前向きまたは後ろ向き完備とし，$\mathrm{Ric}_N \geq K > 0$ がある $N \in [n, \infty)$ で成り立つとする．任意に固定した $z \in M$ について $u(x) = d(z, x)$ とおくとき，

$$\boldsymbol{\Delta} u(x) \leq \sqrt{(N-1)K} \cot\left(\sqrt{\frac{K}{N-1}} d(z, x)\right) \tag{4.1}$$

が $M \setminus (\{z\} \cup \mathrm{Cut}_z)$ では各点で，$M \setminus \{z\}$ では弱い意味で成り立つ．$\mathrm{Ric}_N \geq K$ かつ $K \leq 0$ のときは，(4.1) の右辺は

$$\frac{N-1}{d(z,x)} \quad \text{if } K = 0, \qquad \sqrt{-(N-1)K} \coth\left(\sqrt{\frac{-K}{N-1}} d(z,x)\right) \quad \text{if } K < 0$$

と置き換えられる．

4.2 熱流

ラプラシアン $\boldsymbol{\Delta}$ に対応する**非線形熱方程式** $\partial_t u = \boldsymbol{\Delta} u$ は，F の滑らかさと強凸性より，それほど扱いにくい方程式ではない．実際，(1.4) を用いた評価により，$\boldsymbol{\Delta}$ は局所的に一様楕円的である．そのような作用素についての研究の既知の手法から，例えば任意の初期値 $u \in H_0^1(M)$ から始まる $\partial_t u = \boldsymbol{\Delta} u$ の弱解 $(u_t)_{t \in [0,\infty)}$ が存在し，それは x について H^2_{loc} かつ $(0, \infty) \times M$ 上 $C^{1,\alpha}$ であることがわかる（[OS1], [GS]）．例えば，ミンコフスキ空間 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ で

$$u(t, x) = t^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|-x\|^2}{4t}\right)$$

は熱方程式を解く．ここで，$\|x\|^2$ が $x = 0$ で C^2 であるための必要十分条件は $\|\cdot\|$ が内積から来ることであり，よって一般には $C^{1,\alpha}$ が最良の評価である．

さて，[太田] でも触れたように，熱流は L^2-Wasserstein 空間内の相対エントロピーの勾配流と見なせる．このような熱流の解釈は，始めにユークリッド空間の場合に Jordan–Kinderlehrer–Otto [JKO] により提唱され，リーマン多様体にも拡張された（[Sa], [Oh1], [Vi2], [Er] など；考える状況や勾配

流の定式化がそれぞれ異なる)．相対エントロピーの L^2-Wasserstein 距離についての K 凸性は曲率次元条件 $\mathsf{CD}(K,\infty)$ に他ならず，従って $\mathsf{CD}(K,\infty)$ と $\mathrm{Ric}_\infty \geq K$ の同値性を通じてリッチ曲率と熱流の振る舞いの関係を調べることができる．例えば，ポテンシャル（＝相対エントロピー）の K 凸性は自然に勾配流（＝熱流）の ***K* 収縮性**

$$W_2(\mu_t,\nu_t) \leq e^{-Kt} W_2(\mu_0,\nu_0) \qquad \forall t>0 \tag{4.2}$$

を導く（$\mu_t=\rho_t m, \nu_t=\sigma_t m \in \mathcal{P}(M)$ で，ρ_t,σ_t が熱方程式を解くとした；[vRS]）．

フィンスラー多様体でも同様の解釈は可能であり，(M,F,m) の熱流は逆向きフィンスラー構造 $\overleftarrow{F}$ の導く L^2-Wasserstein 距離 $\overleftarrow{W}_2$ についての相対エントロピーの勾配流と一致する（[OS1]）．しかし，この場合は $\mathrm{Ric}_\infty \geq K$（＝相対エントロピーの K 凸性）から熱流の K 収縮性は導けない．実際，次が成り立つ．

定理 4.3 ([OS2])　内積空間ではないミンコフスキ空間 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|, \mathbf{L}^n)$ では，熱流は全ての $K\in\mathbb{R}$ に対し K 収縮でない．

これは特に，ノルム空間上の凸関数の勾配流の収縮性についての [AGS1, Introduction] の問の答えになっている．定理 4.3 の証明には，次のような幾何学的な内積空間の特徴づけを使う．

補題 4.4 ([OS2])　ミンコフスキ平面 $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$ が内積空間でないならば，3 点 $a,b,c\in\mathbb{R}^2$ でノルム $\|\cdot\|$ の単位円に接するある三角形 $\triangle ABC$ で，

$$v := |\triangle OAB|\cdot c + |\triangle OBC|\cdot a + |\triangle OCA|\cdot b \neq 0$$

となるものが存在する（O は原点，$|\triangle OAB|$ は $\triangle OAB$ の面積）．内積空間では，任意の単位円に接する三角形 $\triangle ABC$ に対し $v=0$ となる．

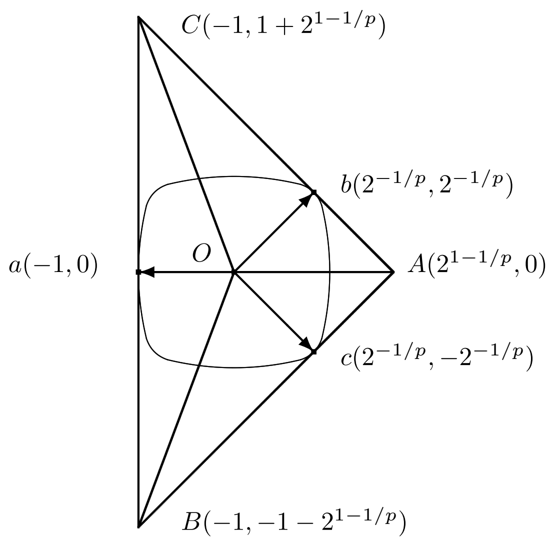

図 3

例えば 2 次元 ℓ_p 空間で $2<p<\infty$ の場合，図 3 のような $\triangle ABC$ を考えると，ℓ_2 のときの単位円

との比較から，ある $x > 0$ に対し $v = (x, 0)$ となることがわかる．

尚，熱流の相対エントロピーの勾配流としての解釈は，Ambrosio–Gigli–Savaré [AGS2] により，曲率次元条件を満たす測度距離空間という極めて一般的な状況まで拡張された（[GKO] も参照）．これはもちろんフィンスラー多様体を含むのでその熱流は一般に線形ではないが，線形な場合（ある意味で空間が「リーマン的」な場合）には収縮性などの応用も拡張される（[AGS3]）．

また，相対エントロピーではないエントロピーを用いて，porous medium 方程式や fast diffusion 方程式などを勾配流と見なすこともできる（[St1], [OT1], [OT2]）．そのようなエントロピーの凸性は，リッチ曲率の下限と微妙に異なる曲率条件を与える．

5　Bochner–Weitzenböck 公式と勾配評価

前節で導入した非線形ラプラシアン $\boldsymbol{\Delta}$ と注意 4.1 で述べた線形化されたラプラシアン $\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}$ を用いて，Bochner–Weitzenböck 型の公式が成り立つ．応用として，Bakry–Émery 型と Li–Yau 型の勾配評価及び Harnack 不等式が得られる．

5.1　Bochner–Weitzenböck 公式

$u \in C^\infty(M)$ に対し，$M_u := \{x \in M \mid Du(x) \neq 0\}$ とおく．M_u ではリーマン計量 $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ を考えることができ，点ごとの計算により次の Bochner–Weitzenböck 公式が得られる（[OS3, Theorem 3.3]）．

定理 5.1 (点ごと Bochner–Weitzenböck 公式)　任意の $u \in C^\infty(M)$ に対し，

$$\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla} u)^2}{2}\right) - D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u) = \mathrm{Ric}_\infty(\boldsymbol{\nabla} u) + \|\boldsymbol{\nabla}^2 u\|^2_{HS(\boldsymbol{\nabla} u)} \tag{5.1}$$

が M_u の各点で成り立つ．また，各 $N \in [n, \infty)$ に対し，

$$\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla} u)^2}{2}\right) - D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u) \geq \mathrm{Ric}_N(\boldsymbol{\nabla} u) + \frac{(\boldsymbol{\Delta} u)^2}{N} \tag{5.2}$$

がやはり M_u の各点で成り立つ．

(5.1) の右辺で，$\boldsymbol{\nabla}^2 u$ は勾配ベクトル場 $\boldsymbol{\nabla} u$ の $\boldsymbol{\nabla} u$ を参照ベクトルとする共変微分 $D^{\boldsymbol{\nabla} u}(\boldsymbol{\nabla} u) : TM \longrightarrow TM$　((1.9) 参照)，$\|\boldsymbol{\nabla}^2 u\|_{HS(\boldsymbol{\nabla} u)}$ はその $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ についての Hilbert–Schmidt ノルムを表す．これらの公式は，$\boldsymbol{\nabla} u$ を無視すれば（重みつき）リーマン多様体のときと全く同じであることに注意する．(5.1) の証明は本質的にリーマン多様体と同様の計算によって行われるが，全く同じではない．最も重要な点は，正しい定式化（どこで $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ を使うか？）を見つけることにある．(5.2) は (5.1) から標準的な方法で導かれる．

注意 5.2　注意 1.5 で述べたように，$D^{\boldsymbol{\nabla} u}(\boldsymbol{\nabla} u)$ はリーマン計量 $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ についての共変微分とは異なる．両者は $\boldsymbol{\nabla} u$ の積分曲線が測地線になるときは一致するが (そのときは $\mathrm{Ric}_\infty(\boldsymbol{\nabla} u) = \mathrm{Ric}_\infty^{\boldsymbol{\nabla} u}(\boldsymbol{\nabla} u)$ も成立)，これは u への非常に強い制限である．従って，(5.1) の右辺の各項は重みつきリーマン多様体 $(M, g_{\boldsymbol{\nabla} u}, m)$ の Bochner–Weitzenböck 公式の対応する項とは一致しない．一方，(5.1) の左辺に現れる $\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}(F(\boldsymbol{\nabla} u)^2)$ と $D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u)$ は F と $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ で一致する（注意 4.1 参照）．

M_u の外では，$\boldsymbol{\Delta} u$ などが点ごとには意味を持たないため，(5.1), (5.2) の公式は積分した形で考えなければならない．この点はリーマン多様体のときよりもかなり慎重に議論する必要がある（[OS3, Theorem 3.6]).

定理 5.3 (積分版 Bochner–Weitzenböck 公式)　$u \in H^2_{\mathrm{loc}}(M) \cap C^1(M)$ で $\boldsymbol{\Delta} u \in H^1_{\mathrm{loc}}(M)$ であるものに対し,

$$\begin{aligned} &-\int_M D\phi\left(\nabla^{\boldsymbol{\nabla} u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla} u)^2}{2}\right)\right) dm \\ &= \int_M \phi\left\{D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u) + \mathrm{Ric}_\infty(\boldsymbol{\nabla} u) + \|\boldsymbol{\nabla}^2 u\|^2_{HS(\boldsymbol{\nabla} u)}\right\} dm \end{aligned}$$

が任意の $\phi \in H^1_c(M) \cap L^\infty(M)$ で成り立ち，また

$$-\int_M D\phi\left(\nabla^{\boldsymbol{\nabla} u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla} u)^2}{2}\right)\right) dm \geq \int_M \phi\left\{D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u) + \mathrm{Ric}_N(\boldsymbol{\nabla} u) + \frac{(\boldsymbol{\Delta} u)^2}{N}\right\} dm$$

が任意の $N \in [n, \infty]$ と非負関数 $\phi \in H^1_c(M) \cap L^\infty(M)$ について成り立つ.

5.2　勾配評価

解析的な応用として，M がコンパクトな場合に，まず (5.1) より次の勾配評価を得る（[OS3, Theorem 4.1]).

定理 5.4 (Bakry–Émery 型勾配評価)　(M, F, m) をコンパクトで $\mathrm{Ric}_\infty \geq K$ をある $K \in \mathbb{R}$ で満たすとし，$u : [0, T] \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ を熱方程式の大域解とする．このとき，任意の $0 \leq s < t \leq T$ と $x \in M$ に対し,

$$F\big(\boldsymbol{\nabla} u_t(x)\big)^2 \leq e^{-2K(t-s)} P^{\boldsymbol{\nabla} u}_{s,t}\big(F(\boldsymbol{\nabla} u_s)^2\big)(x) \tag{5.3}$$

が成り立つ（$u_t := u(t, \cdot)$).

(5.3) の右辺で，$P^{\boldsymbol{\nabla} u}_{s,t}$ は $\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}$ の導く（時刻 s から t への）線形熱半群である．定理 5.4 の系として，次のようなリプシッツ定数の増大度の評価を得る．関数 u のリプシッツ定数を

$$\mathrm{Lip}(u) := \sup_{x,y \in M} \frac{u(y) - u(x)}{d(x, y)}$$

と定める.

系 5.5　(M, F, m) と $u : [0, T] \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ を定理 5.4 と同様とするとき,

$$\|F(\boldsymbol{\nabla} u_t)\|_{L^\infty} \leq e^{-Kt} \|F(\boldsymbol{\nabla} u_0)\|_{L^\infty}$$

が全ての $t \in [0, T]$ で成り立つ．特に $u_0 \in C(M)$ ならば，$\mathrm{Lip}(u_t) \leq e^{-Kt} \mathrm{Lip}(u_0)$ が成り立つ.

注意 5.6　リーマン多様体の場合，系 5.5 の性質はリッチ曲率が K 以上であることと同値である ([vRS])．また，一般の線形半群に対し，Bakry–Émery 型の勾配評価は W_2 についての収縮性 (4.2) と同値であることが知られている（[Ku])．一方，非線形熱流では勾配評価は（定理 5.4 の意味で）成り立つが，収縮性は前節で述べたように成り立たない.

更に，(5.2) より次を得る（[OS3, Theorems 4.4, 4.5]).

定理 5.7 (Li–Yau 型勾配評価)　(M, F, m) をコンパクトで $\mathrm{Ric}_N \geq K$ をある $N \in [n, \infty)$ と $K \in$

$\mathbb{R}$ で満たすとし，$K' := \min\{K, 0\}$ とおく．$u : [0,T] \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ を熱方程式の正の大域解とするとき，任意の $\theta > 1$ に対し，

$$F\big(\boldsymbol{\nabla}(\log u)(t,x)\big)^2 - \theta\partial_t(\log u)(t,x) \le N\theta^2\left(\frac{1}{2t} - \frac{K'}{4(\theta-1)}\right)$$

が $(0,T] \times M$ 上で成り立つ．

定理 5.8 (Li–Yau 型 Harnack 不等式)　(M,F,m), $N \in [n,\infty)$, $K \in \mathbb{R}$, $K' \le 0$ を定理 5.7 の通りとし，$u : [0,T] \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ を熱方程式の非負の大域解とする．このとき，

$$u(s,x) \le u(t,y) \cdot \left(\frac{t}{s}\right)^{\theta N/2} \exp\left(\frac{\theta d(y,x)^2}{4(t-s)} - \frac{\theta K' N(t-s)}{4(\theta-1)}\right)$$

が任意の $\theta > 1$, $0 < s < t \le T$ と $x,y \in M$ で成り立つ．

定理 5.4, 5.7, 5.8 の証明はリーマン多様体のときと基本的に同じである（[Da, §5.3], [LY] 参照）．但し，コンパクトでない場合への拡張は同様にはできず，未解決である．

6　分解定理

重みつきリッチ曲率の最後の応用として，Cheeger–Gromoll 型の分解定理[2)]（[CG1], [CG2]）を拡張する．まず一般のフィンスラー多様体の場合を扱い，それからより詳しいことがわかる Berwald 空間の場合について述べる．

6.1　一般の場合

$\eta : [0,\infty) \longrightarrow M$ を**半直線**（任意の $0 \le s < t < \infty$ に対し $d(\eta(s),\eta(t)) = t-s$ である測地線）とする．η の **Busemann 関数** $\mathbf{b}_\eta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathbf{b}_\eta(x) := \lim_{t\to\infty}\big\{t - d\big(x,\eta(t)\big)\big\}$$

と定義する．三角不等式よりこの極限は確かに存在し，また $\mathbf{b}_\eta$ は 1 リプシッツである．

ラプラシアンの比較定理（定理 4.2）より，重みつきリーマン多様体のときと同様の議論（[FLZ] 参照）から，次が従う．簡単のため $UM := \{v \in TM \mid F(v) = 1\}$ とおき，$\Psi : UM \longrightarrow \mathbb{R}$ を定義 2.2 の記号で $\Psi(\dot\eta(t)) := \psi(\eta(t))$ により定める．

命題 6.1　(M,F,m) を前向き完備かつ $\mathrm{Ric}_N \ge 0$ がある $N \in [n,\infty]$ について成り立つとし，$N = \infty$ なら更に $\Psi : UM \longrightarrow \mathbb{R}$ が上に有界だとする．このとき $\mathbf{b}_\eta$ は劣調和である，つまり $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{b}_\eta \ge 0$ が弱い意味で成り立つ．

$\eta : \mathbb{R} \longrightarrow M$ を**直線**（任意の $-\infty < s < t < \infty$ に対し $d(\eta(s),\eta(t)) = t-s$ である測地線）とし，

$$\mathbf{b}_\eta(x) := \lim_{t\to\infty}\big\{t - d\big(x,\eta(t)\big)\big\}, \qquad \mathbf{b}_{\bar\eta}(x) := \lim_{t\to\infty}\big\{t - d\big(\eta(-t),x\big)\big\}$$

とおく．つまり，$\mathbf{b}_\eta$ は $\eta|_{[0,\infty)}$ の Busemann 関数，$\mathbf{b}_{\bar\eta}$ は $\bar\eta(t) := \eta(-t)$（$t \in [0,\infty)$）の $\overleftarrow{F}$ についての Busemann 関数である．命題 6.1 より

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{b}_\eta \ge 0 \ge -\overleftarrow{\boldsymbol{\Delta}}\mathbf{b}_{\bar\eta} = \boldsymbol{\Delta}(-\mathbf{b}_{\bar\eta})$$

であり，よって最大値原理より次を得る．

命題 6.2　(M,F,m) を命題 6.1 の通りかつ後ろ向き完備とし，$\eta:\mathbb{R}\longrightarrow M$ を直線とする．このとき $\mathbf{b}_\eta+\mathbf{b}_{\bar\eta}\equiv 0$ が成り立ち，また $\mathbf{b}_\eta$ と $\mathbf{b}_{\bar\eta}$ はそれぞれ F と $\overleftarrow{F}$ について調和である．特に，$\mathbf{b}_\eta$ と $\mathbf{b}_{\bar\eta}$ は C^∞ であり，$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{b}_\eta=\overleftarrow{\boldsymbol{\Delta}}\mathbf{b}_{\bar\eta}\equiv 0$ は M 全体で各点で成り立つ．

実際，$\mathbf{b}_\eta$ は熱方程式の定常解なので $C^{1,\alpha}$ であり，更に $F(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{b}_\eta)\equiv 1$ より C^∞ になる．また，$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{b}_\eta$ の任意の積分曲線は（η に漸近する）直線である．$\mathbf{b}_\eta$ のこれらの著しく良い性質により，重みつきリーマン多様体の分解定理（[Li], [FLZ]）を適用して次が得られる（正確に言うと，証明では $\mathbf{b}_\eta$ に Bochner–Weitzenböck 公式を適用するが，それは $\mathbf{b}_\eta$ について上で述べた性質より $(M,g_{\boldsymbol{\nabla}\mathbf{b}_\eta},m)$ の Bochner–Weitzenböck 公式と同じである；注意 5.2 参照）．

命題 6.3 ($(M,g_{\boldsymbol{\nabla}\mathbf{b}_\eta},m)$ の等長分解)　(M,F,m) を命題 6.2 の通りとする．(M,F) が直線 $\eta:\mathbb{R}\longrightarrow M$ を含むならば，リーマン多様体 $(M,g_{\boldsymbol{\nabla}\mathbf{b}_\eta})$ は $M=M'\times\mathbb{R}$ と等長的に分解し，また $\Psi\circ\dot\sigma$ は各直線 $\sigma(s)=(x,s)\in M'\times\mathbb{R}$（$x\in M'$）上で定数である．

具体的には $M'=\mathbf{b}_\eta^{-1}(0)$ で与えられ，$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{b}_\eta$ の導く M の 1 パラメータ変換群が $g_{\boldsymbol{\nabla}\mathbf{b}_\eta}$ について等長になる．

系 6.4　(M,F,m) を命題 6.2 の通りとする．(M,F) が直線 $\eta:\mathbb{R}\longrightarrow M$ を含むならば，(M,m) は $(M,m)=(M'\times\mathbb{R},m'\times\mathbf{L}^1)$ と微分同相かつ測度を保存して分解する（$\mathbf{L}^1$ は 1 次元ルベーグ測度，$m':=m|_{M'}$）．また，$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{b}_\eta\equiv 0$ が成り立つ．

正確には，$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{b}_\eta$ の導く M の 1 パラメータ変換群が微分同相かつ測度 m を保存する．命題 6.3, 系 6.4 において，$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{b}_\eta\notin TM'$ より M' の構造については何も言えず（例えばリッチ曲率が非負かもわからない），従ってこれらの分解は繰り返せない．

6.2　Berwald 空間の場合

(M,F) を Berwald 空間とする (3 節 (b) 参照)．共変微分が参照ベクトルに依らないことから，系 6.4 の $\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{b}_\eta\equiv 0$ より次が導かれる．

補題 6.5　任意の測地線 $\xi:[0,l]\longrightarrow M$ に沿って，$(\mathbf{b}_\eta\circ\xi)''\equiv 0$ が成り立つ．特に，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し，$\mathbf{b}_\eta^{-1}(t)$ は**測地的凸**である（$\mathbf{b}_\eta^{-1}(t)$ の 2 点を結ぶ任意の測地線が $\mathbf{b}_\eta^{-1}(t)$ に含まれる）．

更に，平行移動の等長性などを用いた（リーマン多様体のときより）慎重な議論により，次の意味で等長分解が成り立つ（[Oh7, Theorem 5.4]）．

定理 6.6 (Berwald 空間の等長分解)　(M,F,m) を前向きかつ後ろ向き完備で，$\mathrm{Ric}_N\ge 0$ をある $N\in[n,\infty]$ で満たし，また $N=\infty$ なら Ψ が上に有界であるとする．このとき，次が成り立つ．

(i) 測度を保存する等長変換の l パラメータ族 $\varphi_p:M\longrightarrow M$（$p\in\mathbb{R}^l$）と測地的凸な $(n-l)$ 次元部分多様体 $\overline{M}\subset M$ で次を満たすものが存在する．
- M 内の任意の直線に対応する Busemann 関数は $\overline{M}$ 上定数；
- $(\overline{M},F|_{T\overline{M}},\overline{m})$ は Berwald 空間で $\mathrm{Ric}_{N-l}\ge 0$ を満たす（$\overline{m}:=m|_{\overline{M}}$）；
- $\bigsqcup_{p\in\mathbb{R}^l}\varphi_p(\overline{M})=M$；
- 任意の $p,q\in\mathbb{R}^l$ に対し $\varphi_{p+q}=\varphi_q\circ\varphi_p$.

特に，(M,m) は $(M,m)=(\overline{M}\times\mathbb{R}^l,\overline{m}\times\mathbf{L}^l)$ と微分同相かつ測度を保存して分解する．

(ii) 各 $x\in M$ に対し，$\Sigma_x:=\{\varphi_p(x)\}_{p\in\mathbb{R}^l}$ は M の l 次元部分多様体であり，また $(\Sigma_x,F|_{T\Sigma_x})$ の旗曲率は恒等的に 0 である．

(iii) 任意の $x,y\in\overline{M}$ に対し，$(\Sigma_x,F|_{T\Sigma_x})$ は $(\Sigma_y,F|_{T\Sigma_y})$ と等長的．

ノルム空間を考えればわかるように，一般にフィンスラー多様体では ℓ_2 直積への分解定理は成り立たない．上で述べた「等長分解」が期待できる最良のものである．任意の Busemann 関数が定数になるという $\overline{M}$ の特徴づけをうまく使って，Cheeger–Gromoll のベッチ数評価（[CG1], [CG2]）も拡張される（[Oh7, Theorem 5.6]）．

定理 6.7 (ベッチ数評価) (M,F,m) をコンパクト Berwald 空間で $\mathrm{Ric}_N\ge 0$ をある $N\in[n,\infty]$ で満たすとし，$N=\infty$ なら更に Ψ は上に有界であるとする．$(\widetilde{M},\widetilde{F})$ を (M,F) の普遍フィンスラー被覆とし，$\widetilde{M}=\overline{M}\times\mathbb{R}^l$ でその定理 6.6 による分解を表す．このとき，次が成り立つ．

(i) $\overline{M}$ はコンパクトである．

(ii) 基本群 $\pi_1(M)$ の有限正規部分群 Ξ で，$\pi_1(M)/\Xi$ が $\mathbb{Z}^l$ を有限指数の正規部分群として含むものが存在する．

(iii) M の第 1 ベッチ数は l 以下である．

Berwald 空間でないフィンスラー多様体で定理 6.6, 6.7 の拡張が（部分的にでも）期待できるかは全くわかっていない．

7 展望

最後に，今後の発展の可能性について簡単に述べたい．フィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率の研究は始まったばかりであり，様々な展開が期待される．

(a) これまで見てきたように，重みつきリッチ曲率は一般のフィンスラー多様体の研究に非常に役立つ．これを，具体的な空間の研究に生かしたい．例えば，タイヒミュラー空間の重みつきリッチ曲率はどうなっているだろうか．

(b) フィンスラー多様体の理論を，バナッハ空間の幾何学に応用したい．両者は扱う空間の類似にも関わらず，接点があまりなかった．例えば，曲率次元条件の応用で触れた測度の集中は，バナッハ空間の幾何学でもよく研究されている．

(c) フィンスラー計量はラグランジアンの一種と考えられ，ラグランジアンに対応するコストを用いた最適輸送問題は力学系とも関連して研究されている．そこで，リッチ曲率の理論をフィンスラー多様体より一般のラグランジアンに対して展開できれば非常に面白い．

(d) 2 節で触れたように，重みつきリッチ曲率が下から押さえられたフィンスラー多様体は曲率次元条件を満たす．従ってフィンスラー多様体は，リーマン多様体で知られている性質が曲率次元条件を満たす測度距離空間で期待できるかを判定する良いモデル空間でもある（つまり，その性質が「リッチ曲率の下限」のみによるか，熱流の収縮性のように空間が「リーマン的」であることも必要か）．ここまで述べたフィンスラー多様体で成り立つ性質のうち，例えばラプラシアンの比較定理は最近 Gigli [Gi] により曲率次元条件を持つ測度距離空間に拡張された．一方，$N<\infty$ での Bochner–Weitzenböck 公式や分解定理など，まだわからないことも多い．

8 テンソルの森

The term "Finsler space" evokes in most mathematicians the picture of an impenetrable forest whose entire vegetation consists of tensors. ...*the association of tensors with Finsler spaces is due to a historical accident, and that,* at least at the present time, *the fruitful and relevant problems lie in a different direction.* — Herbert Busemann [Bu] (1950)

最後に，座標を用いた主要な量の表示を与える．このような表示が重要であることは言うまでもないが，本論説では直観的・幾何学的な説明を優先したため，殆ど触れなかった．詳しくは [BCS] を参照されたい．

$v \in TM \setminus \{0\}$ とし，添字は $1, 2, \ldots, n$ を動くとする．(g^{ij}) で (g_{ij}) の逆行列を表す．

$$g_{ij}(v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(F^2)}{\partial v^i \partial v^j}(v), \quad \text{(fundamental tensor)}$$

$$A_{ijk}(v) = \frac{F(v)}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}(v), \quad \text{(Cartan tensor)}$$

$$\gamma^i_{jk}(v) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n g^{il}(v)\left\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(v) + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}(v) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(v)\right\}, \quad \text{(formal Christoffel symbol)}$$

$$G^i(v) = \sum_{j,k=1}^n \gamma^i_{jk}(v) v^j v^k, \quad \text{(geodesic spray coefficient)}$$

$$N^i_j(v) = \frac{1}{2}\frac{\partial G^i}{\partial v^j}(v), \quad \text{(nonlinear connection)}$$

$$\Gamma^i_{jk}(v) = \gamma^i_{jk}(v) - \sum_{l,m=1}^n \frac{g^{il}(v)}{F(v)}\big\{A_{jlm}(v)N^m_k(v) + A_{lkm}(v)N^m_j(v) - A_{jkm}(v)N^m_l(v)\big\},$$

$$R_{ij}(v) = \sum_{k,l=1}^n g_{ik}(v)\frac{v^l}{F(v)}\left\{\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{N^k_l}{F}\right)(v) - \frac{\delta}{\delta x^l}\left(\frac{N^k_j}{F}\right)(v)\right\} \quad \text{([BCS, Exercise 3.3.4])}$$

$$\left(\text{但し}\quad \frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{m=1}^n N^m_j \frac{\partial}{\partial v^m}\right),$$

$$R_v(w) = F(v)^2 \sum_{i,j,k=1}^n g^{jk}(v) R_{ij}(v) w^i \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

リーマン多様体は $A_{ijk} \equiv 0$ で特徴づけられ，その場合 γ^i_{jk} は Γ^i_{jk} と一致する．

U の局所座標 $(x^i)_{i=1}^n$ に対して T^*U に $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha^j dx^j$ で座標 $(x^i, \alpha^j)_{i,j=1}^n$ を入れ，

$$g^*_{ij}(\alpha) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2[(F^*)^2]}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j}(\alpha)$$

とおく．

$$\boldsymbol{\nabla} u = \sum_{i,j=1}^n g^*_{ij}(Du)\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \big(\text{また } g^*_{ij}(Du) = g^{ij}(\boldsymbol{\nabla} u)\big),$$

$$\boldsymbol{\Delta} u = \mathrm{div}(\boldsymbol{\nabla} u) = \sum_{i=1}^n \left\{\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla} u)^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\right\} \qquad (\text{但し } m = e^{\Phi} dx^1 dx^2 \cdots dx^n).$$

注　釈

1)　春季賞の受賞講演「測度距離空間のリッチ曲率と熱流」の内容は以前の論説 [太田] との重複が大きいため，この論説は講演であまり触れなかったフィンスラー多様体の場合に絞った内容とします．

2)　分解定理（splitting theorem）は，分割定理や分裂定理とも呼ばれる．

文　献

[AT]　J. C. Álvarez-Paiva and A. C. Thompson, Volumes on normed and Finsler spaces, In: A sampler of Riemann-Finsler geometry, 1–48, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **50**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[AGS1]　L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[AGS2]　L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below, Preprint (2011). Available at arXiv:1106.2090

[AGS3]　L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below, Preprint (2011). Available at arXiv:1109.0222

[BE]　D. Bakry and M. Émery, Diffusions hypercontractives (French), Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, 177–206, Lecture Notes in Math., **1123**, Springer, Berlin, 1985.

[BCL]　K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms, Invent. Math. **115** (1994), 463–482.

[BCS]　D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen, An introduction to Riemann-Finsler geometry, Springer-Verlag, New York, 2000.

[BRS]　D. Bao, C. Robles and Z. Shen, Zermelo navigation on Riemannian manifolds, J. Differential Geom. **66** (2004), 377–435.

[Be]　Y. Benoist, Convexes hyperboliques et fonctions quasisymétriques (French), Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **97** (2003), 181–237.

[BBI]　D. Burago, Yu. Burago and S. Ivanov, A course in metric geometry, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Bu]　H. Busemann, The geometry of Finsler spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **56**, (1950), 5–16.

[CG1]　J. Cheeger and D. Gromoll, The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature, J. Differential Geometry **6** (1971/72), 119–128.

[CG2]　J. Cheeger and D. Gromoll, On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, Ann. of Math. (2) **96** (1972), 413–443.

[CV]　B. Colbois and P. Verovic, Hilbert geometry for strictly convex domains, Geom. Dedicata **105** (2004), 29–42.

[Da]　E. B. Davies, Heat kernels and spectral theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[EE]　J. C. Earle and J. Eells, On the differential geometry of Teichmüller spaces, J. Analyse Math. **19** (1967), 35–52.

[Eg]　D. Egloff, Uniform Finsler Hadamard manifolds, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **66** (1997), 323–357.

[Er]　M. Erbar, The heat equation on manifolds as a gradient flow in the Wasserstein space, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **46** (2010), 1–23.

[FLZ]　F. Fang, X.-D. Li and Z. Zhang, Two generalizations of Cheeger-Gromoll splitting theorem via Bakry-Emery Ricci curvature, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), 563–573.

[GS]　Y. Ge and Z. Shen, Eigenvalues and eigenfunctions of metric measure manifolds, Proc. London Math. Soc. (3) **82** (2001), 725–746.

[Gi]　N. Gigli, On the differential structure of metric measure spaces and applications, Preprint (2012). Available at http://cvgmt.sns.it/person/226/

[GKO]　N. Gigli, K. Kuwada and S. Ohta, Heat flow on Alexandrov spaces, to appear in Comm. Pure Appl. Math.

[Ic]　Y. Ichijyō, Finsler manifolds modeled on a Minkowski space, J. Math. Kyoto Univ. **16** (1976), 639–652.

[JKO]　R. Jordan, D. Kinderlehrer and F. Otto, The variational formulation of the Fokker-Planck equation, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), 1–17.

[KK]　A. Kristály and L. Kozma, Metric characterization of Berwald spaces of non-positive flag curvature, J. Geom. Phys. **56** (2006), 1257–1270.

[KVK]　A. Kristály, C. Varga and L. Kozma, The dispersing of geodesics in Berwald spaces of non-positive flag curvature, Houston J. Math. **30** (2004), 413–420.

[Ku]　K. Kuwada, Duality on gradient estimates and Wasserstein controls, J. Funct. Anal. **258** (2010), 3758–3774.

[Le]　M. Ledoux, The concentration of measure phenomenon, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[LY]　P. Li and S.-T. Yau, On the parabolic kernel of the Schrödinger operator, Acta Math. **156** (1986), 153–201.

[Li]　A. Lichnerowicz, Variétés riemanniennes à tenseur C non négatif (French), C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **271** (1970), A650–A653.

[Lo]　J. Lott, Some geometric properties of the Bakry-Émery-Ricci tensor, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 865–883.

[LV1]　J. Lott and C. Villani, Weak curvature conditions and functional inequalities, J. Funct. Anal. **245** (2007), 311–333.

[LV2]　J. Lott and C. Villani, Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport, Ann. of Math. (2) **169** (2009), 903–991.

[Oh1] S. Ohta, Gradient flows on Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces, Amer. J. Math. **131** (2009), 475–516.

[Oh2] S. Ohta, Uniform convexity and smoothness, and their applications in Finsler geometry, Math. Ann. **343** (2009), 669–699.

[Oh3] S. Ohta, Finsler interpolation inequalities, Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), 211–249.

[Oh4] S. Ohta, Optimal transport and Ricci curvature in Finsler geometry, Adv. Stud. Pure Math. **57** (2010), 323–342.

[Oh5] S. Ohta, Vanishing S-curvature of Randers spaces, Differential Geom. Appl. **29** (2011), 174–178.

[Oh6] S. Ohta, Ricci curvature, entropy and optimal transport, to appear in Séminaires et Congrès.

[Oh7] S. Ohta, Splitting theorems for Finsler manifolds of nonnegative Ricci curvature, Preprint (2012). Available at arXiv:1203.0079

[Oh8] S. Ohta, Weighted Ricci curvature estimates for Hilbert and Funk geometries, Preprint (2012). Available at arXiv:1203.2001

[OS1] S. Ohta and K.-T. Sturm, Heat flow on Finsler manifolds, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1386–1433.

[OS2] S. Ohta and K.-T. Sturm, Non-contraction of heat flow on Minkowski spaces, Arch. Ration. Mech. Anal. **204** (2012), 917–944.

[OS3] S. Ohta and K.-T. Sturm, Bochner-Weitzenböck formula and Li-Yau estimates on Finsler manifolds, Preprint (2011). Available at arXiv:1104.5276

[OT1] S. Ohta and A. Takatsu, Displacement convexity of generalized relative entropies, Adv. Math. **228** (2011), 1742–1787.

[OT2] S. Ohta and A. Takatsu, Displacement convexity of generalized relative entropies. II, Preprint (2011). Available at arXiv:1112.5554

[OV] F. Otto and C. Villani, Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality, J. Funct. Anal. **173** (2000), 361–400.

[Qi] Z. Qian, Estimates for weighted volumes and applications, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), 235–242.

[vRS] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature, Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), 923–940.

[Sa] G. Savaré, Gradient flows and diffusion semigroups in metric spaces under lower curvature bounds, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345** (2007), 151–154.

[Sh1] Z. Shen, Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler geometry, Adv. Math. **128** (1997), 306–328.

[Sh2] Z. Shen, Lectures on Finsler geometry, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001.

[Sh3] Z. Shen, Differential geometry of spray and Finsler spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[Sh4] Z. Shen, Curvature, distance and volume in Finsler geometry, Preprint. Available at http://www.math.iupui.edu/~zshen/

[St1] K.-T. Sturm, Convex functionals of probability measures and nonlinear diffusions on manifolds, J. Math. Pures Appl. **84** (2005), 149–168.

[St2] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. I, Acta Math. **196** (2006), 65–131.

[St3] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. II, Acta Math. **196** (2006), 133–177.

[Sz1] Z. I. Szabó, Positive definite Berwald spaces. Structure theorems on Berwald spaces, Tensor (N.S.) **35** (1981), 25–39.

[Sz2] Z. I. Szabó, Berwald metrics constructed by Chevalley's polynomials, Preprint. Available at arXiv:math/0601522

[Vi1] C. Villani, Topics in optimal transportation, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Vi2] C. Villani, Optimal transport, old and new, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[Wo] S. Wolpert, Noncompleteness of the Weil-Petersson metric for Teichmüller space, Pacific J. Math. **61** (1975), 573–577.

[太田] 太田 慎一, 確率測度の空間の幾何学, 数学 **63** (2011), 21–42.

[塩谷] 塩谷 隆, Alexandrov 空間上の幾何解析, 数学 **61** (2009), 1–20.

[松本] 松本 誠, 計量微分幾何学, 裳華房, 1975.

(年 月 日提出)

(おおた しんいち・京都大学大学院理学研究科)