ミンコフスキ空間の熱流の非収縮性

太田 慎一 (京都大学)*

本講演の主結果は次である．

定理 1 ([6]) n 次元ミンコフスキ空間 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 上の（非線型熱方程式に対応する）熱流が L^2-Wasserstein 距離について非拡張になるのは，$\|\cdot\|$ が内積であるときに限る．

以下，定理の主張と背景を説明する．ここでは簡単のため，$\|\cdot\|$ は一様凸かつ $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で C^2 なノルムであるとする（ミンコフスキノルムとは，非対称性 $\|v\| \neq \|-v\|$ を許すノルムの一般化である）．

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 上のボレル確率測度の全体を $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$，$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^2 \, d\mu(x) < \infty$ を満たす $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ のなす部分集合を $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ で表す．$\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ に対し，各成分への押し出しがそれぞれ μ, ν と一致する直積空間上の測度 $\pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ の全体を $\Pi(\mu, \nu)$ で表し（例えば，$\mu \times \nu \in \Pi(\mu, \nu)$），$\mu$ と ν の間の **L^2-Wasserstein 距離**を

$$W_2(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \|y - x\|^2 \, d\pi(x, y) \right)^{1/2}$$

と定義する．

ℓ^2 空間 $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上の Wasserstein 空間 $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n), W_2)$ では，$\mu_0, \nu_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ から出発する熱流を $(\mu_t)_{t \geq 0}, (\nu_t)_{t \geq 0}$ と表すとき，

$$W_2(\mu_t, \nu_t) \leq W_2(\mu_s, \nu_s)$$

が全ての $t \geq s \geq 0$ で成り立つ．これを熱流の**非拡張性**と呼ぶ．非拡張性は良く知られた事実であるが，幾何学的には例えば次のような流れで解釈できる．

(a) 熱流は，ルベーグ測度 dx についての**相対エントロピー**

$$\mathrm{Ent}(\mu) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \rho \log \rho \, dx & \text{if } \mu = \rho \, dx, \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

の $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n), W_2)$ の中での勾配流（$\dot{\mu}_t = \nabla(-\mathrm{Ent})(\mu_t)$ の解）と見なせる（[2]）．

(b) Ent は $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n), W_2)$ の測地線に沿って凸である（[3]）．

(c) 勾配流の一般論より，凸関数の勾配流は非拡張である（[1] 参照）．

(a), (b) から (c) を導くには，Wasserstein 空間 $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n), W_2)$ にある種のリーマン構造を導入し，それについての距離 W_2 と関数 Ent の第一変分公式を使う．

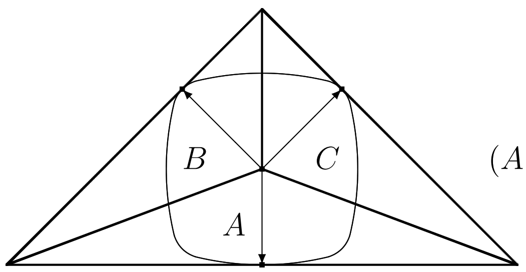
本研究は科学研究費若手研究（B）20740036 の助成を受けたものである．

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学大学院理学研究科
e-mail: `sohta@math.kyoto-u.ac.jp`
web: `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~sohta/`

さて，一般の（原点を除いて C^2 かつ一様凸な）ノルム空間 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ でも，自然な非線型熱方程式の解である熱流に対して，上の (a), (b) が成立する（[5], [4]）．一方，我々の定理 1 は，(c) は内積空間特有の現象であると言っている．ノルム空間上の Wasserstein 空間にはある種のフィンスラー構造を導入することができ，それについて第一変分公式を書き下すことができる．しかし，そこで勾配流（熱流）の非拡張性のために関数（Ent）が満たすべき必要十分条件となるのは，測地線に沿った凸性とは異なる種類の凸性である．この新しい凸性を [6] では**歪凸性（skew convexity）**と呼んだ．リーマン構造を持つ空間では歪凸性と凸性は一致するが，ノルム空間ではこれらの間に包含関係はない．

[6] では，Ent が内積空間以外では歪凸にならないことを示した．従って，熱流は非拡張ではない．証明で鍵となるのは，次の幾何学的な性質である：

「内積空間でない 2 次元ノルム空間 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ には，単位円に外接する三角形で‘中心’が原点ではないものが存在する」（下図参照，A, B, C は太線で囲まれた各三角形の面積）



$$(A\times\downarrow) + (B\times\nwarrow) + (C\times\nearrow) \neq 0$$

内積空間ではこのような三角形は存在しない．この三角形を用いて，熱流に沿って‘中心’が動く確率測度を構成することができる．すると，平行移動とスケーリングによって‘中心’が離れていく確率測度の組が存在することがわかり，よって熱流は非拡張ではない．

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures. Second edition, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[2] R. Jordan, D. Kinderlehrer and F. Otto, The variational formulation of the Fokker-Planck equation, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), 1–17.

[3] R. J. McCann, A convexity principle for interacting gases, Adv. Math. **128** (1997), 153–179.

[4] S. Ohta, Finsler interpolation inequalities, Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), 211–249.

[5] S. Ohta and K.-T. Sturm, Heat flow on Finsler manifolds, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1386–1433.

[6] S. Ohta and K.-T. Sturm, Non-contraction of heat flow on Minkowski spaces, Preprint (2010). Available at arXiv:1009.2312