代数体の Arakelov 類群

渡部 隆夫

平成１９年度 (２００７年) 前期

0　代数体の基礎

0.1　無限素点

F を $\mathbf{Q}$ 上の有限次拡大体として, 拡大次数を $[F:\mathbf{Q}]=n$ とする.

$$\mathrm{Hom}(F,\mathbf{C})=\{\sigma\,:\,F\longrightarrow\mathbf{C}\mid\mathbf{Q}\text{-同型}\,\}$$

に同値関係 $\sim$ を

$$\sigma\sim\sigma' \iff \sigma'(x)=\overline{\sigma(x)}\quad({}^{\forall}x\in F)$$

と定める. この同値関係の完全代表系 V_∞ を一つ固定する. 即ち

$$\mathrm{Hom}(F,\mathbf{C})\supset V_\infty\ni\sigma\longleftrightarrow[\sigma]\in\mathrm{Hom}(F,\mathbf{C})/\sim$$

V_∞ の元を無限素点という. 次の分割がある.

$$V_\infty=V_{\mathbf{R}}\cup V_{\mathbf{C}}$$
$$V_{\mathbf{R}}=\{\sigma\in V_\infty\mid\sigma(F)\subset\mathbf{R}\},\qquad V_{\mathbf{C}}=\{\sigma\in V_\infty\mid\sigma(F)\not\subset\mathbf{R}\}$$

$V_{\mathbf{R}}$ の元を実素点, $V_{\mathbf{C}}$ の元を虚素点という. 明らかに

$$[\sigma]=\begin{cases}\{\sigma\} & (\sigma\in V_{\mathbf{R}})\\ \{\sigma,\overline{\sigma}\} & (\sigma\in V_{\mathbf{C}})\end{cases}$$

であるから

$$\mathrm{Hom}(F,\mathbf{C})=V_{\mathbf{R}}\cup\{\sigma,\overline{\sigma}\mid\sigma\in V_{\mathbf{C}}\}$$

となる. とくに

$$r_1=\sharp V_{\mathbf{R}},\qquad r_2=\sharp V_{\mathbf{C}}$$

とおけば,

$$n=\sharp\mathrm{Hom}(F,\mathbf{C})=r_1+2r_2$$

である. 以下では

$$V_{\mathbf{R}}=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_{r_1}\},\qquad V_{\mathbf{C}}=\{\sigma_{r_1+1},\cdots,\sigma_{r_1+r_2}\}$$

とする.
無限素点 σ は具体的に次のように構成される. 単純拡大定理から, $\theta\in F$ で $F=\mathbf{Q}(\theta)$ となるものがある. θ の最小多項式を $m_\theta(x)\in\mathbf{Q}[x]$ とすれば

$$\deg m_\theta[x]=[F:\mathbf{Q}]=n$$

で, 自然な同型

$$\mathbf{Q}[x]/(m_\theta(x)) \longrightarrow F \,:\, f(x) \mod m_\theta(x) \mapsto f(\theta)$$

がある. $m_\theta(x)$ の $\mathbf{R}[x]$ における既約分解を

$$m_\theta(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)\cdot g_1(x)\cdots g_\ell(x) \quad (\deg g_i(x) = 2)$$

とする. 明らかに

$$\mathbf{R}[x]/(x-\alpha_i) \cong \mathbf{R}, \qquad \mathbf{R}[x]/(g_j(x)) \cong \mathbf{C}$$

従って

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}[x]/(m_\theta(x)) \otimes \mathbf{R} = \mathbf{R}[x]/(m_\theta(x)) \\
&\cong \mathbf{R}[x]/(x-\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}[x]/(x-\alpha_k) \oplus \mathbf{R}[x]/(g_1(x)) \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}[x]/(g_\ell(x)) \\
&\cong \mathbf{R} \oplus \cdots \oplus \mathbf{R} \oplus \mathbf{C} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}
\end{aligned}$$

これから

$$F \cong \mathbf{Q}[x]/(m_\theta(x)) \hookrightarrow \mathbf{R}[x]/(m_\theta(x)) \cong \mathbf{R}^k \oplus \mathbf{C}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}, \mathbf{C}$$

で, $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ への写像ができる. また $k = r_1, \ell = r_2$ となる.

Lemma 1 $F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{C}^{r_2}$.

定義 $\sigma \in V_\infty$ に対し

$$F_\sigma = \begin{cases} \mathbf{R} & (\sigma \in V_{\mathbf{R}}) \\ \mathbf{C} & (\sigma \in V_{\mathbf{C}}) \end{cases}$$

と定め, ノルム

$$|\cdot|_\sigma \,:\, F_\sigma \longrightarrow \mathbf{R} \,:\, |a|_\sigma = \begin{cases} |a| & (v \in V_{\mathbf{R}}) \\ |a|^2 = a\bar{a} & (v \in V_{\mathbf{C}}) \end{cases}$$

を F_σ の正規付値という. また

$$F_{\mathbf{R}} = \prod_{\sigma \in V_\infty} F_\sigma = \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{C}^{r_2} \cong F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$$

とおく. $F_{\mathbf{R}}$ は環で,

$$F \longrightarrow F_{\mathbf{R}} \,:\, a \mapsto (\sigma(a))$$

により $F \subset F_{\mathbf{R}}$ とみなす.

0.2 $F_{\mathbf{R}}$ の内積とノルム

$F_{\mathbf{R}}$ の共役を

$$F_{\mathbf{R}} \ni x = (x_\sigma) \longrightarrow \overline{x} = (\overline{x}_\sigma) \in F_{\mathbf{R}}$$

とする. $F_{\mathbf{R}}$ 上のトレースとノルムを

$$\mathrm{Tr}_{F_{\mathbf{R}}}(x) = \sum_{\sigma \in V_\infty} \mathrm{Tr}_{F_\sigma/\mathbf{R}}(x_\sigma) = \sum_{\sigma \in V_{\mathbf{R}}} x_\sigma + \sum_{\sigma \in V_{\mathbf{C}}} (x_\sigma + \overline{x}_\sigma)$$
$$\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(x) = \prod_{\sigma \in V_\infty} \mathrm{Nr}_{F_\sigma/\mathbf{R}}(x_\sigma) = \prod_{\sigma \in V_{\mathbf{R}}} x_\sigma \prod_{\sigma \in V_{\mathbf{C}}} x_\sigma \overline{x}_\sigma$$

と定める. $F_{\mathbf{R}}$ に Hermite 内積とノルムを

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{Tr}_{F_{\mathbf{R}}}(x\overline{y}), \qquad ||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

で定義する.

$$\mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1) \in F_{\mathbf{R}}$$

に対し

$$||\mathbf{1}|| = \sqrt{n}$$

である.

$$F_{\mathbf{R},+} = \{(x_\sigma) \in F_{\mathbf{R}} \mid x_\sigma \in \mathbf{R}_{>0}\} \subset F_{\mathbf{R}}^\times$$

とおく. $x = (x_\sigma) \in F_{\mathbf{R}}^\times$ に対し

$$\mathrm{abs}(x) = (|x_\sigma|) \in F_{\mathbf{R},+}$$

と定義する.

0.3 整数環と判別式

$a \in F$ の $\mathbf{Q}$ 上の最小多項式を $m_a(x) \in \mathbf{Q}[x]$ とおく. このとき

$$\mathcal{O} = \{a \in F \mid m_a(x) \in \mathbf{Z}[x]\}$$

は F の部分環で Dedekind 環をなす. これを F の整数環という.

Lemma 2 $\mathcal{O}$ はランク n の $\mathbf{Z}$ 加群で, 単射準同型

$$\mathcal{O} \longrightarrow F_{\mathbf{R}} : a \mapsto (\sigma(a))$$

により, $F_{\mathbf{R}}$ の中の格子とみなせる.

$\mathcal{O}$ の $\mathbf{Z}$ 上の基底を $\omega_1, \cdots, \omega_n$ とする. 即ち

$$\mathcal{O} = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2 + \cdots + \mathbf{Z}\omega_n$$

このとき

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1(\omega_1) & \sigma_1(\omega_2) & \cdots & \sigma_1(\omega_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{r_1}(\omega_1) & \sigma_{r_1}(\omega_2) & \cdots & \sigma_{r_1}(\omega_n) \\ \sigma_{r_1+1}(\omega_1) & \sigma_{r_1+1}(\omega_2) & \cdots & \sigma_{r_1+1}(\omega_n) \\ \overline{\sigma}_{r_1+1}(\omega_1) & \overline{\sigma}_{r_1+1}(\omega_2) & \cdots & \overline{\sigma}_{r_1+1}(\omega_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{r_1+r_2}(\omega_1) & \sigma_{r_1+r_2}(\omega_2) & \cdots & \sigma_{r_1+r_2}(\omega_n) \\ \overline{\sigma}_{r_1+r_2}(\omega_1) & \overline{\sigma}_{r_1+r_2}(\omega_2) & \cdots & \overline{\sigma}_{r_1+r_2}(\omega_n) \end{pmatrix}$$

は $n \times n$ 行列で. これから定まる

$$\Delta_F = (\det \Omega)^2 \in \mathbf{Z}$$

を F の判別式という.
格子 $\mathcal{O} \subset F_{\mathbf{R}}$ の基底ベクトルを列にもつ行列を Ω' とすると

$$\Omega' = \begin{pmatrix} \sigma_1(\omega_1) & \sigma_1(\omega_2) & \cdots & \sigma_1(\omega_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{r_1}(\omega_1) & \sigma_{r_1}(\omega_2) & \cdots & \sigma_{r_1}(\omega_n) \\ \mathrm{Re}\,\sigma_{r_1+1}(\omega_1) & \mathrm{Re}\,\sigma_{r_1+1}(\omega_2) & \cdots & \mathrm{Re}\,\sigma_{r_1+1}(\omega_n) \\ \mathrm{Im}\sigma_{r_1+1}(\omega_1) & \mathrm{Im}\sigma_{r_1+1}(\omega_2) & \cdots & \mathrm{Im}\sigma_{r_1+1}(\omega_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathrm{Re}\,\sigma_{r_1+r_2}(\omega_1) & \mathrm{Re}\,\sigma_{r_1+r_2}(\omega_2) & \cdots & \mathrm{Re}\,\sigma_{r_1+r_2}(\omega_n) \\ \mathrm{Im}\sigma_{r_1+r_2}(\omega_1) & \mathrm{Im}\sigma_{r_1+r_2}(\omega_2) & \cdots & \mathrm{Im}\sigma_{r_1+r_2}(\omega_n) \end{pmatrix}$$

となる. $F_{\mathbf{R}}$ 上の通常の Lebesgue 測度を $\omega_{F_{\mathbf{R}}}$ とおく. 即ち

$$\omega_{F_{\mathbf{R}}}(\prod_{\sigma \in V_\infty} \{y_\sigma \in F_\sigma \mid |y_\sigma| \leqq 1\}) = 2^{r_1}\pi^{r_2}$$

このとき, 格子 $\mathcal{O}$ の基本領域の体積は

$$\omega_{F_{\mathbf{R}}}(F_{\mathbf{R}}/\mathcal{O}) = |\det \Omega'| = 2^{-r_2}|\det \Omega| = 2^{-r_2}\sqrt{|\Delta_F|}$$

となる.

Lemma 3 $\omega_{F_{\mathbf{R}}}(F_{\mathbf{R}}/\mathcal{O}) = 2^{-r_2}\sqrt{|\Delta_F|}$.

0.4 有限素点

$\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$ を素イデアルとすると, 非アルキメデス的離散付値

$$v_{\mathfrak{p}} : F \longrightarrow \mathbf{Z} : v_{\mathfrak{p}}(a) = \max\{k \in \mathbf{Z} \mid a \in \mathfrak{p}^k\}$$

が定まる. このようにして得られる離散付値の全体を

$$V_f = \{v_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$$

とおき, V_f の元を有限素点という.

$v = v_{\mathfrak{p}} \in V_f$ に対し, 対応する素イデアル $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}(v)$ と表す. $\mathfrak{f}_v = \mathcal{O}/\mathfrak{p}(v)$ は有限体でその位数を

$$q_v = \sharp\mathfrak{f}_v$$

とする. これから

$$|\cdot|_v : F \longrightarrow \mathbf{R} : |a|_v = q_v^{-v(a)}$$

により正規付値を定義する. この付値に関して

F_v: F の完備化

$\mathcal{O}_v$: $\mathcal{O}$ の F_v における閉包

$\mathfrak{p}_v$: $\mathfrak{p}$ の F_v における閉包

とすれば, F_v は局所コンパクト体, $\mathcal{O}_v$ はコンパクトな局所環, $\mathfrak{p}_v$ はその極大イデアルとなる.

0.5 イデアル類群と単数群

次の記号を使う.

I_F: F の分数イデアル群

P_F: F の主イデアル群

$\mathrm{C}_F = \mathrm{I}_F/\mathrm{P}_F$: F のイデアル類群

$\mathcal{O}^\times$: $\mathcal{O}$ の単数群

μ_F: F に含まれる1のべき根の群

$w_F = \sharp\mu_F$: μ_F の位数

定理 1 (Dirichlet の単数定理) 写像 $\ell : \mathcal{O}^\times \longrightarrow \mathbf{R}^{r_1+r_2}$ を

$$\ell(a) = (\log|\sigma_1(a)|, \cdots, \log|\sigma_{r_1}(a)|, \log|\sigma_{r_1+1}(a)|, \cdots, \log|\sigma_{r_1+r_2}(a)|)$$

と定義する. これは準同型で $\mathrm{Ker}\ell = \mu_F$ かつ $\mathrm{Im}\ell$ は部分空間

$$\{(x_i) \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} \mid x_1 + \cdots + x_{r_1} + 2x_{r_1+1} + \cdots + 2x_{r_1+r_2} = 0\}$$

に含まれるランク $r_1 + r_2 - 1$ の格子である.

0.6　イデールと積公式

$S \subset V_f$ を有限部分集合とするとき

$$\mathbf{A}_S^\times = \prod_{\sigma \in V_\infty} F_\sigma^\times \times \prod_{v \in S} F_v^\times \times \prod_{v \in V_f - S} \mathcal{O}_v^\times$$

とおく．これに積位相を入れることにより, $\mathbf{A}_S^\times$ は局所コンパクト群になる．S として, すべての有限部分集合を動かして

$$\mathbf{A}^\times = \bigcup_S \mathbf{A}_S^\times$$

とおく．$\mathbf{A}^\times$ には, 任意の $\mathbf{A}_S^\times$ が開集合となる最も弱い位相を入れる．これにより $\mathbf{A}^\times$ は局所コンパクト群になる．$\mathbf{A}^\times$ を F のイデール群という．
$\mathbf{A}^\times$ の元を

$$\lambda = (\lambda_\sigma)_\sigma \times (\lambda_v)_v$$

と表す．定義から $\lambda \in \mathbf{A}_S^\times$ となる S がある．このとき $v \in V_f - S$ では $\lambda_v \in \mathcal{O}_v^\times$ だから

$$v \in V_f - S \implies |\lambda_v|_v = 1$$

よって

$$|\lambda|_{\mathbf{A}} := \prod_{\sigma \in V_\infty} |\lambda_\sigma|_\sigma \times \prod_{v \in V_f} |\lambda_v|_v = \prod_{\sigma \in V_\infty} |\lambda_\sigma|_\sigma \times \prod_{v \in S} |\lambda_v|_v$$

は有限な値をとる．これをイデールノルムという．
$a \in F^\times$ に対し,

$$S_a = \{v \in V_f \mid v(a) \neq 0\}$$

は有限集合であるから

$$\lambda_a := (\sigma(a))_\sigma \times (a)_v \in \mathbf{A}_{S_a}^\times$$

となる．

$$F^\times \ni a \mapsto \lambda_a \in \mathbf{A}^\times$$

は単射準同型であるから, $F^\times$ は $\mathbf{A}^\times$ の部分群とみなせる．

定理 2 (積公式) ${}^\forall a \in F^\times$ に対し

$$|\lambda_a|_{\mathbf{A}} = \prod_{\sigma \in V_\infty} |\sigma(a)|_\sigma \times \prod_{v \in V_f} |a|_v = 1$$

である．

1 Arakelov 因子

1.1 Arakelov 因子

$V = V_\infty \cup V_f$ とする．V で生成される群

$$\mathrm{Div}_F = \left\{ \bigoplus_{\sigma \in V_\infty} \mathbf{R}\sigma \right\} \oplus \left\{ \bigoplus_{v \in V_f} \mathbf{Z}v \right\}$$

を Arakelov 因子群という．$D \in \mathrm{Div}_F$ は

$$D = \sum_{\sigma \in V_\infty} \lambda_\sigma \sigma + \sum_{v \in V_f} n_v v, \qquad (\lambda_\sigma \in \mathbf{R},\ n_v \in \mathbf{Z})$$

の形に書ける．n_v は有限個の v を除いて 0 である．これを Arakelov 因子という．

1.2 Arakelov 因子の次数とノルム

$v \in V$ の次数を

$$d_v = \begin{cases} \log(q_v) & (v \in V_f) \\ 2 & (v \in V_{\mathbf{C}}) \\ 1 & (v \in V_{\mathbf{R}}) \end{cases}$$

と定める．これから

$$D = \sum_{\sigma \in V_\infty} \lambda_\sigma \sigma + \sum_{v \in V_f} n_v v \in \mathrm{Div}_F$$

に対し

$$\deg(D) := \sum_{\sigma \in V_\infty} d_\sigma \lambda_\sigma + \sum_{v \in V_f} d_v n_v$$

により D の次数を定義する．これは準同型

$$\deg : \mathrm{Div}_F \longrightarrow \mathbf{R}$$

を与える．その核を

$$\mathrm{Div}_F^0 = \mathrm{Ker}(\deg) = \{ D \in \mathrm{Div}_F \mid \deg(D) = 0 \}$$

とおく．また D のノルムを

$$\mathrm{Nr}(D) = e^{\deg(D)} \in \mathbf{R}_{>0}$$

と定める．

1.3 Arakelov 類群

$a \in F^\times$ に対し

$$\mathrm{pd}(a) = \sum_{\sigma \in V_\infty} (-\log|\sigma(a)|)\sigma + \sum_{v \in V_f} v(a)v$$

とおく. $v(a) = 0$ $(v \notin S_a)$ だから これは well-defined. $\mathrm{pd}(a)$ を主因子という. pd は準同型

$$\mathrm{pd}\ :\ F^\times \longrightarrow \mathrm{Div}_F$$

を定める.

Lemma 4 $\mathrm{Ker(pd)} = \mu_F$ かつ $\mathrm{pd}(F^\times) \in \mathrm{Div}_F^0$ である.

証明 $\mathrm{pd}(a) = 0$ とする. このとき $v(a) = 0$ $({}^\forall v \in V_f)$ だから $a \in \mathcal{O}^\times$ である. 定理 1 から

$$a \in \mathcal{O}^\times \quad \log|\sigma(a)| = 0 \quad ({}^\forall \sigma) \iff a \in \mu_F$$

だから $\mathrm{Ker(pd)} = \mu_F$.
$a \in F^\times$ とする. このとき, 定理 2 から

$$\mathrm{Nr}(\mathrm{pd}(a)) = e^{\deg(\mathrm{pd}(a))} = \prod_{\sigma \in V_\infty} |\sigma(a)|_\sigma^{-1} \times \prod_{v \in V_f} q_v^{v(a)} = |\lambda_a|_{\mathbf{A}}^{-1} = 1$$

となるので, $\deg(\mathrm{pd}(a)) = 0$. 即ち $\mathrm{pd}(a) \in \mathrm{Div}_F^0$. (**qed**)

定義 $\mathrm{Pic}_F = \mathrm{Div}_F/\mathrm{pd}(F^\times)$ を F の Picard 群といい, $\mathrm{Pic}_F^0 = \mathrm{Div}_F^0/\mathrm{pd}(F^\times)$ を F の Arakelov 類群という.

Lemma 4 から, 完全列

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow \mu_F \longrightarrow F^\times \longrightarrow \mathrm{Div}_F \longrightarrow \mathrm{Pic}_F \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mu_F \longrightarrow F^\times \longrightarrow \mathrm{Div}_F^0 \longrightarrow \mathrm{Pic}_F^0 \longrightarrow 0\end{gathered}$$

がある.
pd を $\mathcal{O}^\times$ に制限すると

$$\mathrm{pd}|_{\mathcal{O}^\times}\ :\ \mathcal{O}^\times \longrightarrow \mathrm{Div}_F\ :\ \mathrm{pd}(a) = \sum_{\sigma \in V_\infty} (-\log|\sigma(a)|)\sigma$$

となる. そこで

$$\mathrm{Div}_\infty = \bigoplus_{\sigma \in V_\infty} \mathbf{R}\sigma, \qquad \mathrm{Div}_\infty^0 = \mathrm{Div}_\infty \cap \mathrm{Div}_F^0$$

とおけば

$$\mathrm{pd}(\mathcal{O}^\times) \subset \mathrm{Div}_\infty^0 \subset \mathrm{Div}_\infty$$

となる．そこで

$$T = \mathrm{Div}_\infty/\mathrm{pd}(\mathcal{O}^\times), \qquad T^0 = \mathrm{Div}_\infty^0/\mathrm{pd}(\mathcal{O}^\times)$$

とおく．

Lemma 5 T^0 は r_1+r_2-1 次元コンパクトトーラスで, $T \cong \mathbf{R}\times T^0$ である．

証明 自然に

$$\mathrm{Div}_\infty \ni \sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma \longleftrightarrow (\lambda_\sigma) \in \mathbf{R}^{r_1+r_2}$$

と同一視する．このとき Div_∞^0 は, 部分空間

$$\{(x_i) \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} \mid x_1 + \cdots + x_{r_1} + 2x_{r_1+1} + \cdots + 2x_{r_1+r_2} = 0\}$$

と一致する．定義から

$$\mathrm{pd}(a) = -\ell(a) \qquad (a \in \mathcal{O}^\times)$$

だから, 定理 1 より $\mathrm{pd}(\mathcal{O}^\times) \subset \mathrm{Div}_\infty^0$ はランクが r_1+r_2-1 の格子になるので T^0 はコンパクトな r_1+r_2-1 次元トーラスとなる．(**qed**)

1.4 イデアル群との関係

Arakelov 因子

$$D = \sum_{\sigma\in V_\infty} \lambda_\sigma \sigma + \sum_{v \in V_f} n_v v \in \mathrm{Div}_F$$

に対し

$$\mathrm{id}(D) = \prod_{v\in V_f} \mathfrak{p}(v)^{-n_v}$$

とおく．これは F の分数イデアルである．

$$\mathrm{id} : \mathrm{Div}_F \longrightarrow \mathrm{I}_F$$

は全射準同型を定め, その核は

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}) = \mathrm{Div}_\infty = \bigoplus_{\sigma\in V_\infty} \mathbf{R}\sigma$$

である．また

$$\mathrm{id}(\mathrm{pd}(a)) = (a^{-1}) \qquad (a \in F^\times)$$

となる．

命題 1 次の完全列よりなる可換図式がある.

$$
(1)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^\times/\mu_F & \longrightarrow & F^\times/\mu_F & \longrightarrow & \mathrm{P}_F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pd}} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Div}_\infty & \longrightarrow & \mathrm{Div}_F & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathrm{I}_F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & \mathrm{Pic}_F & \longrightarrow & \mathrm{C}_F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

$$
(2)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^\times/\mu_F & \longrightarrow & F^\times/\mu_F & \longrightarrow & \mathrm{P}_F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pd}} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Div}^0_\infty & \longrightarrow & \mathrm{Div}^0_F & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathrm{I}_F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & T^0 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0_F & \longrightarrow & \mathrm{C}_F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

証明 (1) を示す. 縦の列が完全であることは定義から明らか. 横の上二つの列が完全になることも明らか. これから一番下の列も完全になることは容易に示せる. (**qed**)

系 1 *Arakelov* 類群 Pic^0_F はイデアル類群 C_F の $r_1 + r_2 - 1$ 次元コンパクトトーラス T^0 による群拡大である.

定義 id : $\mathrm{Div}_F^0 \longrightarrow \mathrm{I}_F$ の section

$$\mathrm{di} : \mathrm{I}_F \longrightarrow \mathrm{Div}_F^0$$

を

$$\mathrm{di}(\mathfrak{a}) = \sum_{\sigma\in V_\infty} \left\{ \frac{\log(\mathrm{Nr}(\mathfrak{a}))}{n} \right\} \sigma + \sum_{v\in V_f} n_v v, \qquad (\mathfrak{a} = \prod_{v\in V_f} \mathfrak{p}(v)^{-n_v} \in \mathrm{I}_F)$$

と定義する. ここで $\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ のノルム

$$\mathrm{Nr}(\mathfrak{a}) = \prod_{v\in V_f} \mathrm{Nr}(\mathfrak{p}(v))^{-n_v} = \prod_{v\in V_f} q_v^{-n_v} \in \mathbf{Q}^\times$$

とする.

1.5 イデール群との関係

$\mathbf{A}^\times$ をイデール群とする. $\lambda = (\lambda_\sigma) \times (\lambda_v) \in \mathbf{A}^\times$ に対し

$$\mathrm{div}(\lambda) = \sum_{\sigma\in V_\infty} (-\log|\lambda_\sigma|)\sigma + \sum_{v\in V_f} v(\lambda_v) v \in \mathrm{Div}_F$$

とおけば, div は全射準同型

$$\mathrm{div} : \mathbf{A}^\times \longrightarrow \mathrm{Div}_F$$

を与える. その核は

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{div}) = U_{\mathbf{A}} = \prod_{\sigma\in V_\infty} U_{F_\sigma} \times \prod_{v\in V_f} \mathcal{O}_v^\times$$
$$U_{F_\sigma} = \{\lambda_\sigma \in F_\sigma^\times \mid |\lambda_\sigma|_\sigma = 1\}$$

である. よって完全列

$$0 \longrightarrow U_{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathbf{A}^\times \longrightarrow \mathrm{Div}_F \longrightarrow 0$$

がある. また $\mathbf{A}^1 = \{a \in \mathbf{A}^\times \mid |a|_{\mathbf{A}} = 1\}$ とすれば, $\mathrm{div}(\mathbf{A}^1) = \mathrm{Div}_F^0$ であるから, 完全列

$$0 \longrightarrow U_{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathbf{A}^1 \longrightarrow \mathrm{Div}_F^0 \longrightarrow 0$$

がある.

1.6 Hermite ラインバンドル

$\mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R},+}$ の要素を Hermite ラインバンドルという.

$$D = \sum_{\sigma \in V_\infty} \lambda_\sigma \sigma + \sum_{v \in V_f} n_v v \in \mathrm{Div}_F$$

に対し

$$u_D = (e^{-\lambda_\sigma}) \in F_{\mathbf{R},+}, \qquad h(D) = (\mathrm{id}(D), u_D) \in \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R},+}$$

と定義する. 対応 $D \mapsto h(D)$ は同型

$$\mathrm{Div}_F \cong \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R},+} \cong \mathbf{A}^\times / U_{\mathbf{A}}$$

を与える.

Lemma 6 この対応で
(1) $h(0) = (\mathrm{id}(0), u_0) = (\mathcal{O}_F, \mathbf{1})$
(2) $h(\mathrm{pd}(a)) = (\mathrm{id}(\mathrm{pd}(a)), u_{\mathrm{pd}(a)}) = (a^{-1}\mathcal{O}_F, \mathrm{abs}(a)) \qquad (a \in F^\times)$
(3) $h(\mathrm{di}(\mathfrak{a})) = (\mathrm{id}(\mathrm{di}(\mathfrak{a})), u_{\mathrm{di}(\mathfrak{a})}) = (\mathfrak{a}, \mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n}) \qquad (\mathfrak{a} \in \mathrm{I}_F)$
(4) $h(D + \mathrm{pd}(a)) = (a^{-1}\mathrm{id}(D), \mathrm{abs}(a) u_D) \qquad (D \in \mathrm{Div}_F,\ a \in F^\times)$

証明 は容易. (**qed**)

h の逆写像は

$$\mathrm{div} : \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R},+} \longrightarrow \mathrm{Div}_F$$
$$\mathrm{div}(\mathfrak{a}, u) = \sum_{\sigma \in V_\infty} (-\log u_\sigma)\sigma + \sum_{v \in V_f} n_v v, \qquad (\mathfrak{a} = \prod_{v \in V_f} \mathfrak{p}(v)^{-n_v} \in \mathrm{I}_F,\ u \in F_{\mathbf{R},+})$$

で

$$\mathrm{div}(h(D)) = D, \qquad h(\mathrm{div}(\mathfrak{a}, u)) = (\mathfrak{a}, u)$$
$$\deg(\mathrm{div}(\mathfrak{a}, u)) = -\log(|\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u)|\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})) = -\log(\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u)\mathrm{Nr}(\mathfrak{a}))$$

となる.

1.7　射影 $\mathcal{O}$-加群とイデアル格子

定義 任意の有限生成 $\mathcal{O}$-加群 M に対し

$$\mathrm{rank}(M) = \dim M \otimes_{\mathcal{O}} F$$

を M のランクという.

命題 2 有限生成 $\mathcal{O}$-加群 M に対し, 次の 4 条件は同値である.

(P1) M は有限生成自由 $\mathcal{O}$-加群の直和因子になる.

(P2) 任意の $v \in V_f$ に対し, $M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_v$ は自由 $\mathcal{O}_v$ 加群になる.

(P3) ${}^{\forall}a \in \mathcal{O}$ に対し, $M \longrightarrow M : x \mapsto ax$ は単射になる.

(P4) 適当な $\mathfrak{a} \in \mathrm{I}_F$ と $0 \leqq n \in \mathbf{Z}$ をとると, $M \cong \mathcal{O}^n \oplus \mathfrak{a}$ となる.

定義 上の命題の条件を満たす有限生成 $\mathcal{O}$-加群を射影 $\mathcal{O}$ 加群という.

Lemma 7 任意のランク 1 射影 $\mathcal{O}$-加群は, F のある分数イデアルと同型である. 二つの分数イデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathrm{I}_F$ に対し $\varphi : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{b}$ が $\mathcal{O}$-同型ならば, 或る $a \in F^{\times}$ により $\varphi(x) = ax$ $(x \in \mathfrak{a})$ となる.

証明 前半は (P4) から容易.
$\varphi : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{b}$ を $\mathcal{O}$-加群の同型とする. このとき

$$\widetilde{\varphi} : \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{b}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O} : x \otimes y \mapsto \varphi(x)y$$

は $\mathcal{O}$-加群の同型である. $\mathcal{O}$ 自身と同型な分数イデアルは自由 $\mathcal{O}$-加群だから単項イデアルになる. よって, 或る $a \in F^{\times}$ が存在して, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = a^{-1}\mathcal{O}$. このとき

$$\mathcal{O} \xrightarrow{a^{-1}倍} a^{-1}\mathcal{O} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathcal{O}$$

は $\mathcal{O}$-同型だから, 1 は単元 $\epsilon \in \mathcal{O}^{\times}$ に移る. よって

$$\mathcal{O} \xrightarrow{\epsilon^{-1}倍} \mathcal{O} \xrightarrow{a^{-1}倍} a^{-1}\mathcal{O} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathcal{O}$$

は恒等写像となるから

$$\widetilde{\varphi}(xy) = \varphi(x)y = \epsilon axy \qquad ({}^{\forall}x \in \mathfrak{a},\ y \in \mathfrak{b})$$

よって $\varphi(x) = \epsilon ax$ となる. (**qed**)

定義 (L,B) を次のようなペアとする.

- L はランクが 1 の射影 $\mathcal{O}$ 加群である.
- B は $L\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}=F_{\mathbf{R}}$ 上の正定値 Hermite 内積で
$$B(\lambda x,y)=B(x,\overline{\lambda}y),\qquad (x,y,\lambda\in F_{\mathbf{R}})$$
を満たす.

このとき (L,B) をイデアル格子という. 二つのイデアル格子 (L,B), (L',B') は, $\mathcal{O}$-加群の同型 $\varphi : L\longrightarrow L'$ で $L\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}=F_{\mathbf{R}}=L'\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ 上 B と B' の等長写像を与えるものが存在するとき, 等長であるという.

命題 3 $D\in\mathrm{Div}_F$ に対し
$$L_D=\mathrm{id}(D),\qquad B_D(x,y)=\langle u_Dx,u_Dy\rangle=\mathrm{Tr}_{F_{\mathbf{R}}}(u_Dx\overline{u_Dy})\quad (x,y\in F_{\mathbf{R}})$$
と定義すると (L_D,B_D) はイデアル格子を与え, 対応 $D\mapsto(L_D,B_D)$ は全単射
$$\mathrm{Pic}_F\cong\{F\text{ のイデアル格子の等長類}\}$$
を導く.

証明 (L_D,B_D) がイデアル格子になることは容易.
$$D=\sum_{\sigma\in V_\infty}\lambda_\sigma\sigma+\sum_{v\in V_f}n_vv\in\mathrm{Div}_F$$
とすれば,
$$||x||_D^2=B_D(x,x)=\sum_{\sigma\in V_\infty}d_\sigma|\sigma(x)e^{-\lambda_\sigma}|^2,\qquad (x\in L_D=\mathrm{id}(D))$$
である.
$D,D'\in\mathrm{Div}_F$ が同値で $D'=D+\mathrm{pd}(a)$ $(a\in F^\times)$ とする. このとき Lemma 6 から
$$h(D')=h(D+\mathrm{pd}(a))=(a^{-1}\mathrm{id}(D),\mathrm{abs}(a)u_D)$$
である. よって
$$L_{D'}=a^{-1}L_D,\qquad u_{D'}=\mathrm{abs}(a)u_D=(|\sigma(a)|e^{-\lambda_\sigma})$$
となり
$$\varphi : L_{D'}\longrightarrow L_D : x\mapsto ax$$

は $\mathcal{O}$-同型である．これは $B_{D'}$ と B_D の等長に拡張できる．実際 $x \in L_{D'}$ に対し

$$||\varphi(x)||_D^2 = ||ax||_D^2 = \sum_{\sigma \in V_\infty} d_\sigma |\sigma(ax)e^{-\lambda_\sigma}|^2 = \sum_{\sigma \in V_\infty} d_\sigma |\sigma(x)|\sigma(a)|e^{-\lambda_\sigma}|^2 = ||x||_{D'}^2$$

である．以上により, 写像

$$\mathrm{Pic}_F \longrightarrow \{F \text{ のイデアル格子の等長類}\} : [D] \mapsto [(L_D, B_D)]$$

は well-defined である．
(単射性) $D, D' \in \mathrm{Div}_F$ で, $(L_D, B_D) \sim (L_{D'}, B_{D'})$ とする．$\varphi : L_{D'} \longrightarrow L_D$ を $\mathcal{O}$-同型とすれば, Lemma 7 から, 或る $a \in F^\times$ により $\varphi(x) = ax$ となる．また等長性から

$$||x||_{D'} = ||ax||_D, \quad \text{即ち} \quad ||u_{D'}x|| = ||au_D x|| \qquad (x \in L_{D'} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} = F_{\mathbf{R}})$$

$e_\tau = (\delta_{\sigma\tau})_\sigma \in F_{\mathbf{R}}$ とすれば

$$||u_{D'}e_\tau|| = \sqrt{d_\tau}e^{-\lambda'_\tau}, \qquad ||au_D e_\tau|| = \sqrt{d_\tau}|\tau(a)|e^{-\lambda_\tau}$$

だから

$$e^{-\lambda'_\tau} = |\tau(a)|e^{-\lambda_\tau}, \qquad (\tau \in V_\infty)$$

となり

$$u_{D'} = \mathrm{abs}(a)u_D$$

となる．以上により

$$h(D') = (\mathrm{id}(D'), u_{D'}) = (a^{-1}\mathrm{id}(D), \mathrm{abs}(a)u_D) = h(D + \mathrm{pd}(a))$$

であるから, $D' = D + \mathrm{pd}(a)$ となる．
(全射性) $[(L, B)]$ をイデアル格子の等長類とする．Lemma 7 より $L = \mathfrak{a}$ は整イデアル としてよい．e_τ は

$$e_\tau^2 = e_\tau = \overline{e_\tau}, \qquad e_\tau \cdot e_\rho = 0 \quad (\tau \neq \rho)$$

を満たすから

$$B(e_\tau, e_\rho) = B(e_\tau^2, e_\rho) = B(e_\tau, e_\tau e_\rho) = 0$$

となる．よって B はグラム行列 $(B(e_\tau, e_\rho))_{\tau,\rho}$ の対角成分 $B(e_\tau, e_\tau)$ で決まる．そこで

$$u_\sigma = \sqrt{B(e_\sigma, e_\sigma)/d_\sigma} > 0, \qquad u = (u_\sigma) \in F_{\mathbf{R},+}$$

とすれば, $D = \mathrm{div}(\mathfrak{a}, u)$ は $(L_D, B_D) \sim (L, B)$ を満たす．(**qed**)

イデアル格子 (L, B) から定まる $F_{\mathbf{R}}$ の Haar 測度を ω_B とおく. 即ち

$$\omega_B(\prod_{\sigma\in V_\infty}\{y_\sigma \in F_\sigma \mid B(y_\sigma, y_\sigma) \leqq 1\}) = 2^{r_1}\pi^{r_2}$$

とする. このとき

$$\mathrm{cov}(L, B) = \omega_B(F_{\mathbf{R}}/L)$$

を (B, L) の covolume という. $D \in \mathrm{Div}_F$ から定まるイデアル格子 (L_D, B_D) では

$$\omega_D = \omega_{B_D}, \qquad \mathrm{cov}(D) = \mathrm{cov}(L_D, B_D)$$

とあらわす.

$$||e_\sigma||_D = \sqrt{d_\sigma}e^{-\lambda_\sigma}$$

だから

$$\omega_D = \left\{2^{r_2}\prod_{\sigma\in V_\infty} e^{-d_\sigma\lambda_\sigma}\right\}\omega_{F_{\mathbf{R}}}$$

となる. とくに $D = 0$ ならば

$$\omega_0 = 2^{r_2}\cdot\omega_{F_{\mathbf{R}}}, \qquad \omega_D = \left\{\prod_{\sigma\in V_\infty} e^{-d_\sigma\lambda_\sigma}\right\}\omega_0 = \mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u_D)\omega_0$$

の関係がある. Lemma 3 から

$$\omega_0(F_{\mathbf{R}}/\mathcal{O}_F) = \sqrt{|\Delta_F|}, \qquad \omega_0(F_{\mathbf{R}}/I) = \sqrt{|\Delta_F|}\mathrm{Nr}(I) \quad (I \in \mathrm{I}_F)$$

である.

命題 4 $D \in \mathrm{Div}_F$ に対し

$$\mathrm{cov}(D) = \omega_D(F_{\mathbf{R}}/L_D) = \sqrt{|\Delta_F|}\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u_D)\mathrm{Nr}(\mathrm{id}(D)) = \sqrt{|\Delta_F|}e^{-\deg(D)}$$

となる. とくに

$$\mathrm{cov}(D) = \sqrt{|\Delta_F|} \iff \deg(D) = 0$$

で, 対応 $D \mapsto (L_D, B_D)$ は全単射

$$\mathrm{Pic}_F^0 \cong \{F \text{ の } \mathrm{cov} = \sqrt{|\Delta_F|} \text{ のイデアル格子の等長類}\}$$

を導く.

1.8 イデアル格子の Hermtie 定数

定義 $D \in \mathrm{Div}_F$ に対応するイデアル格子 (L_D, B_D) に対し

$$\gamma(D) = \min_{0 \neq x \in L_D} \frac{||x||_D^2}{\mathrm{cov}(D)^{2/n}}$$

を D の Hermite 定数という.

Lemma 8 ${}^\forall x \in F_{\mathbf{R}}$ に対し

$$(1)\ \mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(x\overline{x})^{1/n} \leqq \frac{1}{n}\mathrm{Tr}_{F_{\mathbf{R}}}(x\overline{x}) = \frac{||x||^2}{n}, \qquad (2)\ |\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(x)| \leqq \frac{||x||^n}{n^{n/2}}$$

証明 (1) $x\overline{x} = (|x_\sigma|^2)$ に相加相乗平均を適用する.
(2) $\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(x\overline{x}) = \mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(x)^2$ だから (1) より従う. (**qed**)

命題 5 $D \in \mathrm{Div}_F$, $h(D) = (\mathrm{id}(D), u_D)$, $u_D = (u_\sigma)$ とする.
(1) $0 \neq {}^\forall x \in L_D$ に対し

$$\sqrt{n}e^{-\deg(D)/n} \leqq ||x||_D$$

(2) $0 \neq {}^\exists x_0 \in L_D$ $s.t.$ $|u_\sigma \sigma(x_0)| < (2/\pi)^{r_2/n}\mathrm{cov}(D)^{1/n}$, $({}^\forall \sigma)$. とくに

$$||x_0||_D \leqq \sqrt{n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2/n}\mathrm{cov}(D)^{1/n}$$

証明 (1) Lemma 8 (2) から

$$||x||_D^2 = ||u_D x||^2 \geqq n|\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u_D x)|^{2/n} = n|\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u_D)|^{2/n}|\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(x)|^{2/n}$$

ここで $x\mathcal{O} \subset L_D = \mathrm{id}(D)$ だから

$$|\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(x)| = \mathrm{Nr}(x\mathcal{O}) \geqq \mathrm{Nr}(\mathrm{id}(D))$$

よって

$$||x||_D^2 \geqq n|\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u_D)\mathrm{Nr}(\mathrm{id}(D))|^{2/n} = ne^{-2\deg(D)/n}$$

となる.
(2) $F_{\mathbf{R}}$ の凸体

$$K = \{(x_\sigma) \in F_{\mathbf{R}} \mid |x_\sigma| \leqq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2/n}\mathrm{cov}(D)^{1/n}\}$$

をとれば

$$\omega_0(K) = 2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2}\mathrm{cov}(D) = 2^n\mathrm{cov}(D)$$

従って

$$\omega_D(K) = 2^n\mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u_D)\omega_D(F_{\mathbf{R}}/L_D) = 2^n\omega_D(F_{\mathbf{R}}/u_DL_D)$$

$u_DL_D \subset F_{\mathbf{R}}$ に Minkowski の凸体定理を適用すれば

$$0 \neq {}^{\exists}u_Dx_0 \in u_DL_D \cap K$$

が存在し, これは (2) を満たす. (**qed**)

命題 6 任意の $D \in \mathrm{Div}_F$ に対し

$$(1)\ \sqrt{n}e^{-\deg(D)/n} \leqq \min_{0\neq x\in L_D}||x||_D$$

$$(2)\ \frac{n}{|\Delta_F|^{1/n}} \leqq \gamma(D) \leqq n\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2r_2/n}$$

証明 (1) は命題 5(1) から明らか. (2) も命題 4, 5 から容易. (**qed**)

1.9 Arakelov 類群の距離

$T = \mathrm{Div}_\infty/\mathrm{pd}(\mathcal{O}^\times)$ は Pic_F の単位元を含む連結成分で, 完全列

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \mathrm{Pic}_F \longrightarrow \mathrm{C}_F \longrightarrow 0$$

がある. Pic_F, C_F の要素を

$$\mathfrak{d} = [D] = D + \mathrm{pd}(F^\times),\quad \mathfrak{C}_\mathfrak{d} = \mathrm{id}(D)\ \text{のイデアル類} \in \mathrm{C}_F \qquad (D \in \mathrm{Div}_F)$$

と表す. $D, D' \in \mathrm{Div}_F$ に対し

$$\begin{aligned}[D] = [D'] &\iff {}^{\exists}a \in F^\times \ \text{s.t.}\ D - D' = \mathrm{pd}(a)\\ &\iff {}^{\exists}a \in F^\times \ \text{s.t.}\ h(D) - h(D') = (a^{-1}\mathcal{O}, \mathrm{abs}(a))\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\mathfrak{d} \in T &\iff \mathfrak{C}_\mathfrak{d} = \mathfrak{C}_0 = [\mathcal{O}]\\ &\iff {}^{\exists}\overline{u}_\mathfrak{d} \in F_{\mathbf{R},+}/\mathrm{abs}(\mathcal{O}^\times),\quad \text{s.t.}\ \mathrm{div}(\mathcal{O}, u_\mathfrak{d}) \in \mathfrak{d}\end{aligned}$$

である. この $\overline{u}_{\mathfrak{d}}$ は $\mathfrak{d}$ から一意に定まる. そこで T 上のノルムを

$$||\mathfrak{d}||_{\mathrm{Pic}} = ||\overline{u}_{\mathfrak{d}}||_{\mathrm{Pic}} = \min_{x \in u_{\mathfrak{d}} \mathrm{abs}(\mathcal{O}^\times)} ||\log(x)|| = \min_{\varepsilon \in \mathcal{O}^\times} ||\log(\mathrm{abs}(\varepsilon) u_{\mathfrak{d}})||$$

と定義する.
Pic_F の連結成分の成す群は

$$\pi_0(\mathrm{Pic}_F) = \mathrm{Pic}_F / T \cong \mathrm{C}_F$$

であり, 各連結成分は

$$\mathfrak{C} + T, \qquad (\mathfrak{C} \in \mathrm{C}_F)$$

で与えられる. 従って, $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}' \in \mathrm{Pic}_F$ に対し

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}, \mathfrak{d}' \text{ が同じ連結成分に入る} &\iff \mathfrak{d} - \mathfrak{d}' \in T \\ &\iff \mathfrak{C}_{\mathfrak{d}} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{d}'} \end{aligned}$$

だから, このとき $\mathfrak{d}$ と $\mathfrak{d}'$ の距離を

$$||\mathfrak{d} - \mathfrak{d}'||_{\mathrm{Pic}} = ||\overline{u}_{\mathfrak{d}} \overline{u}_{\mathfrak{d}'}^{-1}||_{\mathrm{Pic}}$$

と定義する. この距離により Pic_F は可換 Lie 群になる. Pic_F^0 は Pic_F のコンパクト部分群である.

命題 7 $D, D' \in \mathrm{Div}_F$ で $\mathrm{id}(D) = \mathrm{id}(D')$ とする. このとき, 或る $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ が存在して, $D'' = \mathrm{div}(\mathrm{id}(D'), \mathrm{abs}(\varepsilon) u_{D'})$ とおけば

$$e^{-||[D]-[D'']||_{\mathrm{Pic}}} \leqq \frac{||x||_D}{||x||_{D''}} \leqq e^{||[D]-[D'']||_{\mathrm{Pic}}}, \qquad ({}^\forall x \in \mathrm{id}(D))$$

が成り立つ.

証明は略.

1.10 Arakelov 類群の測度と体積

$T^0 = \mathrm{Div}_\infty^0/\mathrm{pd}(\mathcal{O}^\times)$ は Pic_F^0 の単位元を含む連結成分で

$$\pi_0(\mathrm{Pic}_F) = \mathrm{Pic}_F^0/T^0 \cong \mathrm{C}_F$$

である. 自然な単射

$$\mathrm{Div}_\infty \longrightarrow F_{\mathbf{R}} : \sum_{\sigma\in V_\infty} x_\sigma \sigma \mapsto (x_\sigma)$$

がある. $F_{\mathbf{R}}$ の Hermite 内積 $\langle,\rangle$ を Div_∞ に制限して Div_∞ は内積空間になる. 即ち

$$\langle \sum x_\sigma\sigma, \sum y_\sigma\sigma\rangle = \sum_{\sigma\in V_\infty} d_\sigma x_\sigma y_\sigma$$

このとき

$$\mathrm{Div}_\infty^0 = \left\{ \sum x_\sigma\sigma \in \mathrm{Div}_\infty \mid \sum_{\sigma\in V_\infty} d_\sigma x_\sigma = 0 \right\}$$

だから, Div_∞^0 は

$$\mathbf{1}_{\mathrm{Div}} = \sum_{\sigma\in V_\infty} \sigma$$

の直交補空間となる. Div_∞^0 の正規直交基を $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{r_1+r_2-1}$ とすれば,

$$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{r_1+r_2-1}, \boldsymbol{e}_{r_1+r_2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{\mathrm{Div}}$$

は Div_∞ の正規直交基になる. そこで Div_∞, Div_∞^0 の不変測度を

$$\omega_{\mathrm{Div}_\infty}\left(\left\{ x = \sum_{i=1}^{r_1+r_2} x_i\boldsymbol{e}_i \in \mathrm{Div}_\infty \mid -1/2 \leqq x_i \leqq 1/2 \right\}\right) = 1$$
$$\omega_{\mathrm{Div}_\infty^0}\left(\left\{ x = \sum_{i=1}^{r_1+r_2-1} x_i\boldsymbol{e}_i \in \mathrm{Div}_\infty^0 \mid -1/2 \leqq x \leqq 1/2 \right\}\right) = 1$$

により定める. $\mathrm{pd}(\mathcal{O}^\times) \subset \mathrm{Div}_\infty^0$ は格子だから, T^0 の不変測度を

$$\omega_{T^0} = \frac{\omega_{\mathrm{Div}_\infty^0}}{\mathrm{pd}(\mathcal{O}^\times)\ \text{の離散測度}}$$

と定める.

命題 8 T^0 の体積は

$$\omega_{T^0}(T^0) = \sqrt{n}2^{-r_2/2}R_F$$

となる．ここで

$$R_F = \left|\det\begin{pmatrix} d_{\sigma_1}/n & d_{\sigma_1}\log|\sigma_1(\varepsilon_1)| & \cdots & d_{\sigma_1}\log|\sigma_1(\varepsilon_{r_1+r_2-1})| \\ d_{\sigma_2}/n & d_{\sigma_2}\log|\sigma_2(\varepsilon_1)| & \cdots & d_{\sigma_2}\log|\sigma_2(\varepsilon_{r_1+r_2-1})| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{\sigma_{r_1+r_2}}/n & d_{\sigma_{r_1+r_2}}\log|\sigma_{r_1+r_2}(\varepsilon_1)| & \cdots & d_{\sigma_{r_1+r_2}}\log|\sigma_{r_1+r_2}(\varepsilon_{r_1+r_2-1})| \end{pmatrix}\right|$$

は F の *regulator* とする．$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r_1+r_2-1} \in \mathcal{O}^\times$ は基本単数である．

証明 Div_∞ の正規直交基を

$$\boldsymbol{f}_i = \frac{1}{\sqrt{d_{\sigma_i}}}\sigma_i, \qquad (i = 1, \cdots, r_1+r_2)$$

ととる．このとき定義から

$$\mathrm{pd}(\varepsilon_j) = -\sum_{i=1}^{r_1+r_2}\sqrt{d_{\sigma_i}}\log(|\sigma_i(\varepsilon_j)|)\boldsymbol{f}_i, \qquad (j = 1, \cdots, r_1+r_2-1)$$

となる．また

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{\mathrm{Div}} = \sum_{i=1}^{r_1+r_2}\frac{\sqrt{d_{\sigma_i}}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{f}_i$$

だから

$$\begin{aligned}
&\omega_{T^0}(T^0) \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} \sqrt{d_{\sigma_1}/n} & \sqrt{d_{\sigma_1}}\log|\sigma_1(\varepsilon_1)| & \cdots & \sqrt{d_{\sigma_1}}\log|\sigma_1(\varepsilon_{r_1+r_2-1})| \\ \sqrt{d_{\sigma_2}/n} & \sqrt{d_{\sigma_2}}\log|\sigma_2(\varepsilon_1)| & \cdots & \sqrt{d_{\sigma_2}}\log|\sigma_2(\varepsilon_{r_1+r_2-1})| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{d_{\sigma_{r_1+r_2}}/n} & \sqrt{d_{\sigma_{r_1+r_2}}}\log|\sigma_{r_1+r_2}(\varepsilon_1)| & \cdots & \sqrt{d_{\sigma_{r_1+r_2}}}\log|\sigma_{r_1+r_2}(\varepsilon_{r_1+r_2-1})| \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{n}2^{-r_2/2}R_F
\end{aligned}$$

となる．(**qed**)

Pic_F^0 の測度 $\omega_{\mathrm{Pic}_F^0}$ を

$$\frac{\omega_{\mathrm{Pic}_F^0}}{\omega_{T^0}} = \mathrm{C}_F \text{ の離散測度}$$

となるように決める．$h_F = \sharp(\mathrm{C}_F)$ を F の類数とすれば

$$\omega_{\mathrm{Pic}_F^0}(\mathrm{Pic}_F^0) = \sqrt{n}2^{-r_2/2}R_F h_F$$

となる．

1.11 被約 Arakelov 因子

$D \in \mathrm{Div}_F$ とする.
定義 $a \in \mathrm{id}(D)$ が minimal とは

$$x \in \mathrm{id}(D) \quad \text{s.t. } |\sigma(x)| < |\sigma(a)| \quad ({}^\forall \sigma \in V_\infty) \implies x = 0$$

となること.

$$\mathrm{M}(D) = \{a \in \mathrm{id}(D) \mid \text{minimal}\}$$

とおく.

定義 $a \in \mathrm{id}(D)$ が shortest とは

$$||a||_D = \min\{||x||_D \mid x \in \mathrm{id}(D) - \{0\}\}$$

となること.

$$\mathrm{M_s}(D) = \{a \in \mathrm{id}(D) \mid \text{shortest}\}$$

とおく.

Lemma 9 次が成り立つ.
(1) $\mathrm{M}(D)$ は $\mathcal{O}^\times$-不変.
(2) $\mathrm{M_s}(D) \subset \mathrm{M}(D)$.
(3) $\sharp(\mathrm{M_s}(D)) < \infty$.

証明 (1) $a \in \mathrm{M}(D)$, $\epsilon \in \mathcal{O}^\times$ とする. $\epsilon a \notin \mathrm{M}(D)$ ならば, 或る $0 \neq x \in \mathrm{id}(D)$ が存在して

$$|\sigma(x)| < |\sigma(\epsilon a)| \qquad ({}^\forall \sigma \in V_\infty)$$

となる. このとき $\epsilon^{-1}x \in \mathrm{id}(D)$ で

$$|\sigma(\epsilon^{-1}x)| < |\sigma(a)| \qquad ({}^\forall \sigma \in V_\infty)$$

だから $\epsilon^{-1}x = 0$, 即ち $x = 0$ で矛盾.
(2) $a \in \mathrm{M_s}(D)$ で $a \notin \mathrm{M}(D)$ とする. 或る $0 \neq x \in \mathrm{id}(D)$ で

$$|\sigma(x)| < |\sigma(a)| \qquad ({}^\forall \sigma \in V_\infty)$$

となるものがある. このとき

$$d_\sigma |u_\sigma \sigma(x)|^2 < d_\sigma |u_\sigma \sigma(a)|^2 \qquad (u_D = (u_\sigma))$$

だから

$$0 \neq ||x||_D < ||a||_D$$

となり最小性に矛盾. よって $a \in \mathrm{M}(D)$.
(3) $F_{\mathbf{R}}$ の中で $\{x \in F_{\mathbf{R}} \mid ||x|| \leqq r\}$ はコンパクトで, $\mathrm{id}(D)$ は格子だから

$$\{x \in F_{\mathbf{R}} \mid ||x||_D \leqq r\} \cap \mathrm{id}(D)$$

は有限集合になる. (**qed**)

定義 $D \in \mathrm{Div}_F$ が被約であるとは
(R1) ${}^{\exists}\mathfrak{a} \in \mathrm{I}_F$, s.t. $D = \mathrm{di}(\mathfrak{a}) = \mathrm{div}(\mathfrak{a}, \mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n})$
(R2) $1 \in \mathrm{M}(D)$.
が成り立つこと.

$$\mathrm{Red}_F = \{\text{ 被約 Arakelov 因子全体 }\} \subset \mathrm{Div}_F^0$$
$$\overline{\mathrm{Red}}_F = \{[D] \mid D \in \mathrm{Red}_F\} \subset \mathrm{Pic}_F^0$$

とおく.

定義 以下

$$m_D := \min\{||x||_D \mid x \in \mathrm{id}(D) - \{0\}\} \qquad (D \in \mathrm{Div}_F)$$

$$\partial_F := \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|\Delta_F|}$$

とする.

命題 9 次が成り立つ.
(1) $\mathrm{di}(\mathcal{O}) \in \mathrm{Red}_F$.
(2) $\mathrm{di}(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Red}_F$ ならば $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathcal{O}$ かつ $|\mathrm{Nr}(\mathfrak{a}^{-1})| \leqq \partial_F$.
(3) $D \in \mathrm{Red}_F$ ならば $||\mathbf{1}||_D \leqq \sqrt{n} m_D$.
(4) $\sharp(\mathrm{Red}_F) < \infty$.

証明 (1) $1 \in \mathrm{M}(\mathrm{di}(\mathcal{O}))$ を示す. $1 \notin \mathrm{M}(\mathrm{di}(\mathcal{O}))$ と仮定する. $0 \neq x \in \mathcal{O}$ で

$$|\sigma(x)| < |\sigma(1)| = 1 \qquad (\sigma \in V_\infty)$$

となるものがある. このとき $\mathrm{Nr}(x) \in \mathbf{Z}$ かつ $|\mathrm{Nr}(x)| < 1$ だから $\mathrm{Nr}(x) = 0$. 即ち $x = 0$ となり矛盾.
(2) $\mathrm{di}(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Red}_F$ とすると, $1 \in \mathfrak{a}$ だから $\mathcal{O} \subset \mathfrak{a}$. よって $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathcal{O}$. $\mathrm{di}(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Div}_F^0$ だから, 命題 4 により $\mathrm{cov}(\mathrm{di}(\mathfrak{a})) = \sqrt{|\Delta_F|}$. 命題 5(2) から, 或る $0 \neq x_0 \in \mathfrak{a}$ で

$$|\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n}\sigma(x_0)| \leqq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2/n} \mathrm{cov}(\mathrm{di}(\mathfrak{a}))^{1/n} = \partial_F^{1/n}$$

となるものが存在する．$1 \in \mathrm{M}(\mathrm{di}(\mathfrak{a}))$ だから, 或る σ で $1 = |\sigma(1)| \leqq |\sigma(x_0)|$ となる．よって $|\mathrm{Nr}(\mathfrak{a}^{-1})| \leqq \partial_F$.

(3) $D = \mathrm{di}(\mathfrak{a})$ とすると

$$||\mathbf{1}||_D = \sqrt{n}\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n}$$

である．$1 \in \mathrm{M}(D)$ だから, $0 \neq {}^\forall x \in \mathfrak{a}$ に対し, 或る $\sigma \in V_\infty$ で

$$1 = |\sigma(1)| \leqq |\sigma(x)|$$

となる σ がある．よって

$$\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n} \leqq \mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n}|\sigma(x)| \leqq ||x||_D$$

であるから

$$||\mathbf{1}||_D \leq \sqrt{n} \min_{0 \neq x \in \mathfrak{a}} ||x||_D = \sqrt{n} m_D$$

を得る．

(4) これは (2) から明らか．(**qed**)

$D \in \mathrm{Div}_F^0$ に対し

$$\begin{aligned} \Sigma_D &= \{D' \in \mathrm{Div}_F^0 \mid \mathrm{id}(D') = \mathrm{id}(D), \ \ u_{D',\sigma} \leqq \partial_F^{1/n} \ \ ({}^\forall \sigma \in V_\infty)\} \\ \mathrm{P}\Sigma_D &= \{[D'] \mid D' \in \Sigma_D\} \subset \mathrm{Pic}_F^0 \end{aligned}$$

とおく．

定理 3 任意の $\mathfrak{d} \in \mathrm{Pic}_F^0$ に対し

$${}^\exists \mathfrak{d}' \in \overline{\mathrm{Red}}_F, \ {}^\exists v \in F_{\mathbf{R},+} \quad s.t. \ \ \mathfrak{d} - \mathfrak{d}' = [\mathrm{div}(\mathcal{O}_F, v)], \ \ v_\sigma \leqq \partial_F^{1/n} \ \ ({}^\forall \sigma \in V_\infty)$$

とくに

$$||\mathfrak{d} - \mathfrak{d}'||_{\mathrm{Pic}} \leqq \log(\partial_F)$$

である．これから

$$\mathrm{Pic}_F^0 = \bigcup_{D \in \mathrm{Red}_F} \mathrm{P}\Sigma_D$$

である．

証明 $\mathfrak{d} = [D]$ とする．命題 5(2) から

$$0 \neq {}^\exists x_0 \in \mathrm{M_s}(D) \ \ \mathrm{s.t.} \ \ |u_{D,\sigma}\sigma(x_0)| < \partial_F^{1/n}$$

そこで $D' = \mathrm{di}(x_0^{-1}\mathrm{id}(D))$ とおけば, $D' \in \mathrm{Red}_F$ である.

$$h(D) = (\mathrm{id}(D), u_D), \qquad h(D') = (x_0^{-1}\mathrm{id}(D), \mathrm{Nr}(x_0)^{1/n}\mathrm{Nr}(\mathrm{id}(D))^{-1/n})$$

だから

$$\begin{aligned} h(D-D') &= (x_0\mathcal{O}, u_D\mathrm{Nr}(x_0)^{-1/n}\mathrm{Nr}(\mathrm{id}(D))^{1/n}) \\ &= (x_0\mathcal{O}, \mathrm{abs}(x_0^{-1})) \cdot (\mathcal{O}, \mathrm{abs}(x_0)u_D\mathrm{Nr}(x_0)^{-1/n}\mathrm{Nr}(\mathrm{id}(D))^{1/n}) \\ &= h(\mathrm{pd}(x_0^{-1})) \cdot (\mathcal{O}, v), \qquad (v = \mathrm{abs}(x_0)u_D\mathrm{Nr}(x_0)^{-1/n}\mathrm{Nr}(\mathrm{id}(D))^{1/n}) \end{aligned}$$

となる. 即ち

$$D - D' = \mathrm{pd}(x_0^{-1}) + \mathrm{div}(\mathcal{O}, v)$$

これから

$$[D] - [D'] = [\mathrm{div}(\mathcal{O}, v)] \in T^0$$

とくに $[D]$ と $[D']$ は Pic_F^0 の同じ連結成分に入る. また $\mathcal{O} \subset x_0^{-1}\mathrm{id}(D)$ から

$$\mathrm{Nr}(x_0^{-1}\mathrm{id}(D)) \leqq 1$$

なので

$$v_\sigma = |v_\sigma| \leqq |\sigma(x_0)u_{D,\sigma}| \leqq \partial_F^{1/n}$$

が成り立つ. 定義から

$$||[D] - [D']||_{\mathrm{Pic}}^2 = ||\overline{v}||_{\mathrm{Pic}}^2 \leqq \sum_\sigma d_\sigma |\log v_\sigma|^2$$

ここで, 次の不等式を使う.

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}, \ \ \lambda_i \leqq c \text{ かつ } \sum_i \lambda_i = 0 \implies \sum_i \lambda_i^2 \leqq n(n-1)c^2$$

これから

$$||[D] - [D']||_{\mathrm{Pic}} \leqq \log(\partial_F)$$

を得る. (**qed**)

定理 4

$$\omega_{\mathrm{Pic}_F^0}(\mathrm{Pic}_F^0) \leqq \frac{\sqrt{n}}{2^{r_2/2}(r_1+r_2-1)!}(\log \partial_F)^{r_1+r_2-1}\sharp(\mathrm{Red}_F)$$

である. これから

$$(r_1+r_2-1)!R_F h_F \leqq \left(\log\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2}\sqrt{|\Delta_F|}\right\}\right)^{r_1+r_2-1}\sharp(\mathrm{Red}_F)$$

である.

証明 $D = \mathrm{di}(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Red}_F$ とする．このとき

$$\Sigma_D = D + \Sigma_D^0, \qquad \Sigma_D^0 = \left\{ \sum_\sigma x_\sigma \sigma \in \mathrm{Div}_\infty^0 \mid x_\sigma \leqq \frac{\log(\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})\partial_F)}{n} \ \ ({}^\forall \sigma \in V_\infty) \right\}$$

と書ける．よって

$$\omega_{\mathrm{Div}_\infty^0}(\Sigma_D) = \omega_{\mathrm{Div}_\infty^0}(\Sigma_D^0)$$

明らかに

$$\omega_{\mathrm{Pic}_F^0}(\mathrm{P}\Sigma_D) = \omega_{\mathrm{Pic}_F^0}((\Sigma_D + \mathrm{pd}(\mathcal{O}^\times))/\mathrm{pd}(\mathcal{O}^\times)) \leqq \omega_{\mathrm{Div}_\infty^0}(\Sigma_D)$$

だから, 定理 3 より

$$\omega_{\mathrm{Pic}_F^0}(\mathrm{Pic}_F^0) \leqq \sum_{D \in \mathrm{Red}_F} \omega_{\mathrm{Pic}_F^0}(\mathrm{P}\Sigma_D) \leqq \sum_{D \in \mathrm{Red}_F} \omega_{\mathrm{Div}_\infty^0}(\Sigma_D^0)$$

自然な同型

$$\mathrm{Div}_\infty \cong \mathbf{R}^{r_1+r_2} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, \cdots, x_{r_1}, y_1, \cdots, y_{r_2}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{r_1}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^{r_2}\}$$

がある．$d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$ をルベーグ測度とすれば,

$$\omega_{\mathrm{Div}_\infty} = (\sqrt{2})^{r_2} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

の関係がある．いま

$$\Sigma = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid x_1 + \cdots + x_{r_1} + 2y_1 + \cdots + 2y_{r_2} = 0, \ x_i \leq 1, \ y_j \leq 1\}$$

として, $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1, 1, \cdots, 1) \in \mathbf{R}^{r_1+r_2}$ を頂点とし, Σ を底面とする三角錐を V とする．即ち

$$V = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid 0 \leq x_1 + \cdots + x_{r_1} + 2y_1 + \cdots + 2y_{r_2}, \ x_i \leq 1, \ y_j \leq 1\}$$

である．このとき

$$\omega_{\mathrm{Div}_\infty}(V) = \frac{1}{r_1 + r_2} ||\mathbf{1}|| \omega_{\mathrm{Div}_\infty^0}(\Sigma) = \frac{\sqrt{n}}{r_1 + r_2} \omega_{\mathrm{Div}_\infty^0}(\Sigma)$$

よって,

$$\omega_{\mathrm{Div}_\infty^0}(\Sigma) = \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{n}} \omega_{\mathrm{Div}_\infty}(V) = \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{n}} 2^{r_2/2} \int_V d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

から

$$\omega_{\mathrm{Div}_\infty^0}(\Sigma_D^0) = \omega_{\mathrm{Div}_\infty^0}(\left(\frac{\log(\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})\partial_F)}{n}\right)\Sigma) = \left(\frac{\log(\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})\partial_F)}{n}\right)^{r_1+r_2-1} \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{n}} 2^{r_2/2} \int_V d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

である. 積分を計算する.

$$\begin{aligned}
\int_V d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} &= \int\limits_{\substack{0\le x_1+\cdots+x_{r_1}+2y_1+\cdots+2y_{r_2}\\ x_i\le 1,\ y_j\le 1}} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{r_2} \int\limits_{\substack{0\le x_1+\cdots+x_{r_1}+y_1+\cdots+y_{r_2}\\ x_i\le 1,\ y_j\le 2}} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{r_2} \frac{n^{r_1+r_2}}{(r_1+r_2)!}
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{Div}^0_\infty}(\Sigma^0_D) &= \left(\frac{\log(\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})\partial_F)}{n}\right)^{r_1+r_2-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{r_2}\frac{n^{r_1+r_2-1/2}}{(r_1+r_2-1)!} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2^{r_2/2}}\frac{1}{(r_1+r_2-1)!}\left(\log(\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})\partial_F)\right)^{r_1+r_2-1}
\end{aligned}$$

$\mathrm{di}(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Red}_F$ だから $\mathrm{Nr}(\mathfrak{a}) \leqq 1$. よって

$$\omega_{\mathrm{Div}^0_\infty}(\Sigma^0_D) \leqq \frac{\sqrt{n}}{2^{r_2/2}}\frac{1}{(r_1+r_2-1)!}\left(\log(\partial_F)\right)^{r_1+r_2-1}$$

となるので

$$\omega_{\mathrm{Pic}^0_F}(\mathrm{Pic}^0_F) \leqq \frac{\sqrt{n}}{2^{r_2/2}(r_1+r_2-1)!}(\log\partial_F)^{r_1+r_2-1}\sharp(\mathrm{Red}_F)$$

を得る. (**qed**)

2　向きづけられた Arakelov 因子

2.1　向きづけられた Arakelov 因子

群

$$\widetilde{\mathrm{Div}}_F = \left\{ \bigoplus_{\sigma\in V_\infty} F_\sigma^\times \sigma \right\} \oplus \left\{ \bigoplus_{v\in V_f} \mathbf{Z} v \right\} = F_{\mathbf{R}}^\times \oplus \left\{ \bigoplus_{v\in V_f} \mathbf{Z} v \right\}$$

を向きづけられた Arakelov 因子群という. また, 群

$$\mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times$$

の要素を向きづけられた Hermite ラインバンドルという,

$$D^* = \sum_{\sigma\in V_\infty} e^{z_\sigma}\sigma + \sum_{v\in V_f} n_v v \in \widetilde{\mathrm{Div}}_F$$

に対し

$$\mathrm{id}(D^*) = \prod_{v\in V_f} \mathfrak{p}(v)^{-n_v}, \qquad u_{D^*} = (e^{-z_\sigma}) \in F_{\mathbf{R}}^\times$$

とすれば, 同型

$$\widetilde{\mathrm{Div}}_F \cong \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times \ : \ D^* \mapsto h(D^*) = (\mathrm{id}(D^*), u_{D^*})$$

がある. h の逆写像を

$$\mathrm{div}^* \ : \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_F$$

とおく. また

$$\mathrm{id} \ : \widetilde{\mathrm{Div}}_F \longrightarrow \mathrm{I}_F$$

の section を

$$\mathrm{di}^* \ : \mathrm{I}_F \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_F \ : \ \mathrm{di}^*(\mathfrak{a}) = \mathrm{div}^*(\mathfrak{a}, \mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n}) \qquad (\mathfrak{a} \in \mathrm{I}_F)$$

とおく.

$a \in F^\times$ に対し, 向きづけられた主因子を

$$\mathrm{pd}^*(a) = \sum_{v\in V_\infty} \sigma(a)^{-1}\sigma + \sum_{v\in V_f} v(a) v$$

で定める.

$$h(\mathrm{pd}^*(a)) = (a^{-1}\mathcal{O}, a)$$

となる.

$$\mathrm{pd}^* : F^\times \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_F$$

は単射準同型である.

$$\widetilde{\mathrm{Pic}}_F = \widetilde{\mathrm{Div}}_F / \mathrm{pd}^*(F^\times)$$

とおけば, 完全列

$$0 \longrightarrow F^\times \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_F \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Pic}}_F \longrightarrow 0$$

がある.

Div_F の要素

$$D = \sum_{\sigma \in V_\infty} x_\sigma \sigma + \sum_{v \in V_f} n_v v$$

に対し

$$\exp(D) = \sum_{\sigma \in V_\infty} e^{x_\sigma} \sigma + \sum_{v \in V_f} n_v v \in \widetilde{\mathrm{Div}}_F$$

とおけば, $D \mapsto \exp(D)$ は単射準同型

$$\mathrm{Div}_F \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_F$$

を与える. Hermite ラインバンドルでは, これは自然な単射

$$\mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R},+} \longrightarrow \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times$$

に対応する. 逆に

$$D^* = \sum_{\sigma \in V_\infty} e^{z_\sigma} \sigma + \sum_{v \in V_f} n_v v \in \widetilde{\mathrm{Div}}_F$$

に対し

$$\log(D^*) = \sum_{\sigma \in V_\infty} \log |e^{z_\sigma}| \sigma + \sum_{v \in V_f} n_v v \in \mathrm{Div}_F$$

とおけば, これは exp の section で, 完全列

$$0 \longrightarrow U_{F_{\mathbf{R}}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_F \xrightarrow{\log} \mathrm{Div}_F \longrightarrow 0$$

を与える. ただし

$$U_{F_{\mathbf{R}}} = \prod_{\sigma \in V_\infty} U_{F_\sigma}, \qquad U_{F_\sigma} = \{x \in F_\sigma \mid |x|_{F_\sigma} = 1\}$$

とする. Hermite ラインバンドルでは

$$\mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times \longrightarrow \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R},+} : (I, u) \mapsto (I, \mathrm{abs}(u))$$

に対応する.

$$\log(\mathrm{pd}^*(f)) = \sum_{\sigma\in V_\infty}(-\log|\sigma(f)|)\sigma + \sum_{v\in V_f} v(f)v = \mathrm{pd}(f), \qquad (f\in F^\times)$$

が成り立つ. 完全系列からなる次の可換図式がある.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mu_F \arrow[r] \arrow[d] & F^\times \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pd}^*"] & F^\times/\mu_F \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pd}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_{F_{\mathbf{R}}} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{Div}}_F \arrow[r, "\log"] \arrow[d] & \mathrm{Div}_F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_{F_{\mathbf{R}}}/\mu_F \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{Pic}}_F \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}_F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

2.2 向きづけられた Arakelov 因子の次数

向きづけられた Arakelov 因子

$$D^* = \sum_{\sigma\in V_\infty} e^{z_\sigma}\sigma + \sum_{v\in V_f} n_v v \in \widetilde{\mathrm{Div}}_F$$

に対し

$$\deg(D^*) = \deg(\log(D^*))$$

により次数を定める. これは準同型

$$\deg : \widetilde{\mathrm{Div}}_F \longrightarrow \mathbf{R}$$

を与える. その核を

$$\widetilde{\mathrm{Div}}{}^0_F = \mathrm{Ker}(\deg)$$

と表す. $\mathrm{pd}^*(F^\times) \subset \widetilde{\mathrm{Div}}{}^0_F$ であり, 剰余群

$$\widetilde{\mathrm{Pic}}{}^0_F = \widetilde{\mathrm{Div}}{}^0_F/\mathrm{pd}^*(F^\times)$$

を向きづけられた Arakelov 類群という. 完全系列からなる次の可換図式がある.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mu_F \arrow[r] \arrow[d] & F^\times \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pd}^*"] & F^\times/\mu_F \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pd}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_{F_{\mathbf{R}}} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{Div}}_F^0 \arrow[r, "\log"] \arrow[d] & \mathrm{Div}_F^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_{F_{\mathbf{R}}}/\mu_F \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}_F^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

2.3 狭義イデアル類群

$F_{\mathbf{R}}^\times$ の $\mathbf{1}$ を含む連結成分を

$$F_{\mathbf{R},\mathbf{1}} = \prod_{\sigma \in V_{\mathbf{R}}} F_{\sigma,+} \times \prod_{\sigma \in V_{\mathbf{C}}} F_\sigma^\times$$

として, これから

$$F_+ = F \cap F_{\mathbf{R},\mathbf{1}}, \qquad \mathcal{O}_+ = \mathcal{O} \cap F_+, \qquad \mathcal{O}_+^\times = \mathcal{O}^\times \cap F_+$$

とおく. F の狭義イデアル類群を

$$\mathrm{C}_{F,+} = \mathrm{I}_F/\mathrm{P}_{F,+}, \qquad \mathrm{P}_{F,+} = \{a\mathcal{O} \mid a \in F_+\}$$

と定義する. 同型

$$h : \widetilde{\mathrm{Div}}_F \cong \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times$$

から, 自然な全射

$$h_{\mathrm{sgn}} : \widetilde{\mathrm{Div}}_F \longrightarrow \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times/F_{\mathbf{R},\mathbf{1}}$$

が存在する. このとき

$$(\mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times/F_{\mathbf{R},\mathbf{1}})/h_{\mathrm{sgn}}(\mathrm{pd}^*(F^\times)) \cong \mathrm{C}_{F,+}$$

がある. これから, 次の完全系列からなる可換図式がある.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_+^\times & \longrightarrow & F^\times & \longrightarrow & h_{\mathrm{sgn}}(F^\times) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pd}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pd}} & & \\
0 & \longrightarrow & F_{\mathbf{R},\mathbf{1}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Div}}_F & \xrightarrow{h_{\mathrm{sgn}}} & \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times / F_{\mathbf{R},\mathbf{1}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{T} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Pic}}_F & \longrightarrow & \mathrm{C}_{F,+} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

ここで

$$\widetilde{T} = F_{\mathbf{R},1}/\mathcal{O}_+^\times$$

とする.

$$F_{\mathbf{R},1}^0 = \{u \in F_{\mathbf{R},1} \mid \mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u) = 1\}$$

として, 次数が 0 の部分に制限すれば次の完全系列からなる可換図式がある.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_+^\times & \longrightarrow & F^\times & \longrightarrow & h_{\mathrm{sgn}}(F^\times) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pd}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pd}} & & \\
0 & \longrightarrow & F_{\mathbf{R},\mathbf{1}}^0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Div}}_F^0 & \xrightarrow{h_{\mathrm{sgn}}} & \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times / F_{\mathbf{R},\mathbf{1}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{T}^0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0 & \longrightarrow & \mathrm{C}_{F,+} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

ここで

$$\widetilde{T}^0 = F_{\mathbf{R},1}^0/\mathcal{O}_+^\times$$

とおく. $\widetilde{T}^0$ は $n-1$ 次元のコンパクトトーラスである.
まとめると次の図式がある.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{O}^{\times}/\mu_F \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & F^{\times}/\mu_F \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{P}_F \arrow[ddd] \\
 & \mathcal{O}_{+}^{\times} \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd, "\log|\cdot|"] & & & F^{\times} \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & h_{\mathrm{sgn}}(F^{\times}) \arrow[ur] \arrow[ddd] & \\
\mu_{F,+} \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mu_F \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mu_F/\mu_{F,+} \arrow[ur] \arrow[ddd] & & \\
 & & \mathrm{Div}_{F,\infty} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{Div}_F \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{I}_F \arrow[ddd] \\
 & F_{\mathbf{R},\mathbf{1}} \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \widetilde{\mathrm{Div}}_F \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^{\times}/F_{\mathbf{R},\mathbf{1}} \arrow[ur] \arrow[ddd] & \\
\prod_{\sigma\in V_{\mathbf{C}}} U_{F_\sigma} \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & U_{F_{\mathbf{R}}} \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & F_{\mathbf{R}}^{\times}/F_{\mathbf{R},\mathbf{1}} \arrow[ur] \arrow[ddd] & & \\
 & & T \arrow[rrr] & & & \mathrm{Pic}_F \arrow[rrr] & & & \mathrm{C}_F \\
 & \widetilde{T} \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & \widetilde{\mathrm{Pic}}_F \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & \mathrm{C}_{F,+} \arrow[ur] & \\
\prod_{\sigma\in V_{\mathbf{C}}} U_{F_\sigma}/\mu_{F,+} \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & U_{F_{\mathbf{R}}}/\mu_F \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & F_{\mathbf{R}}^{\times}/\mu_F F_{\mathbf{R},1} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

ここで

$$\mu_{F,+} = \mu_F \cap \mathcal{O}_{+}^{\times} = \begin{cases} \mu_F & (r_1 = 0) \\ \{1\} & (r_1 \geqq 1) \end{cases}$$

$$F_{\mathbf{R}}^{\times}/\mu_F F_{\mathbf{R},\mathbf{1}} = \begin{cases} \{1\} & (r_1 = 0) \\ F_{\mathbf{R}}^{\times}/\{\pm\mathbf{1}\}F_{\mathbf{R},\mathbf{1}} & (r_1 \geqq 1) \end{cases}$$

である.

$$\widetilde{T} = \widetilde{\mathrm{Pic}}_F \text{ の単位元の連結成分}$$

が成り立つ.

同様に

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{O}^\times/\mu_F \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & F^\times/\mu_F \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{P}_F \arrow[ddd] \\
 & \mathcal{O}_+^\times \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd, "\log|\cdot|"] & & & F^\times \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & h_{\mathrm{sgn}}(F^\times) \arrow[ur] \arrow[ddd] & \\
 \mu_{F,+} \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mu_F \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mu_F/\mu_{F,+} \arrow[ur] \arrow[ddd] & & \\
 & & \mathrm{Div}^0_{F,\infty} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{Div}^0_F \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{I}_F \arrow[ddd] \\
 & F^0_{\mathbf{R},\mathbf{1}} \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \widetilde{\mathrm{Div}}^0_F \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{I}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times/F_{\mathbf{R},\mathbf{1}} \arrow[ur] \arrow[ddd] & \\
 \prod_{\sigma\in V_{\mathbf{C}}} U_{F_\sigma} \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & U_{F_{\mathbf{R}}} \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & F_{\mathbf{R}}^\times/F_{\mathbf{R},\mathbf{1}} \arrow[ur] \arrow[ddd] & & \\
 & & T^0 \arrow[rrr] & & & \mathrm{Pic}^0_F \arrow[rrr] & & & \mathrm{C}_F \\
 & \widetilde{T}^0 \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & \widetilde{\mathrm{Pic}}^0_F \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & \mathrm{C}_{F,+} \arrow[ur] & \\
 \prod_{\sigma\in V_{\mathbf{C}}} U_{F_\sigma}/\mu_{F,+} \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & U_{F_{\mathbf{R}}}/\mu_F \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & F_{\mathbf{R}}^\times/\mu_F F_{\mathbf{R},1} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

$$\widetilde{T}^0 = \widetilde{\mathrm{Pic}}^0_F \text{ の単位元の連結成分}$$

となる.

2.4 イデール群と向きづけられた Arakelov 類群

$\lambda \in \mathbf{A}^\times$ に対し

$$\mathrm{div}^*(\lambda) = \sum_{\sigma \in V_\infty} \lambda_\sigma^{-1}\sigma + \sum_{v \in V_f} v(\lambda_v)v$$

とおけば, div^* は全射準同型

$$\mathrm{div}^* : \mathbf{A}^\times \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_F$$

を与える. その核は

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{div}^*) = U_{\mathbf{A},f} = \prod_{v \in V_f} U_{F_v}$$

である. 従って, 完全列

$$0 \longrightarrow U_{\mathbf{A},f} \longrightarrow \mathbf{A}^\times \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_F \longrightarrow 0$$

がある. div^* の $\mathbf{A}^1$ への制限は, 完全列

$$0 \longrightarrow U_{\mathbf{A},f} \longrightarrow \mathbf{A}^1 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_F^0 \longrightarrow 0$$

を与える. よって

$$\widetilde{\mathrm{Pic}}_F \cong \mathbf{A}^\times / F^\times U_{\mathbf{A},f}, \qquad \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0 \cong \mathbf{A}^1 / F^\times U_{\mathbf{A},f}$$

となる.

2.5 向きづけられた Arakelov 類群の距離

$\widetilde{T} = F_{\mathbf{R},\mathbf{1}}/\mathcal{O}_+^\times$ は $\widetilde{\mathrm{Pic}}_F$ の単位元を含む連結成分である. $\widetilde{\mathrm{Pic}}_F$ の要素を

$$\mathfrak{d}^* = \overline{D}^*, \qquad (D^* = \widetilde{\mathrm{Div}}_F)$$

と表す.

$$\mathfrak{d}^* \in \widetilde{T} \iff {}^\exists \overline{u}_{\mathfrak{d}^*} \in F_{\mathbf{R},\mathbf{1}}/\mathcal{O}_+^\times \quad \text{s.t. } \mathrm{div}^*(\mathcal{O}, u_{\mathfrak{d}^*}) \in \mathfrak{d}^*$$

である. $\overline{u}_{\mathfrak{d}^*}$ は $\mathfrak{d}^*$ から一意に定まる. そこで $\widetilde{T}$ 上のノルムを

$$||\mathfrak{d}^*||_{\widetilde{\mathrm{Pic}}} = ||\overline{u}_{\mathfrak{d}^*}||_{\widetilde{\mathrm{Pic}}} = \min_{x \in \overline{u}_{\mathfrak{d}^*}} ||\log(x)|| = \min_{\varepsilon \in \mathcal{O}_+^\times} ||\log(\varepsilon u_{\mathfrak{d}^*})||$$

と定義する．ただし $x=(x_\sigma)$ に対し $\log(x)=(\log(x_\sigma))$ とし, 複素数では主値を取るものとする．$\mathfrak{d}_1^*, \mathfrak{d}_2^* \in \widetilde{\mathrm{Pic}}_F$ が同じ連結成分に入るとき, $\mathfrak{d}_1^* - \mathfrak{d}_2^* \in \widetilde{T}$ だから, 距離を

$$||\mathfrak{d}_1^* - \mathfrak{d}_2^*||_{\widetilde{\mathrm{Pic}}} = ||\overline{u}_{\mathfrak{d}_1^*}\overline{u}_{\mathfrak{d}_2^*}^{-1}||_{\widetilde{\mathrm{Pic}}}$$

により定義する．これにより $\widetilde{\mathrm{Pic}}_F$ は可換リー群になり, $\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$ はコンパクト部分群になる．

$$\mathrm{di}^* : \mathrm{I}_F \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_F^0 : \mathrm{di}^*(\mathfrak{a}) = \mathrm{div}^*(\mathfrak{a}, \mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n})$$

を自然な写像 $\widetilde{\mathrm{Div}}_F^0 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$ と合成したものを

$$\overline{\mathrm{di}}^* : \mathrm{I}_F \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$$

と表す．

命題 10 完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{I}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathrm{I}_F \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$$

があり, $\overline{\mathrm{di}}^*(\mathrm{I}_F) \subset \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$ は *dense* になる．

2.6 向きづけられた Arakelov 類群の体積

$\sigma \in V_\infty$ に対し, Hermite 内積

$$F_\sigma \times F_\sigma \longrightarrow F_\sigma : (x,y)_{F_\sigma} = \mathrm{Tr}_{F_\sigma/\mathbf{R}}(x\overline{y}) \qquad (x, y \in F_\sigma)$$

を考える．この内積に関して

$$\{x \in F_\sigma \mid (x,x)_{F_\sigma} = 1\} = \begin{cases} \{\pm 1\} & (\sigma \in V_{\mathbf{R}}) \\ \{x \in F_\sigma \mid 2x\overline{x} = 1\} & (\sigma \in V_{\mathbf{C}}) \end{cases}$$

である．$F_{\mathbf{R}}$ の内積 $\langle , \rangle$ から定まる不変測度 ω_0 の定義から,

$$\mathrm{Vol}(\{x \in F_\sigma \mid (x,x)_{F_\sigma} = 1\}) = \begin{cases} 2 & (\sigma \in V_{\mathbf{R}}) \\ 2\pi & (\sigma \in V_{\mathbf{C}}) \end{cases}$$

により F_σ の円周の測度が定まる．これから $U_{F_\sigma} = \{x \in F_\sigma \mid |x|_{F_\sigma} = 1\}$ の測度を

$$\omega_{U_{F_\sigma}}(U_{F_\sigma}) = \begin{cases} 2 & (\sigma \in V_{\mathbf{R}}) \\ 2\pi\sqrt{2} & (\sigma \in V_{\mathbf{C}}) \end{cases}$$

と定め, $U_{F_{\mathbf{R}}}/\mu_F$ の測度を

$$\omega_{U_{F_{\mathbf{R}}}/\mu_F} = \frac{\prod_{\sigma\in V_\infty}\omega_{U_{F_\sigma}}}{\mu_F \text{ の離散測度}}$$

と定義する. 完全列

$$0 \longrightarrow U_{F_{\mathbf{R}}}/\mu_F \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0 \longrightarrow \mathrm{Pic}_F^0 \longrightarrow 0$$

から, $\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$ の測度を

$$\frac{\omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}}{\omega_{U_{F_{\mathbf{R}}}/\mu_F}} = \omega_{\mathrm{Pic}_F^0}$$

となるように取る. 定義から

$$\omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0) = \frac{2^{r_1}(2\pi\sqrt{2})^{r_2}}{w_F}\omega_{\mathrm{Pic}_F^0}(\mathrm{Pic}_F^0) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w_F}\sqrt{n}R_F h_F$$

である.

$\omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}$ を $\mathbf{A}^\times$ の玉河測度と比較する. $\omega_{\mathbf{R}^n}$ を通常の $\mathbf{R}^n$ の Lebesgue 測度として

$$\mu_{F_\sigma} = \begin{cases} \omega_{\mathbf{R}} & (\sigma \in V_{\mathbf{R}}) \\ 2\omega_{\mathbf{R}^2} & (\sigma \in V_{\mathbf{C}}) \end{cases}$$

とおく. これから $F_\sigma^\times$ の不変測度を

$$\mu_{F_\sigma^\times} = |\cdot|_{F_\sigma}^{-1}\mu_{F_\sigma}$$

と定める. また $v \in V_f$ のとき, $F_v^\times$ の不変測度 $\mu_{F_v^\times}$ を

$$\mu_{F_v^\times}(\mathcal{O}_v^\times) = \mu_{F_v^\times}(U_{F_v}) = 1$$

であるように取る. $\mathbf{A}^\times$ の不変測度を

$$\mu_{\mathbf{A}^\times} = \prod_{v\in V}\mu_{F_v^\times}$$

で与える. $\omega_{\mathbf{A}^\times}$ を $\mathbf{A}^\times$ の玉河測度とすれば

$$\mu_{\mathbf{A}^\times} = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w_F}R_F h_F \omega_{\mathbf{A}^\times}$$

の関係がある. よって

$$\mu_{\mathbf{A}^\times}(\mathbf{A}^1/F^\times) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w_F}R_F h_F$$

である.

2.7 向きづけられた Arakelov 類群と被約 Arakelov 因子

定義から Red_F の要素は $D = \mathrm{div}(\mathfrak{a}, \mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n})$ の形をもつ. 単射

$$\exp : \mathrm{Div}_F \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_F$$

と合わせると

$$\exp(\mathrm{div}(\mathfrak{a}, \mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n})) = \mathrm{div}^*(\mathfrak{a}, \mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n})$$

である. そこで

$$\mathrm{Red}_F^* = \exp(\mathrm{Red}_F) \subset \widetilde{\mathrm{Div}}_F^0$$

とおく.

Lemma 10 自然な写像 $\widetilde{\mathrm{Div}}_F^0 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$ により Red_F^* は単射で $\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$ に移る. 従って

$$\mathrm{Red}_F^* \subset \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$$

と見なせる.

証明 $\mathrm{di}^*(\mathfrak{a}), \mathrm{di}^*(\mathfrak{b}) \in \mathrm{Red}_F^*$ が $[\mathrm{di}^*(\mathfrak{a})] = [\mathrm{di}^*(\mathfrak{b})]$ となったとする. このとき

$${}^{\exists}a \in F^\times \ \text{ s.t. } \ \mathrm{di}^*(\mathfrak{b}) = \mathrm{di}^*(\mathfrak{a}) + \mathrm{pd}^*(a)$$

となる. よって

$$\mathfrak{b} = a^{-1}\mathfrak{a}, \qquad \mathrm{Nr}(\mathfrak{b})^{-1/n} = \sigma(a^{-1})\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n} \quad (\sigma \in V_\infty)$$

とくに $\sigma(a)$ は σ に依存しないから $a \in \mathbf{Q}^\times$ である. $1 \in \mathfrak{a}$ だから $a^{-1} \in \mathfrak{b}$. $1 \in \mathrm{M}(\mathrm{di}^*(\mathfrak{b}))$ だから, 或る $\sigma \in V_\infty$ で

$$1 = |\sigma(1)| \leqq |\sigma(a^{-1})| = |a^{-1}|$$

となる. 同様に $\mathfrak{a} = a\mathfrak{b}$ で考えれば

$$1 \leqq |a|$$

となるから, $a = \pm 1$ である. $a = \mathrm{Nr}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})^{1/n} > 0$ だから $a = 1$. 従って $\mathrm{di}^*(\mathfrak{b}) = \mathrm{di}^*(\mathfrak{a})$ が成り立つ. (**qed**)

定理 5 $\mathrm{di}^*(\mathfrak{a}), \mathrm{di}^*(\mathfrak{b}) \in \mathrm{Red}_F^*$ とする．このとき

$$u \in F^0_{\mathbf{R},\mathbf{1}} \quad s.t. \quad |\log u_\sigma| < \log(4/3) \quad ({}^\forall \sigma \in V_\infty)$$

に対し

$$[\mathrm{di}^*(\mathfrak{a})] - [\mathrm{di}^*(\mathfrak{b})] = [\mathrm{div}^*(\mathcal{O}, u)]$$

ならば $\mathrm{di}^*(\mathfrak{a}) = \mathrm{di}^*(\mathfrak{b})$ である．

証明 仮定より

$$^\exists a \in F^\times \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{di}^*(\mathfrak{a}) - \mathrm{di}^*(\mathfrak{b}) + \mathrm{pd}^*(a) = \mathrm{div}^*(\mathcal{O}, u)$$

となる．

$$\mathrm{Nr}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})^{-1/n}\sigma(a) = u_\sigma \in F^0_{\mathbf{R},\mathbf{1}}$$

だから $a \in F_+^\times$ である．$\xi = \mathrm{Nr}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})^{1/n}$ とおけば $u_\sigma = \sigma(a)/\xi$ より

$$\begin{aligned} |\frac{\sigma(a)}{\xi} - 1| = |u_\sigma - 1| = |e^{\log u_\sigma} - 1| &\leqq e^{|\log u_\sigma|} - 1 \\ &< e^{\log(4/3)} - 1 = \frac{1}{3} \qquad ({}^\forall \sigma \in V_\infty) \end{aligned}$$

従って

$$(1) \quad |\sigma(a) - \xi| < \frac{1}{3}\xi \qquad ({}^\forall \sigma \in V_\infty)$$

また $\mathfrak{a} = a\mathfrak{b}$ で, 仮定より $1 \in \mathrm{M}(\mathrm{di}^*(\mathfrak{b}))$ だから

$$(2) \quad 1, a \in \mathrm{M}(\mathrm{di}^*(\mathfrak{a}))$$

である．(1), (2) より $1/2 \leqq \xi \leqq 3/2$ となることを示す．
$0 < \xi < 1/2$ とすると

$$|\sigma(a)| \leqq |\sigma(a) - \xi| + |\xi| < \frac{1}{3}\xi + \xi < 1 = |\sigma(1)|$$

となる．これは $1 \in \mathrm{M}(\mathrm{di}^*(\mathfrak{a}))$ に矛盾．
$3/2 < \xi$ とすると

$$|\sigma(a)| \geqq |\xi| - |\sigma(a) - \xi| \geqq \xi - \frac{1}{3}\xi > 1 = |\sigma(1)|$$

となり, これは $a \in \mathrm{M}(\mathrm{di}^*(\mathfrak{a}))$ に矛盾．よって

$$\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq \frac{3}{2}$$

これから

$$|\sigma(a-1)| \leqq |\sigma(a)-\xi| + |\xi - 1| < \frac{1}{3}\xi + |\xi - 1| \leqq 1 = |\sigma(1)|$$

で, $1 \in \mathrm{M}(\mathrm{id}^*(\mathfrak{a}))$ から $a-1=0$ でなければならない. よって $a=1$ となり $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ を得る. (**qed**)

定理 6 $\mathfrak{d}_1^*, \mathfrak{d}_2^* \in \mathrm{Red}_F^* \subset \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$ が同じ連結成分に入りかつ

$$||\mathfrak{d}_1^* - \mathfrak{d}_2^*||_{\widetilde{\mathrm{Pic}}} < \log(4/3)$$

ならば $\mathfrak{d}_1^* = \mathfrak{d}_2^*$ である.

証明 $\mathfrak{d}_1^* = [\mathrm{di}^*(\mathfrak{a})], \mathfrak{d}_2^* = [\mathrm{di}^*(\mathfrak{b})]$ とする. このとき

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_1^*, \mathfrak{d}_2^* \text{ が同じ連結成分に入る} &\iff \mathfrak{d}_1^* - \mathfrak{d}_2^* \in \widetilde{T}^0 \\ &\iff {}^{\exists}\overline{u} \in F_{\mathbf{R},\mathbf{1}}^0/\mathcal{O}_+^\times \ \text{ s.t. } \ \mathfrak{d}_1^* - \mathfrak{d}_2^* = [\mathrm{div}^*(\mathcal{O}, u)] \end{aligned}$$

また

$$||\mathfrak{d}_1^* - \mathfrak{d}_2^*||_{\widetilde{\mathrm{Pic}}} = \min_{x \in \overline{u}} ||\log(x)||$$

そこで, 最初から u を

$$||\log(u)|| = ||\mathfrak{d}_1^* - \mathfrak{d}_2^*||_{\widetilde{\mathrm{Pic}}} < \log(4/3)$$

となるようにとってよい.

$$||\log(u)||^2 = \sum_\sigma |\log(u_\sigma)|^2$$

だから

$$|\log(u_\sigma)| < \log(4/3) \qquad ({}^{\forall}\sigma \in V_\infty)$$

よって定理 5 が適用できて, $\mathfrak{d}_1^* = \mathfrak{d}_2^*$ となる. (**qed**)

定義 $D^* = \mathrm{di}^*(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Red}_F^*$ に対し

$$\Omega_{D^*} = \{\mathrm{div}^*(\mathfrak{a}, \mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n}u) \mid u \in F_{\mathbf{R},\mathbf{1}}^0,\ |\log(u_\sigma)| < \frac{\log(4/3)}{2} \ \ ({}^{\forall}\sigma \in V_\infty)\}$$

とおく.

定理 7 Ω_{D^*}, $(D^* \in \mathrm{Red}_F^*)$ は互いに *disjoint* で, 自然な写像 $\widetilde{\mathrm{Div}}_F^0 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$ は, 単射

$$\bigcup_{D^* \in \mathrm{Red}_F^*} \Omega_{D^*} \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0$$

を与える.

証明 $D_1^*, D_2^* \in \mathrm{Red}_F^*$ に対し, $\Omega_{D_1^*} \cap \Omega_{D_2^*} \neq \emptyset$ ならば, 定理 5 から $D_1^* = D_2^*$ となる. 単射性も容易. (**qed**)

系 2 $D_0^* \in \mathrm{Red}_F^*$ を任意に一つ固定する. このとき

$$\sum_{D^* \in \mathrm{Red}_F^*} \omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\Omega_{D^*}) = \sharp \mathrm{Red}_F^* \cdot \omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\Omega_{D_0^*}) \leqq \omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0)$$

である.

2.8 被約 Arakelov 因子の個数の評価

系 2 を使って $\sharp \mathrm{Red}_F^* = \sharp \mathrm{Red}_F$ を評価する.
Ω_{D^*} の体積を計算する. $u = (u_\sigma) \in F_{\mathbf{R}}$ に対し

$$\log(u) = (\log(u_\sigma)) \in F_{\mathbf{R}}, \qquad (-\pi < \arg(u_\sigma) \leqq \pi)$$

とおく.

$$\log(u_\sigma) = \begin{cases} x_\sigma & (\sigma \in V_{\mathbf{R}}) \\ y_\sigma + z_\sigma \sqrt{-1} & (\sigma \in V_{\mathbf{C}}) \end{cases}$$

と表す. このとき

$$|\log(u_\sigma)| \leqq \frac{1}{2}\log(\frac{4}{3}) \iff |x_\sigma| \leqq \frac{1}{2}\log(\frac{4}{3}), \quad y_\sigma^2 + z_\sigma^2 \leqq \left(\frac{1}{2}\log(\frac{4}{3})\right)^2$$

でかつ

$$\begin{aligned} u \in F_{\mathbf{R},\mathbf{1}}^0 &\iff \mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u) = \prod_{\sigma \in V_\sigma} u_\sigma \prod_{\sigma \in V_{\mathbf{C}}} u_\sigma \overline{u}_\sigma = 1 \\ &\iff \log \mathrm{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u) = \sum_{\sigma \in V_{\mathbf{R}}} x_\sigma + 2 \sum_{\sigma \in V_{\mathbf{C}}} y_\sigma = 0 \end{aligned}$$

である．そこで

$$A=\left\{(x_\sigma)_{\sigma\in V_{\mathbf{R}}}\times(y_\sigma+z_\sigma\sqrt{-1})_{\sigma\in V_{\mathbf{C}}}\in F_{\mathbf{R}}\mid |x_\sigma|\leqq\frac{1}{2}\log(\frac{4}{3}),\quad y_\sigma^2+z_\sigma^2\leqq\left(\frac{1}{2}\log(\frac{4}{3})\right)^2\right\}$$

とおく．$F_{\mathbf{R}}$ を通常の内積 $(,)_{\mathbf{R}^n}$ をもつユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ と

$$(x_\sigma)_{\sigma\in V_{\mathbf{R}}}\times(y_\sigma+z_\sigma\sqrt{-1})_{\sigma\in V_{\mathbf{C}}}\quad\longleftrightarrow\quad(x_\sigma)_{\sigma\in V_{\mathbf{R}}}\times(y_\sigma,z_\sigma)_{\sigma\in V_{\mathbf{C}}}$$

により同一視して, $A\subset\mathbf{R}^n$ とみる．

$$\boldsymbol{e}=(1)_{\sigma\in V_{\mathbf{R}}}\times(2,0)_{\sigma\in V_{\mathbf{C}}}\in\mathbf{R}^n,\qquad\mathbf{1}=(1)_{\sigma\in V}\in F_{\mathbf{R}}$$

とし, $\boldsymbol{e}$ に直交する超平面を $H_{\boldsymbol{e}}$ とおく．

$$H_{\boldsymbol{e}}\perp\boldsymbol{e}\ \text{ w.r.t. }(,)_{\mathbf{R}^n},\qquad H_{\boldsymbol{e}}\perp\mathbf{1}\ \text{ w.r.t. }\langle,\rangle$$

に注意する．このとき

$$\Omega_{D^*}=\{\mathrm{div}^*(\mathfrak{a},\mathrm{Nr}(\mathfrak{a})^{-1/n}u)\mid\ \log(u)\in A\cap H_{\boldsymbol{e}}\}$$

と表せる．いま $F_{\mathbf{R}}$ の通常の Lebesgue 測度 $\omega_{F_{\mathbf{R}}}$ は

$$\omega_0=2^{r_2}\omega_{F_{\mathbf{R}}}$$

の関係があった．ここで ω_0 は $F_{\mathbf{R}}$ の内積 $\langle,\rangle$ に関する不変測度である．$\mathbf{R}^n$ の Lebesgue 測度を $\omega_{\mathbf{R}^n}=\omega_{F_{\mathbf{R}}}$ とし, $\mathbf{R}^{n-1}$ の Lebesgue 測度を $\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}$ とする．このとき内積 $\langle,\rangle$ に関し $\mathbf{1}/\sqrt{\langle\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle}$ は $H_{\boldsymbol{e}}$ に直交し高さ 1 だから

$$\omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\Omega_{D^*})=\omega_0(A\cap H_{\boldsymbol{e}}+[0,1]\frac{1}{\sqrt{\langle\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle}}\mathbf{1})=2^{r_2}\omega_{\mathbf{R}^n}(A\cap H_{\boldsymbol{e}}+[0,1]\frac{1}{\sqrt{\langle\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle}}\mathbf{1})$$

$\mathbf{R}^n$ の通常の内積に関して $\boldsymbol{e}$ と $\mathbf{1}$ の成す角度を θ とすれば

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{R}^n}(A\cap H_{\boldsymbol{e}}+[0,1]\frac{1}{\sqrt{\langle\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle}}\mathbf{1})&=\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(A\cap H_{\boldsymbol{e}})(\frac{1}{\sqrt{\langle\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle}}\mathbf{1},\frac{1}{\sqrt{\langle\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle}}\mathbf{1})_{\mathbf{R}^n}^{1/2}\cos\theta\\&=\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(A\cap H_{\boldsymbol{e}})\sqrt{\frac{(\mathbf{1},\mathbf{1})_{\mathbf{R}^n}}{\langle\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle}}\frac{(\boldsymbol{e},\mathbf{1})_{\mathbf{R}^n}}{\sqrt{(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e})_{\mathbf{R}^n}}\sqrt{(\mathbf{1},\mathbf{1})_{\mathbf{R}^n}}}\\&=\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(A\cap H_{\boldsymbol{e}})\sqrt{\frac{r_1+r_2}{r_1+2r_2}}\frac{r_1+2r_2}{\sqrt{r_1+4r_2}\sqrt{r_1+r_2}}\end{aligned}$$

したがって

$$\omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\Omega_{D^*})=2^{r_2}\sqrt{\frac{r_1+2r_2}{r_1+4r_2}}\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(A\cap H_{\boldsymbol{e}})$$

となる．ここで簡単に

$$\alpha = \frac{1}{2}\log\frac{4}{3}$$

とおく．別紙の公式から

$$\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(A\cap H_{\boldsymbol{e}}) = \frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}\alpha^{n-1}\sqrt{r_1+4r_2}}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r_1}\left(\frac{J_1(2t)}{2t}\right)^{r_2}dt$$

である．したがって

$$\omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\Omega_{D^*}) = \frac{2^n\pi^{r_2}\alpha^{n-1}\sqrt{r_1+2r_2}}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r_1}\left(\frac{J_1(2t)}{2t}\right)^{r_2}dt$$

を得る．別紙から

$$2^{r_1-1}\pi^{r_2}\alpha^{n-1}\sqrt{\frac{r_1+4r_2}{r_1+\pi r_2}} < \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(A\cap H_{\boldsymbol{e}})$$

となる．よって

$$2^{r_1+r_2-1}\pi^{r_2}\left(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}\right)^{n-1}\sqrt{\frac{r_1+2r_2}{r_1+\pi r_2}} < \omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\Omega_{D^*})$$

である．

定理 8

$$\begin{aligned}\sharp\mathrm{Red}_F \leqq \frac{\omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0)}{\omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\Omega_{D^*})} &< 2^{-(r_1+r_2-1)}\pi^{-r_2}\left(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}\right)^{1-n}\sqrt{\frac{r_1+\pi r_2}{r_1+2r_2}}\omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0)\\ &= \frac{2^nR_Fh_F}{w_F\left(\log\frac{4}{3}\right)^{n-1}}\sqrt{r_1+\pi r_2}\end{aligned}$$

また (1.12) の定理から

$$\frac{(r_1+r_2-1)!R_Fh_F}{\left(\log\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2}\sqrt{|\Delta_F|}\right\}\right)^{r_1+r_2-1}} \leqq \sharp\mathrm{Red}_F$$

$$\omega_{\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0}(\widetilde{\mathrm{Pic}}_F^0) = \frac{2^{r_1}(2\pi\sqrt{2})^{r_2}}{w_F}\omega_{\mathrm{Pic}_F^0}(\mathrm{Pic}_F^0) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w_F}\sqrt{n}R_F h_F$$

だから

定理 9

$$\frac{\sqrt{2}^{r_2}(r_1+r_2-1)!}{\sqrt{n}\left(\log\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2}\sqrt{|\Delta_F|}\right\}\right)^{r_1+r_2-1}} \leqq \frac{\sharp\mathrm{Red}_F}{\omega_{\mathrm{Pic}_F^0}(\mathrm{Pic}_F^0)} < \frac{2^{n+r_2/2}}{w_F\left(\log\frac{4}{3}\right)^{n-1}}\sqrt{\frac{r_1+\pi r_2}{n}}$$

とくに F が総実 $n = r_1$ ならば

$$\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}(\log\sqrt{|\Delta_F|})^{n-1}} \leqq \frac{\sharp\mathrm{Red}_F}{\omega_{\mathrm{Pic}_F^0}(\mathrm{Pic}_F^0)} \leqq \left(\frac{2}{\log(4/3)}\right)^{n-1}$$

References

[K] A. Koldobsky, Fourier Analysis in Convex Geometry, Amer. Math. Soc. 2005.

[S] R. Schoof, Computing Arakelov class groups, to appear in Surveys in Algorithmic Number Theory, Cambridge University Press.

[V] J. D. Vaaler, A geometric inequality with applications to linear forms, Pacific J. Math. **83** (1979) 543 - 553.