

# 代数群の分類\*

渡部 隆夫

代数閉体上の単純代数群はそれに対応する既約ルート系と基本群により完全に分類することができる. とくに単連結なものに限れば, 単純代数群は4つの無限系列と5つの例外群からなることはよく知られている. 代数閉体とは限らない一般の体  $F$  における代数群の分類についてはどうだろうか. 代数閉体上の分類を基にすれば, これは代数閉体上で与えられた代数群にどれだけ  $F$ -構造が入るのかを分類することと同値である. 一般的な原理として, ある代数的対象の  $F$ -構造の分類は適当なガロワコホモロジーにより記述することができる. 今の場合, 代数閉体上の代数群  $G$  が与えられたとき,  $G$  の  $F$ -構造はその自己同型群に値を取るガロワコホモロジー  $H^1(F, \text{Aut}(G))$  により分類されることが容易に分かる. このことから,  $F$  上の単連結単純代数群の  $F$ -同型類の分類は, 4つの無限系列または5つの例外群のおおのこの  $G$  に対して,  $H^1(F, \text{Aut}(G))$  を調べることに帰着する.

他方, 単に  $H^1(F, \text{Aut}(G))$  を計算しただけでは, 各  $[z] \in H^1(F, \text{Aut}(G))$  に対応している  $F$ -代数群  $G_z$  の構造までは分からない. そこで  $F$ -代数群の構造的な要素から分類をする方法として, 佐武および Tits によりそれぞれ独立に考えられた  $\Gamma$ -ダイアグラムまたは Tits-指数とよばれるものを用いる方法がある. 以下このノートでは  $\Gamma$ -ダイアグラムまたは Tits-指数のことを佐武-Tits 図形と呼ぶことにする. 佐武-Tits 図形そのものは代数群の分類とは無関係に定義できる. それは既約ルート系の単純ルート系  $\Delta$  とその部分集合  $\Delta_0$  および  $\Delta$  に対応するディンキン図形  $\mathcal{D}_\Delta$  の自己同型群  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  の部分群  $A$  からなる三つ組  $(\Delta, \Delta_0, A)$  (より正確にはこれの合同類) のことで, 要請される条件は  $\Delta_0$  が  $A$  の作用で不変になるということである. 図形としてはディンキン図形上  $\Delta_0$  に含まれる頂点を黒丸で, それ以外の頂点を白丸で記述し,  $A$  の作用は互いにうつりあう頂点を矢印で結ぶ(あるいは線で囲む)と表示される. さて, 単純  $F$ -代数群  $G$  が与えられると, その絶対ルート系への絶対ガロワ群の作用から自然に佐武-Tits 図形  $\mathcal{S}_{I(G)}$  が構成される. このように群から導かれる佐武-Tits 図形を実現可能であるという. 逆に次の2段階により  $F$  上の単純代数群の粗い分類を得ることができる.

(ステップ 1) 与えられた既約単純ルート系  $\Delta$  に対して,  $\text{Hom}(\text{Gal}(\bar{F}/F), \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta))$  を記述する.

(ステップ 2)  $\tau \in \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{F}/F), \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta))$  が固定されたとき,  $A = \tau(\text{Gal}(\bar{F}/F))$  とおいて, 佐武-Tits 図形  $(\Delta, \Delta_0, A)$  で実現可能なものをすべて決定する.

最初のステップは  $F$  上の半分裂単純代数群の分類と同値である. この2つのステップの実行には, 当然のことながら基礎体  $F$  の性質が深く関与する. しかしながら, ステップ 2 については, 実現可能な佐武-Tits 図形の一般的性質から  $\Delta_0$  の取り方の可能性を基礎体に関係なくある程度限定することができる. 実数体の場合には, 対応  $G \mapsto \mathcal{S}_{I(G)}$  は  $\mathbf{R}$ -同型を法として単射になるので, 単純代数群の  $\mathbf{R}$ -同型類は実現可能な佐武-Tits 図形で完全に分類されることがわかる. また  $p$ -進体の場合も  $A_n$ -型を除けば同じことがいえる. しかし, 代数体の場合にみられるように, 一般に対応  $G \mapsto \mathcal{S}_{I(G)}$  は単射になるとは限らないので, 佐武-Tits 図形だけで完全な分類を得ることは不可能である. その

\*1999 年第7回整数論サマースクール講義ノート / 2021 年 2 月書式変更

ために一般の体  $F$  における  $F$ -同型類の分類には, 佐武-Tits 図形のほかに非等方核を付け加えた許容系 (admissible system) とよばれるものを考える必要がある。

これまでに述べたガロワコホモロジーによる分類と佐武-Tits 図形による分類はもちろん無関係ではない。このノートではこれらの間の関係も含めて, 第 I 部では一般の標数 0 の体での分類論を, 第 II 部では実数体,  $p$ -進体, 代数体の場合の分類について解説していく。各セクションの内容は次のとおりである。§1 ではルートデータについて復習する。§2 では  $F$ -型 ( $F$ -form) とガロワコホモロジーの関係について述べる。ここでは §2.5 で証明される, 任意の連結半単純群は半分裂型群の内部  $F$ -型になる, という事実が以下のセクションにおいて基本的になる。また §2.6 で代数群の同型類に対応するコホモロジー不変量を定義するが, これは第 II 部で使用される。§3 では代数群の構造的な要素である  $\Gamma$ -データについて説明する。このセクションの内容は教科書 [B-T], [Sa1], [Sp] による。とくに  $\Gamma$ -データとツイストの関係を説明した §3.3 の内容は [Sp] に従ったもので, 分類を考える際の基本になる。§4 では連結リダクティブ群の許容系による同型定理について解説する。この同型定理は半単純群の場合に佐武 [Sa1] と Tits [T1] により与えられたものであるが, ここではリダクティブ群の場合も含めて定式化した。続く §5 では許容系による代数群の分類が, 単連結単純の場合に帰着されることを証明する。証明はやや長いが議論は標準的なものである。§5 での結果から §6 以降では単連結の場合に限り話を進める。この場合  $\Gamma$ -データはより簡単な  $\Gamma$ -図形で置き換えることができ, さらに許容系もより簡単な基底許容系に置き換えることができる。そこで単連結群の分類は実現可能な基底許容系の分類に帰着される。与えられた基底許容系が実現可能かどうかの幾つかの判定条件が §6.4 で与えられる。とくに §6.4 の最初の定理がこのノートにおけるキーポイントである。この定理は Tits [T1] によるものであるが, ここで与える証明は [Sp] に従った。§6 の残りは実現可能な佐武-Tits 図形の分類に当てられる。古典型の場合この分類は, Weil による, 任意の古典型単純随伴群は対合をもつ中心的単純環の自己同型群として実現される, という定理に基づきなされるが, このノートでは詳細は省略し結果だけを記述した。例外型の場合は §6.4 で導かれる条件によって実現不可能な佐武-Tits 図形を消去していくことにより分類される。ここでの証明は大部分 [Sp] に従ったが, 一部異なるところもある。以上が第 I 部の内容である。第 II 部では, 最初に §7 で実数体上の分類を述べる。実数体上では Cartan の定理から単連結単純代数群の  $\mathbf{R}$ -同型類は実現可能な佐武-Tits 図形と一対一に対応することが分かる。実数体上の実現可能な佐武-Tits 図形の分類については, 荒木 [Ar], 村上 [Mu], 杉浦 [Sa1, Appendix] によりそれぞれ異なる証明が与えられているが, ここではその結果だけを記述した。また §7.4 ではコホモロジー不変量が計算される。§8 では  $p$ -進体上の分類を述べる。まず Kneser の定理と Tate-Poitou の定理から, 与えられた半分裂単純群の内部  $F$ -型の  $F$ -同型類の個数を求めることができる。この個数と §6 の結果から定まる  $F$  上実現可能な佐武-Tits 図形の個数を比較することにより,  ${}^1A_n$ -型を除いて  $F$ -同型類は佐武-Tits 図形と一対一に対応することが示される。 ${}^1A_n$ -型の場合は非等方核まで含めて考える必要がある。 $p$ -進体上の代数群の分類は [Sa1] で与えられているが, その証明はここで述べる方法とは少し異なっている。§8.2 では §8.1 の分類に従ってコホモロジー不変量が計算される。最後に §9 で代数体における分類を解説する。 $F$  上の単連結半分裂単純群  $G_0$  を固定しておく。§9.1 で  $H^1(F, \overline{G}_0)$  が中心  $Z_0$  のコホモロジー  $H^2(F, Z_0)$  と実素点  $v$  でのコホモロジー  $H^1(F_v, \overline{G}_0)$  のファイバー積になることを証明する。これは Sansuc [San] による定理の特殊な場合である。次に §9.2 で  $H^2(F, Z_0)$  を計算し, それをブラウアー群の言葉で書き表す。 $G_0$  の内部  $F$ -型の  $F$ -同型類の分類には,  $H^1(F, \overline{G}_0)$  への外部自己同型群の作用による軌道空間  $\widehat{H}^1(F, \overline{G}_0)$  を調べる必要がある。§9.3 では §9.1 の結果から導かれるハッセ写像

$$\widehat{H}^1(F, \overline{G}_0) \longrightarrow \prod_{v \in V} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \times_{h_\infty^2 \times \delta_\infty} \prod_{v \in V_{\infty, 1}} \widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0)$$

の像とファイバーについて調べる. 一般にはこの写像は単射にはならない. これが代数群の  $F$ -同型類ではハッセ原理が成り立たない理由である. ファイバーは有限集合であるが, それが丁度局所同型類と  $F$ -同型類の差を与える. また像を決めることは, 局所的なデータ (今の場合はコホモロジー不変量) の間にどのような整合性があれば, そのデータを持つ  $F$  上の代数群の存在がいえるかを明らかにすることと同じである. この意味で, 代数体上の分類は, 要求される整合性をもった局所的なデータをパラメーターにもつ分類, として与えられる. §9.4 で代数体上実現可能な佐武-Tits 図形の分類を与える. これは Harder の定理により, 局所体上で実現可能な佐武-Tits 図形の“合成”により求められる. §9 の内容の大部分は [Sa2] によるものである.

以上がこのノートの内容であるが, 各単純群あるいはそのリー環の具体的な実現方法については, 本報告集の村瀬篤氏と伊吹山知義氏の論説で解説されている.

このノートをまとめるにあたり, 佐武先生には何度か話を聞いていただき, 助言を賜りました. また森下昌紀さんにはガロワコホモロジーの結果について教えていただき, 高瀬幸一さんには前のバージョンにあったいくつかのミスプリントを指摘して頂きました. ここに感謝申し上げます.

# 目次

第 I 部 代数群の分類の一般論	6
1 基底ルートデータと連結分裂リダクティブ群の存在	6
1.1 基底ルートデータ	6
1.2 ウェイト格子とルート格子	6
1.3 連結分裂リダクティブ群の基底ルートデータ	7
1.4 連結分裂リダクティブ群の同型定理と存在定理	7
2 $F$ -型とツイスト	9
2.1 $F$ -型	9
2.2 ツイスト	9
2.3 連結分裂リダクティブ群のツイスト	9
2.4 連結半単純群の自己同型群	10
2.5 内部 $F$ -型と外部 $F$ -型	11
2.6 内部 $F$ -型のコホモロジー不変量	12
2.7 単連結群と随伴群	15
3 代数群の $\Gamma$ -データ	17
3.1 $\Gamma$ -データ	17
3.2 連結リダクティブ群の $\Gamma$ -データ	17
3.3 半単純群の $\Gamma$ -データとツイスト	21
4 同型定理	23
4.1 許容系	23
4.2 連結リダクティブ群の許容系	23
4.3 同型定理	24
5 許容系の実現可能性	26
5.1 許容系の実現	26
5.2 半単純の場合への帰着	26
5.3 単連結の場合への帰着	26
5.4 $F$ -単純の場合への帰着	27
5.5 $\bar{F}$ -単純の場合への帰着	28
6 単連結群の基底許容系	30
6.1 単連結代数群	30
6.2 基底許容系	31

6.3	単連結群の同型定理 . . . . .	31
6.4	基底許容系の実現可能性 . . . . .	32
6.5	佐武-Tits 図形 . . . . .	34
6.6	古典型佐武-Tits 図形の分類 . . . . .	36
6.7	例外型佐武-Tits 図形の分類 . . . . .	39
<b>第 II 部 代数体上の代数群の分類</b>		<b>52</b>
7	アルキメデス局所体上の単連結半単純群の分類	53
7.1	$\mathbf{R}$ 上の同型定理 . . . . .	53
7.2	$\mathbf{R}$ -同型類の分類 . . . . .	53
7.3	内部 $\mathbf{R}$ -同型類の分類 . . . . .	54
7.4	コホモロジー不変量の計算 . . . . .	56
8	非アルキメデス局所体上の単連結半単純群の分類	58
8.1	$F$ -同型類の分類 . . . . .	58
8.2	コホモロジー不変量の計算 . . . . .	61
9	代数体上の単連結半単純群の分類	65
9.1	ガロワコホモロジーのハッセ原理 . . . . .	65
9.2	コホモロジーの計算 . . . . .	67
9.3	$F$ -同型類の記述 . . . . .	70
9.4	代数体上の佐武-Tits 図形 . . . . .	73

## 第I部

# 代数群の分類の一般論

### 記号

$F$  を標数0の体とし,  $\bar{F}$  は  $F$  の代数閉包,  $\Gamma = \text{Gal}(\bar{F}/F)$  は絶対ガロワ群とする. 任意のトーラス  $A$  に対して, その有理指標群を  $X(A)$  で, また有理余指標群を  $X^\vee(A)$  で表す. 即ち  $X(A) = \text{Hom}(A, \mathbf{G}_m)$ ,  $X^\vee(A) = \text{Hom}(\mathbf{G}_m, A)$  である.  $X(A)$  と  $X^\vee(A)$  の間には自然なペアリング

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X(A) \times X^\vee(A) \rightarrow \mathbf{Z}$$

がある.  $A$  が  $F$ -トーラスならば, 絶対ガロワ群は  $X(A)$  に

$$\gamma \cdot \chi(a) = \chi(\gamma^{-1}a), \quad (\gamma \in \Gamma, \chi \in X(A), a \in A(\bar{F}))$$

で作用する. ふたつのトーラスの間の準同型  $\varphi : A \rightarrow A'$  から導かれる指標群の準同型と余指標群の準同型をそれぞれ

$$\varphi^* : X(A') \rightarrow X(A) : \chi \mapsto \chi \circ \varphi, \quad \varphi^\vee : X^\vee(A) \rightarrow X^\vee(A') : \chi^\vee \mapsto \varphi \circ \chi^\vee$$

で表す.  $\varphi$  が同型のとき,  $\varphi^\sharp = (\varphi^{-1})^* : X(A) \rightarrow X(A')$  とおく.

## 1 基底ルートデータと連結分裂リダクティブ群の存在

このセクションでは, 連結分裂リダクティブ  $F$ -代数群の同型類と基底ルートデータの同型類が1対1に対応することを見る.

### 1.1 基底ルートデータ

まず基底ルートデータを定義する. 一つのルートデータ  $\Psi = (X, R, X^\vee, R^\vee)$  をとる.  $\Delta$  は  $R$  の一つの単純ルートの集合とし, 対応するコルートの集合を  $\Delta^\vee$  とする. このとき4つ組  $\Psi_b = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$  を **基底ルートデータ (based root datum)** という. さらに  $\Delta$  が  $\mathbf{Q}$ -ベクトル空間  $X_{\mathbf{Q}} = X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  の基底になっている場合,  $\Psi_b$  は半単純基底ルートデータとよいう. ふたつの基底ルートデータ  $\Psi_b$  と  $\Psi'_b = (X', \Delta', (X')^\vee, (\Delta')^\vee)$  の間の同型写像  $f : \Psi'_b \rightarrow \Psi_b$  は, 加群の同型写像  $f : X' \rightarrow X$  で  $f(\Delta') = \Delta, f^\vee(\Delta'^\vee) = (\Delta^\vee)^\vee$  を満たすものと定義する.

### 1.2 ウェイト格子とルート格子

与えられた半単純基底ルートデータ  $\Psi_b = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$  から, 単連結および随伴型の基底ルートデータを構成する. 自然なペアリング  $X \otimes X^\vee \rightarrow \mathbf{Z}$  は  $\mathbf{Q}$ -ベクトル空間  $X_{\mathbf{Q}}$  と  $X_{\mathbf{Q}}^\vee$  の間の  $\mathbf{Q}$ -双線形なペアリングに延長できる. これにより各  $\alpha \in \Delta$  に対して, 基本ウェイト  $\omega_\alpha \in X_{\mathbf{Q}}$  を

$$\langle \omega_\alpha, \beta^\vee \rangle = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

で定める.  $\{\omega_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$  は  $X_{\mathbb{Q}}$  の基底になる.  $X_{\mathbb{Q}}$  中のふたつの  $\mathbb{Z}$ -加群  $\widetilde{X}$  と  $\overline{X}$  を

$$\widetilde{X} := \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}\omega_\alpha, \quad \overline{X} := \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}\alpha$$

で与える.  $\widetilde{X}$  はウェイト格子とよばれ,  $\overline{X}$  はルート格子とよばれる. これらは明らかな包含関係  $\overline{X} \subset X \subset \widetilde{X}$  をもつ. 同様に  $\Delta$  に対する  $X_{\mathbb{Q}}^\vee$  中の双対基底  $\{\omega_{\alpha^\vee} \mid \alpha^\vee \in \Delta^\vee\}$  を基本コウェイトという.  $X_{\mathbb{Q}}^\vee$  中の  $\mathbb{Z}$ -加群

$$\widetilde{X}^\vee := \sum_{\alpha^\vee \in \Delta^\vee} \mathbb{Z}\omega_{\alpha^\vee}, \quad \overline{X}^\vee := \sum_{\alpha^\vee \in \Delta^\vee} \mathbb{Z}\alpha^\vee$$

をそれぞれコウェイト格子, コルート格子という. これについても明らかな包含関係  $\overline{X}^\vee \subset X^\vee \subset \widetilde{X}^\vee$  がある. 構成の仕方から

$$\widetilde{\Psi}_b := (\widetilde{X}, \Delta, \widetilde{X}^\vee, \Delta^\vee), \quad \overline{\Psi}_b := (\overline{X}, \Delta, \overline{X}^\vee, \Delta^\vee)$$

は共に基底ルートデータになることがわかる. これらをそれぞれ  $\Psi_b$  から構成された単連結基底ルートデータ, 随伴型基底ルートデータとよぶことにする.

### 1.3 連結分裂リダクティブ群の基底ルートデータ

$G$  を連結分裂リダクティブ  $F$ -代数群とする.  $T$  を極大  $F$ -分裂トーラスとして  $B$  は  $T$  を含む  $F$ -ボレル部分群とする.  $(G, T)$  に関するルート系を  $R$ , コルート系を  $R^\vee$  とすれば  $\Psi(G, T; F) := (X(T), R, X^\vee(T), R^\vee)$  はルートデータになる.  $B$  に対応する  $R$  の単純ルート系を  $\Delta$ , 単純コルート系を  $\Delta^\vee$  とすれば

$$\Psi_b(G, B, T; F) := (X(T), \Delta, X^\vee(T), \Delta^\vee)$$

は基底ルートデータを成す.

#### 補題

各  $\alpha \in R$  に対応する一径数部分群  $u_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$  で次を充たすものが取れる.

- (a)  $u_\alpha$  は  $F$  上定義される.
- (b)  $n_\alpha = u_\alpha(1)u_{-\alpha}(-1)u_\alpha(1)$  は  $T$  の正規化群  $N_G(T)$  に属し, 絶対ワイル群  $N_G(T)/T$  への像は  $\alpha$  に対応する鏡映になる.
- (c) 任意の  $x \in \overline{F}$  に対して  $u_\alpha(x)u_{-\alpha}(-x^{-1})u_\alpha(x) = \alpha^\vee(x)n_\alpha$  となる.

上の補題の条件を充たす  $\{u_\alpha\}$  を  $R$  の実現という.

### 1.4 連結分裂リダクティブ群の同型定理と存在定理

次の定理は  $\overline{F}$  上の同型定理, 存在定理と同様の論法で証明される.

定理 (分裂群の同型定理)

$G$  と  $G'$  は連結分裂リダクティブ  $F$ -代数群とする. 対応する基底ルートデータの間と同型

$$f : \Psi_b(G', B', T'; F) \rightarrow \Psi_b(G, B, T; F)$$

があれば,  $F$ -同型写像  $\varphi : G \rightarrow G'$  で  $\varphi(T) = T'$ ,  $\varphi(B) = B'$  かつ  $\varphi^* = f$  となるものが存在する.  $\varphi' : G \rightarrow G'$  が同じ性質を持つもう一つの  $F$ -同型写像ならば, ある  $t \in \{t \in T \mid \text{任意の } \alpha \in \Delta \text{ で } \alpha(t) \in F\}$  により  $\varphi' = \varphi \circ \text{inn}(t)$  とかける.

定理 (分裂群の存在定理)

$\Psi_b$  を基底ルートデータとすれば, 連結分裂リダクティブ  $F$ -代数群  $G$  とその極大  $F$ -分裂トラス  $T$ ,  $F$ -ボレル部分群  $B$  で  $\Psi_b = \Psi_b(G, B, T; F)$  となるものが存在する.



## 2 F-型とツイスト

このセクションでは, まず  $F$ -型を定義し, 代数群の  $F$ -型は, その自己同型群に値を取るガロワコホモロジー類によるツイストで分類できることを説明する. さらに任意の連結リダクティブ  $F$ -代数群は半分裂代数群の内部  $F$ -型となることを示す. また連結リダクティブ  $F$ -代数群に対応するコホモロジー不変量を構成する. この不変量は第 II 部において主要な役割を果たす.

### 2.1 $F$ -型

$G$  を  $F$ -代数群とする.  $F$  上定義された代数群で  $\bar{F}$  上  $G$  と同型になるものを  $G$  の  $F$ -型 ( $F$ -form) という.

### 2.2 ツイスト

$F$ -代数群  $G$  の  $\bar{F}$ -自己同型群  $\text{Aut}(G)$  に値を取るガロワコホモロジー集合を  $H^1(F, \text{Aut}(G))$  とする. コサイクル  $z \in Z^1(F, \text{Aut}(G))$  のコホモロジー類を  $[z]$  で表す.  $\Gamma$  の  $G$  への作用の  $z$  によるツイストを

$$\gamma * g := z(\gamma)(\gamma \cdot g), \quad (\gamma \in \Gamma, g \in G(\bar{F}))$$

で定義する. この作用により  $G$  に  $F$ -構造を入れて  $F$  上定義された代数群とみたものを  $G_z$  で表し,  $G$  の  $z$  によるツイストとよぶ.  $G_z$  は  $F$ -同型を除けば  $z$  のコホモロジー類にのみ依存するので, これは全単射

$$H^1(F, \text{Aut}(G)) \rightarrow \{G \text{ の } F\text{-型の } F\text{-同型類}\} : [z] \mapsto [G_z]$$

を引き起こす. この逆写像は次のように構成される.  $G'$  を  $G$  の  $F$ -型として  $\bar{F}$ -同型写像  $\varphi : G' \rightarrow G$  をとる. このとき

$$\Gamma \rightarrow \text{Aut}(G) : \gamma \rightarrow \varphi \circ (\gamma \varphi^{-1})$$

は 1-コサイクルを与える. これを  $\eta_G(G', \varphi)$  で表す. このコホモロジー類  $[\eta_G(G', \varphi)]$  は  $\varphi$  の取り方に依存しないので, これを  $\eta_G(G')$  で表す. 対応  $G' \rightarrow \eta_G(G')$  が逆写像を導くことは容易に確かめられる.

### 2.3 連結分裂リダクティブ群のツイスト

$G$  を連結リダクティブ  $F$ -代数群とする.  $G$  の極大  $F$ -トーラス  $T$  と  $T$  を含む  $\bar{F}$ -ボレル部分群  $B$  をとれば  $\bar{F}$ -代数群としての基底ルートデータ  $\Psi_b(G, B, T; \bar{F})$  が得られる. 存在定理から連結分裂リダクティブ  $F$ -代数群  $G^s$  とその極大  $F$ -分裂トーラス  $T^s$ ,  $F$ -ボレル部分群  $B^s$  が存在して

$$\Psi_b(G, B, T; \bar{F}) = \Psi_b(G^s, B^s, T^s; F)$$

となる. このとき  $G$  は  $G^s$  の  $F$ -型になるから, ある  $[z] \in H^1(F, \text{Aut}(G^s))$  による  $G^s$  のツイスト  $G_z^s$  と  $F$ -同型になる.

## 2.4 連結半単純群の自己同型群

$G^s$  を連結分裂半単純  $F$ -代数群として, その基底ルートデータを

$$\Psi_b(G^s, B^s, T^s; F) = (X(T^s), \Delta, X^\vee(T^s), \Delta^\vee)$$

とする. ルート系の実現  $\{u_\alpha\}$  を固定しておく. 単純ルート系  $\Delta$  に対応するディンキン図形を  $\mathcal{D}_\Delta$  とし,  $\mathcal{D}_\Delta$  の自己同型群を  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  で表す. 各既約ルート系について  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  は次の様になる.

$$\begin{array}{ccccccc} A_n (n \geq 2) & D_{2n} (n \geq 3) & D_{2n+1} (n \geq 2) & D_4 & E_6 & \text{その他} \\ \mathfrak{S}_2 & \mathfrak{S}_2 & \mathfrak{S}_2 & \mathfrak{S}_3 & \mathfrak{S}_2 & \text{自明} \end{array}$$

ここで  $\mathfrak{S}_n$  は  $n$  文字の対称群を表す. とくに  $A_n, D_{2n+1}, E_6$  型は反転対合 (**opposition involution**) をもつ. 反転対合の定義は §6.4 で与える. 一般に  $\Delta$  が互いに異なる既約ルート系  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  の直和

$$\Delta = \bigsqcup_{i=1}^k \Delta_i^{\oplus n_i}, \quad (n_i \text{ は } \Delta_i \text{ の重複度})$$

に分解するならば,  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  は

$$\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) \cong \prod_{i=1}^k (\text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta_i})^{n_i} \rtimes \mathfrak{S}_{n_i})$$

となる. さて  $\text{Aut}(G^s)$  の部分群  $\text{Aut}(G^s, B^s, T^s)$  を

$$\text{Aut}(G^s, B^s, T^s) := \{\sigma \in \text{Aut}(G^s) \mid \sigma(B^s) = B^s, \sigma(T^s) = T^s\}$$

で定めれば, 各  $\sigma \in \text{Aut}(G^s, B^s, T^s)$  は  $\mathcal{D}_\Delta$  の自己同型を引き起こす. 即ち写像

$$\text{Aut}(G^s, B^s, T^s) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) \tag{2.4.1}$$

が存在する. この像を  $\text{Aut}(G^s, \mathcal{D}_\Delta)$  で表す. 一般にこの写像は全射にはならないが,  $G^s$  が単連結または随伴型ならば  $\text{Aut}(G^s, \mathcal{D}_\Delta) = \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  となる.

### 補題

任意の  $\bar{\sigma} \in \text{Aut}(G^s, \mathcal{D}_\Delta)$  に対して,  $G^s$  の  $F$ -自己同型写像  $\sigma \in \text{Aut}(G^s, B^s, T^s)$  で

$$\sigma(u_\alpha(x)) = u_{\bar{\sigma}(\alpha)}(x), \quad (x \in \bar{F}, \alpha \in \Delta)$$

となるものが唯一つ存在する. 対応  $\bar{\sigma} \mapsto \sigma$  は準同型である.

補題の証明は分裂群の同型定理から従う.  $F$ -自己同型  $\sigma$  の成す群を  $\text{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta)$  で表す. いま  $G^s$  の中心を  $Z^s$  として,  $\bar{G}^s = G^s/Z^s$  とおく.  $G^s$  の内部自己同型群  $\text{Inn}(G^s)$  は自然に  $\bar{G}^s$  と同一視できる. そこで  $F$ -代数群  $\mathbf{A}_{G^s}$  を

$$\mathbf{A}_{G^s}(F) := \bar{G}^s(F) \rtimes \text{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta), \quad (x, \sigma)(y, \tau) = (x\sigma(y), \sigma\tau)$$

で定義する. 写像 (2.4.1) の核が  $\text{Aut}(G^s, B^s, T^s) \cap \text{Inn}(G^s) \cong T^s/Z^s$  となることから, 次は容易に示せる.

定理

$\mathbf{A}_{G^s}(\bar{F}) = \mathbf{Aut}(G^s)$  である. また  $\mathbf{A}_{G^s}(F)$  は  $G^s$  の  $F$ -自己同型群である.

$G$  を  $G^s$  の  $F$ -型として,  $G = G_z^s$  となる  $[z] \in H^1(F, \mathbf{Aut}(G^s))$  をとる. 定理から

$$\mathbf{Aut}(G) = \mathbf{A}_{G^s}(\bar{F}) = \mathbf{Inn}(G) \rtimes \mathbf{Aut}_{\bar{F}}(G, \mathcal{D}_\Delta)$$

である. さて  $z$  による  $\mathbf{A}_{G^s}(\bar{F})$  への  $\Gamma$  の作用のツイストを次で定義する.

$$\gamma * \sigma = z(\gamma)(\gamma \cdot \sigma)z(\gamma)^{-1}, \quad (\gamma \in \Gamma, \sigma \in \mathbf{A}_{G^s}(\bar{F}))$$

この作用により  $\mathbf{A}_{G^s}$  に  $F$ -構造を入れ  $F$ -代数群とみたものを  $(\mathbf{A}_{G^s})_z$  で表す. このとき  $(\mathbf{A}_{G^s})_z(F)$  は  $G = G_z^s$  の  $F$ -自己同型群を与える. 一般に連結リダクティブ代数群の自己同型群は代数群にはならない. 例えばトーラスなどはその場合に当てはまる.

## 2.5 内部 $F$ -型と外部 $F$ -型

$G^s$  は §2.4 と同じものとする.  $\mathbf{Aut}(G^s) = \mathbf{Inn}(G^s) \rtimes \mathbf{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta)$  からコホモロジー集合の分解完全列

$$H^1(F, \mathbf{Inn}(G^s)) \xrightarrow{i} H^1(F, \mathbf{Aut}(G^s)) \xrightarrow{e} H^1(F, \mathbf{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta)) \longrightarrow 1$$

が従う. 一般に写像  $i$  は単射になるとは限らない. ここに現れるコホモロジーは群ではないので,  $\mathbf{Ker} i = 1$  は単にトリビアル類の逆像  $i^{-1}([1])$  がトリビアル類だけからなることを意味するにすぎない. 写像  $i$  は次の全単射を導く.

$$\mathbf{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^1(F, \mathbf{Inn}(G^s)) \cong \mathbf{Im} i = \mathbf{Ker} e$$

ここで  $\mathbf{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta)$  は  $H^1(F, \mathbf{Inn}(G^s))$  に

$$\sigma(\mathbf{inn}(g_\gamma)) = \mathbf{inn}(\sigma(g_\gamma)), \quad (\sigma \in \mathbf{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta), [\gamma \mapsto \mathbf{inn}(g_\gamma)] \in H^1(F, \mathbf{Inn}(G^s)))$$

で作用しており, 同型の左辺の集合はその軌道空間とする. また  $\Gamma$  の  $\mathbf{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta)$  への作用は自明だから

$$Z^1(F, \mathbf{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta)) = \mathbf{Hom}(\Gamma, \mathbf{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta))$$

であることに注意する. 写像  $e$  は自然な分解をもつので, 以下  $H^1(F, \mathbf{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta))$  を  $H^1(F, \mathbf{Aut}(G))$  の部分集合と同一視する.  $G^s$  の  $F$ -型  $G$  に対応するコホモロジー類を  $\eta_{G^s}(G)$  とする.  $\eta_{G^s}(G) = [z]$  とすれば  $G$  は  $G_z^s$  と  $F$ -同型である.

**定義**  $G$  と  $G'$  を共に  $G^s$  の  $F$ -型とする. このとき  $e(\eta_{G^s}(G)) = e(\eta_{G^s}(G'))$  ならば  $G'$  は  $G$  の内部  $F$ -型であるといい,  $e(\eta_{G^s}(G)) \neq e(\eta_{G^s}(G'))$  ならば  $G'$  は  $G$  の外部  $F$ -型であるという.

定理

(1)  $G'$  が  $G$  の内部  $F$ -型ならば,  $G'$  に対応する  $H^1(F, \text{Aut}(G))$  のコホモロジー類  $\eta_G(G')$  は  $H^1(F, \text{Inn}(G))$  の像に含まれる.  $G'$  を含む  $F$ -同型類を  $[G']$  と表すとき, 対応  $[G'] \mapsto \eta_G(G')$  から定義される写像

$$\{G \text{ の内部 } F\text{-型の } F\text{-同型類}\} \longrightarrow \text{Im}(H^1(F, \text{Inn}(G)) \rightarrow H^1(F, \text{Aut}(G)))$$

は全単射である.

(2)  $[\tau] \in H^1(F, \text{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta))$  による  $G^s$  のツイストを  $G_\tau^s$  で表す. このとき  $G_\tau^s$  は  $F$ -ボレル部分群をもつ.

(3) 任意の連結半単純  $F$ -代数群は半分裂  $F$ -代数群の内部  $F$ -型になる. このとき半分裂  $F$ -代数群は  $F$ -同型を除いて一意に定まる.

証明 (1)  $[z] = \eta_{G^s}(G)$  とおく. 次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, \text{Inn}(G)) & \xrightarrow{i_G} & H^1(F, \text{Aut}(G)) & \xrightarrow{\epsilon_G} & H^1(F, \text{Aut}_F(G, \mathcal{D}_\Delta)) \\ \downarrow & & \downarrow j_z & & j'_z \downarrow \\ H^1(F, \text{Inn}(G^s)) & \xrightarrow{i} & H^1(F, \text{Aut}(G^s)) & \xrightarrow{\epsilon} & H^1(F, \text{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta)) \end{array}$$

ここで  $j_z, j'_z$  は全単射で, トリビアル類  $[1], \epsilon_G([1])$  をそれぞれ  $[z], \epsilon([z])$  にうつす. 仮定から

$$\epsilon(j_z(\eta_G(G'))) = \epsilon([z]) = j'_z([1])$$

となるから  $\epsilon_G(\eta_G(G')) = [1]$  で  $\eta_G(G') \in \text{Im}(i_G)$  となる. また定義から,  $G$  の内部  $F$ -型の  $F$ -同型類の集合は  $\epsilon^{-1}(\epsilon([z])) = j_z(\text{Im}(i_G))$  と一致する.

(2)  $G^s$  の  $F$ -ボレル部分群  $B^s$  を (2.4) のようにとれば,  $\text{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta)$  の定義から, 各  $\tau(\gamma), (\gamma \in \Gamma)$  は  $B^s$  を不変にする. これは  $B^s$  が  $G_\tau^s$  の中の  $F$ -ボレル部分群であることを意味する.

(3) は (1),(2) から従う. □

定義 連結リダクティブ代数群が  $F$ -ボレル部分群をもつとき, 半分裂型という.

## 2.6 内部 $F$ -型のコホモロジー不変量

以下この節では  $[\tau] \in H^1(F, \text{Aut}(G^s, \mathcal{D}_\Delta))$  を固定し,  $G_0 := G_\tau^s$  を半分裂  $F$ -代数群とする.  $G_0$  の中心を  $Z(G_0)$  として,  $\overline{G}_0 = G_0/Z(G_0)$  とおく. 自然な同型  $\overline{G}_0 \cong \text{Inn}(G_0)$  がある.  $G_0$  の自己同型群は

$$\text{Aut}(G_0) = (\mathbf{A}_{G^s})_\tau(\overline{F}) = \text{Inn}(G_0) \rtimes \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta)$$

と表せる. これから  $G_0$  の  $F$ -自己同型群は

$$(\mathbf{A}_{G^s})_\tau(F) = \overline{G}_0(F) \rtimes \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta)$$

となる. ここで

$$\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) := \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta)^\Gamma = \{\sigma \in \text{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta) \mid \tau(\gamma)\sigma = \sigma\tau(\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma)\}$$

である.  $\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta)$  は  $H^1(F, \text{Inn}(G_0))$  に

$$\sigma(\text{inn}(g_\gamma)) = \text{inn}(\sigma(g_\gamma)), \quad (\sigma \in \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta), [\gamma \mapsto \text{inn}(g_\gamma)] \in H^1(F, \text{Inn}(G_0)))$$

で作用するので, その軌道空間を  $\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^1(F, \text{Inn}(G_0))$  とおく. 自然な可換図式

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, \text{Inn}(G_0)) & \xrightarrow{i_0} & H^1(F, \text{Aut}(G_0)) & \xrightarrow{\epsilon_0} & H^1(F, \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta)) \\ \downarrow & & \downarrow j_0 & & \downarrow j'_0 \\ H^1(F, \text{Inn}(G^s)) & \xrightarrow{i} & H^1(F, \text{Aut}(G^s)) & \xrightarrow{\epsilon} & H^1(F, \text{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta)) \end{array}$$

を考えれば,  $i_0$  と  $j_0$  は次の全単射を導く.

$$\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^1(F, \text{Inn}(G_0)) \cong \text{Im } i_0 = \text{Ker } \epsilon_0 \cong \epsilon^{-1}([\tau])$$

従って §2.5 定理 から全単射

$$\widehat{\eta}_F : \{G_0 \text{ の内部 } F\text{-型の } F\text{-同型類}\} \longrightarrow \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^1(F, \text{Inn}(G_0))$$

がある. さて完全列

$$1 \rightarrow Z(G_0) \rightarrow G_0 \rightarrow \overline{G}_0 \rightarrow 1$$

からコホモロジーの完全列

$$\cdots \longrightarrow H^1(F, G_0) \longrightarrow H^1(F, \overline{G}_0) \xrightarrow{\delta} H^2(F, Z(G_0))$$

が導かれる. ここで  $\delta$  は

$$\delta(z)(\gamma, \gamma') = g_\gamma \cdot \gamma g_{\gamma'} \cdot g_{\gamma'}^{-1}, \quad ([z] = [\gamma \mapsto z(\gamma) = \text{inn}(g_\gamma)] \in H^1(F, \overline{G}_0))$$

で与えられる.  $\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta)$  の  $H^2(F, Z(G_0))$  への作用を

$$\sigma(c)(\gamma, \gamma') = \sigma(c(\gamma, \gamma')), \quad ([c] \in H^2(F, Z(G_0)))$$

で定義すれば,  $\delta$  は軌道空間の間の写像

$$\widehat{\delta} : \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^1(F, \text{Inn}(G_0)) \longrightarrow \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^2(F, Z(G_0))$$

を導く.

定義  $G$  を  $G_0$  の内部  $F$ -型とするとき

$$\widehat{\gamma}_F(G) := \widehat{\delta}(\widehat{\eta}_F(G)) \in \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^2(F, Z(G_0))$$

とおく.

$\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta)$  の軌道空間をとらない場合には  $\overline{F}$ -同型  $G \rightarrow G_0$  を固定する必要がある. 以下この場合を説明する.  $G$  は  $G_0$  の内部  $F$ -型とする. このとき  $\overline{F}$ -同型  $\varphi : G \rightarrow G_0$  で

$$\varphi \circ (\gamma \varphi^{-1}) = \text{inn}(g_\gamma), \quad (\gamma \in \Gamma, g_\gamma \in \overline{G}_0)$$

となるものが取れる.  $G$  とこのような  $\varphi$  のペア  $(G, \varphi)$  を  $G_0$  の内部  $F$ -ペアと呼ぶことにする. この  $(G, \varphi)$  から定まる  $\overline{G_0}$  への 1-コサイクル  $\gamma \mapsto g_\gamma$  のコホモロジー類を  $\eta_F(G, \varphi) \in H^1(F, \overline{G_0})$  とおく. さてふたつの  $G_0$  の内部  $F$ -ペア  $(G, \varphi), (G', \varphi')$  に対して,  $F$ -同型  $\psi : G \rightarrow G'$  で

$$\varphi' \circ \psi \circ \varphi^{-1} \in \text{Inn}(G_0)$$

となるものが存在するとき,  $(G, \varphi)$  と  $(G', \varphi')$  は内部  $F$ -同型であるということにする. 容易に分かるように対応  $(G, \varphi) \rightarrow \eta_F(G, \varphi)$  は全単射

$$\eta_F : \{G_0 \text{ の内部 } F\text{-ペアの内部 } F\text{-同型類}\} \rightarrow H^1(F, \overline{G_0})$$

を与える. また  $\delta : H^1(F, \overline{G_0}) \rightarrow H^2(F, Z(G_0))$  との合成を

$$\gamma_F(G, \varphi) := \delta(\eta_F(G, \varphi))$$

とおく. 次の可換図式がある.

$$\begin{array}{ccc} \{G_0 \text{ の内部 } F\text{-ペアの内部 } F\text{-同型類}\} & \xrightarrow{\eta_F} & H^2(F, Z(G_0)) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \\ \{G_0 \text{ の内部 } F\text{-型の } F\text{-同型類}\} & \xrightarrow{\widehat{\gamma}_F} & \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^2(F, Z(G_0)) \end{array}$$

ここで写像  $p_1$  は  $(G, \varphi) \mapsto G$  から導かれるものである.

#### 補題

$(G, \varphi)$  は  $G_0$  の内部  $F$ -ペアで, 各  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $\varphi \circ (\gamma\varphi^{-1}) = \text{inn}(g_\gamma)$  とする. また  $G$  の  $F$  上定義された外部自己同型群を

$$\text{Aut}_F(G, \mathcal{D}_\Delta) := \text{Aut}_{\overline{F}}(G, \mathcal{D}_\Delta)^\Gamma$$

とおく. このとき

$$\text{Aut}_F(G, \mathcal{D}_\Delta) \cong \{\sigma \in \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \mid \sigma(g_\gamma) = g_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma)\}$$

が成り立つ. これにより  $\text{Aut}_F(G, \mathcal{D}_\Delta)$  を  $\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta)$  の部分群とみなせば,  $G$  の  $F$ -同型類  $[G]$  の  $p_1$  に関するファイバーへの写像

$$\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) / \text{Aut}_F(G, \mathcal{D}_\Delta) \rightarrow p_1^{-1}([G]) : \sigma \text{Aut}_F(G, \mathcal{D}_\Delta) \mapsto [(G, \sigma \circ \varphi)]$$

は全単射になる.

証明 §2.4 の結果から, コサイクル  $z \in H^1(F, \text{Aut}(G^s))$  を  $z(\gamma) = (g_\gamma, \tau)$  ととれば,  $G$  は  $G_z^s$  と  $F$ -同型で,  $G_z^s$  の  $F$ -自己同型群は

$$(\mathbf{A}_{G^s})_z(F) = \overline{G}_z^s(F) \rtimes \text{Aut}_{\overline{F}}(G_z^s, \mathcal{D}_\Delta)^\Gamma$$

となる. ここで

$$\text{Aut}_{\overline{F}}(G_z^s, \mathcal{D}_\Delta)^\Gamma = \{\sigma \in \text{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta) \mid z(\gamma) \circ \sigma = \sigma \circ z(\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma)\}$$

である. これから前半の同型が従う. また後半の全単射も容易である.  $\square$

## 2.7 単連結群と随伴群

このセクションの最後として、連結半単純  $F$ -代数群は  $F$  上定義された単連結被覆をもつことを示す。いま  $G$  は連結半単純  $F$ -代数群として、その基底ルートデータを

$$\Psi_b = \Psi_b(G, B, T; \bar{F}) = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$$

とする。§1.2 から 2 つの基底ルートデータ

$$\tilde{\Psi}_b = (\tilde{X}, \Delta, \tilde{X}^\vee, \Delta^\vee), \quad \bar{\Psi}_b = (\bar{X}, \Delta, \bar{X}^\vee, \Delta^\vee)$$

ができる。自然な単射  $\tilde{f} : X \rightarrow \tilde{X}, \bar{f} : \bar{X} \rightarrow X$  がある。

定理

連結半単純  $F$ -代数群  $\tilde{G}$  と  $\bar{G}$  で次をみたすものが  $F$ -同型を除いてただ一つ存在する。

(a) 中心  $F$ -アイソジェニ  $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G, \psi : G \rightarrow \bar{G}$  が存在する。

(b)  $\tilde{\Psi}_b = \Psi_b(\tilde{G}, \varphi^{-1}(B), \varphi^{-1}(T); F), \bar{\Psi}_b = \Psi_b(\bar{G}, \psi(B), \psi(T); F)$  で、 $\varphi^* = \tilde{f}, \psi^* = \bar{f}$  となる。このとき  $\tilde{G}$  を  $G$  の単連結カバー、 $\bar{G}$  を  $G$  の随伴群という。

証明  $\tilde{G}$  の存在を示す。  $\bar{G}$  についても証明は同様である。連結分裂  $F$ -代数群  $G^s, \tilde{G}^s$  を

$$\Psi_b = (G^s, B^s, T^s; F), \quad \tilde{\Psi}_b = (\tilde{G}^s, \tilde{B}^s, \tilde{T}^s; F)$$

となるようにとる。自然な単射  $\tilde{f} : X = X(T^s) \rightarrow \tilde{X} = X(\tilde{T}^s)$  は  $F$ -分裂トーラスの  $F$ -アイソジェニ  $\varphi_1 : \tilde{T}^s \rightarrow T^s$  を導く。  $\text{Ker } \varphi_1$  は有限群で  $F$  上定義される。  $X(\text{Ker } \varphi_1) = \tilde{X}/X$  から、任意のルートは  $\text{Ker } \varphi$  上トリビアルになる。これは  $\text{Ker } \varphi$  の各要素が一つのルートに対応する  $\tilde{G}^s$  の一径数部分群と可換になることと同じである。従ってブリュアー分解から  $\text{Ker } \varphi_1$  は  $\tilde{G}^s$  の中心に含まれることがわかる。  $\tilde{G}^s/\text{Ker } \varphi_1$  は  $G^s$  と同じルートデータを持つから、同型定理により、 $F$ -同型  $\varphi_2 : \tilde{G}^s/\text{Ker } \varphi_1 \rightarrow G^s$  で、 $\varphi_2(\tilde{B}^s/\text{Ker } \varphi_1) = B^s, \varphi_2(\tilde{T}^s/\text{Ker } \varphi_1) = T^s$  となるものが取れる。そこで  $\varphi : \tilde{G}^s \rightarrow G^s$  を自然な写像  $\tilde{G}^s \rightarrow \tilde{G}^s/\text{Ker } \varphi_1$  と  $\varphi_2$  の合成とすれば、 $\varphi$  は中心  $F$ -アイソジェニで、 $\varphi^* = \tilde{f}$  となる。この  $\varphi$  から導かれる同型  $\text{Inn}(G^s) \cong \text{Inn}(\tilde{G}^s)$  と単射

$$\text{Aut}(G^s, \mathcal{D}_\Delta) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{G}^s, \mathcal{D}_\Delta) = \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$$

から自己同型群の間の単射

$$i_\varphi : \text{Aut}(G^s) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{G}^s)$$

が存在する。さて、 $G = G_z^s$  となる  $[z] \in H^1(F, \text{Aut}(G^s))$  をとり、 $[i_\varphi \circ z] \in H^1(F, \text{Aut}(\tilde{G}^s))$  とおく。これから  $\tilde{G} = \tilde{G}_{i_\varphi \circ z}^s$  とすれば、 $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$  は求める中心  $F$ -アイソジェニを与える。一意性は  $\tilde{G}^s$  の一意性と  $i_\varphi$  の単射性から従う。  $\square$

定義 連結半単純  $F$ -代数群  $G$  に対して、 $\Gamma$ -加群

$$\pi_1(G) := X^\vee(T)/\bar{X}^\vee(T)$$

は  $G$  の代数的基本群とよばれる. 上で示した中心的  $F$ -アイソジェニ  $\varphi : \widetilde{G} \rightarrow G$  に関して,  $\Gamma$ -加群としての同型

$$\pi_1(G) \cong \text{Hom}(\widehat{\mathbf{Z}}(1), \text{Ker}\varphi)$$

がある. ここで  $\widehat{\mathbf{Z}}(1)$  は,  $\mu_n(\overline{F})$  を  $\overline{F}$  中の  $1$  の  $n$  乗根のなす群とするとき, その射影的極限  $\widehat{\mathbf{Z}}(1) := \varprojlim \mu_n(\overline{F})$  である.  $F = \mathbf{C}$  ならば  $\pi_1(G)$  は複素リー群  $G(\mathbf{C})$  の位相的な基本群と群として同型である.



### 3 代数群の $\Gamma$ -データ

ここでは代数群の構造を記述する上でのもととなる  $\Gamma$ -データを定義する. §3.2 補題の性質は分類の判定条件の基本となる. また §2 で述べたツイストと  $\Gamma$ -データとの関係についても解説する.

#### 3.1 $\Gamma$ -データ

$\Gamma$ -データ ( $\Gamma$ -datum, indexed root datum) とは次のような3つ組みのことである.

$${}_i\Psi = (\Psi_b, \Delta_0, \tau)$$

ここで  $\Psi_b = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$  は基底ルートデータで,  $\Delta_0$  は  $\Delta$  の部分集合,  $\tau$  はガロワ群  $\Gamma$  の  $X$  への連続な作用である.  $\Delta$  と  $\Delta_0$  はこの作用で不変とする. またこのとき  $\{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  を  $\Gamma$ -図形 ( $\Gamma$ -diagram, Tits index) という. ふたつの  $\Gamma$ -データ  ${}_i\Psi$  と  ${}_i\Psi' = (\Psi'_b, \Delta'_0, \tau')$  は, 同型写像  $f : \Psi_b \rightarrow \Psi'_b$  で,

$$f(\Delta_0) = \Delta'_0, \quad \tau'(\gamma) = f \circ \tau(\gamma) \circ f^{-1}, \quad (\forall \gamma \in \Gamma)$$

をみたすものが存在するときに同型であるといい, これを  ${}_i\Psi \cong {}_i\Psi'$  で表す.  $\Gamma$ -データ  ${}_i\Psi$  は  $\Delta_0 = \emptyset$  であるとき半分裂型といい,  $\Delta = \Delta_0$  であるとき非等方型という.

#### 3.2 連結リダクティブ群の $\Gamma$ -データ

$G$  は連結リダクティブ  $F$ -代数群として,  $S$  は  $G$  の極大  $F$ -分裂トーラス,  $T$  は  $S$  を含む  $G$  の極大  $F$ -トーラスとする.  $(G, T)$  に関するルートデータを  $(X(T), R, X^\vee(T), R^\vee)$  とし,  $(G, S)$  に関する相対ルートデータを  $(X(S), {}_F R, X^\vee(S), {}_F R^\vee)$  とする. いま  $\pi : X(T) \rightarrow X(S) : \chi \mapsto \chi|_S$  を制限写像として

$$X(T)_0 := \text{Ker } \pi = \{\chi \in X(T) \mid \pi(\chi) = 0\}$$

とおく. このとき

$$R_0 := X(T)_0 \cap R = \{\alpha \in R \mid \pi(\alpha) = 0\}$$

とすれば, これは  $R$  の部分ルート系になる. また

$${}_F R \subset \pi(R) \subset {}_F R \cup \{0\}$$

となることが分かる.  $X(T)$  上の線型順序で

$$0 < \chi \in X(T) - X(T)_0 \implies 0 < \chi' \quad (\chi' \in \chi + X(T)_0)$$

をみたすものを  $X(T)_0$  に適合する線型順序 (**linear order adapted to  $X(T)_0$** ) という. このような線型順序は自然に  $X(T)_0, X(S) = X(T)/X(T)_0$  上の線型順序を誘導する. 逆に  $X(T)_0$  と  $X(S)$  上の線型順序から,  $X(T)$  上  $X(T)_0$  に適合する線型順序で,  $X(T)_0, X(S)$  上では元の線型順序を誘導するようなものがただ一つ構成できる. 以下  $X(T)$  の  $X(T)_0$  に適合する線型順序を一つ固定して, それに関する  $R, R_0, {}_F R$  の正ルート系を  $R^+, R_0^+, {}_F R^+$  とし, 単純ルート系を  $\Delta, \Delta_0, {}_F \Delta$  と表す. このとき

$$\pi(R^+ - R_0^+) = {}_F R^+ \tag{3.2.1}$$

が充たされる.

次に  $X(T)$  へのガロワ群  $\Gamma$  の  $*$ -作用 ( $*$ -action) を定義する.  $R, R_0, {}_F R$  のそれぞれのワイル群を  $W, W_0, W_F$  で表すことにする. 各  $\gamma \in \Gamma$  に対して,  $\gamma(R^+)$  はまた  $R$  の一つの正ルート系を与える. 正ルート系のなす集合に対するワイル群の作用は単純推移的であったから, 絶対ワイル群の要素  $w_\gamma \in W$  で,  $w_\gamma(\gamma(R^+)) = R^+$  となるものがただ一つ取れる. このとき  $\chi \in X(T)$  に対して,  $\gamma \in \Gamma$  の  $*$ -作用を

$$\tau(\gamma)(\chi) := w_\gamma(\gamma\chi)$$

で定める. 定義から  $w_\gamma(\gamma(\Delta)) = \Delta$  であるから,  $\tau$  は  $\Gamma$  からディンキン図形の自己同型群への連続準同型

$$\tau : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$$

を導く.

補題

- (1)  $G$  における  $S$  の中心化群を  $Z_G(S)$  とすれば,  $R_0$  は  $(Z_G(S), T)$  の絶対ルート系である.
- (2) 各  $\gamma \in \Gamma$  について  $w_\gamma \in W_0$  である.
- (3) 任意の  $\chi \in X(T)$  に対して

$$\tau(\gamma)\chi - \gamma\chi \in \sum_{\beta \in \Delta_0} Z\beta$$

である.

- (4)  $\Delta_0, \Delta - \Delta_0$  は共に  $\tau(\Gamma)$ -不変で,  $\pi(\Delta - \Delta_0) = {}_F\Delta$  である.
- (5)  $\Delta - \Delta_0$  の  $\tau(\Gamma)$ -軌道分解は

$$\Delta - \Delta_0 = \bigsqcup_{a \in {}_F\Delta} \pi^{-1}(a) \cap \Delta$$

となる.

- (6)  $\Delta$  が既約ならば  ${}_F\Delta$  も既約である. (ただし  ${}_F\Delta$  は被約とは限らない.) さらにこのとき  $\bar{\alpha} \in R^+$  が  $\Delta$  の最高ルートならば,  $\pi(\bar{\alpha}) \in {}_F R^+$  は  ${}_F\Delta$  の最高ルートである.

証明 (1) は自明である.

(2)  $S$  は  $F$ -分裂トーラスだから  $X(S)$  の要素はすべて  $F$  上定義されている. これから

$$\pi(\gamma\chi) = \gamma\pi(\chi) = \pi(\chi) \quad (\gamma \in \Gamma, \chi \in X(T))$$

となる. これと (3.2.1) より,

$$\gamma(R_0) = R_0, \quad \gamma(R^+ - R_0) = R^+ - R_0$$

が従う.  $w_\gamma \in W_0$  を  $w_\gamma(\gamma R_0^+) = R_0^+$  となるようにとる.  $W_0$  は  $R^+ - R_0$  を不変にするから,

$$w_\gamma(\gamma R^+) = w_\gamma(\gamma(R^+ - R_0^+) \cup \gamma(R_0^+)) = R^+$$

となり,  $w_\gamma\gamma = \tau(\gamma)$  である.

(3)  $s_\beta$  を  $\beta \in \Delta_0$  に対応する鏡映とすれば, 任意の  $\chi \in X(T)$  に対して

$$\chi - s_\beta \chi = \langle \chi, \beta^\vee \rangle \beta \in \mathbf{Z}\beta$$

となる. これを  $w = s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_m} \in W_0$ ,  $(\beta_1, \dots, \beta_m \in \Delta_0)$  に対して繰り返し適用すれば

$$\chi - w\chi \in \sum_{\beta \in \Delta_0} \mathbf{Z}\beta$$

が従う. (2) でみたように,  $w_\gamma \in W_0$  であったから

$$\tau(\gamma) - \gamma\chi = w_\gamma \gamma\chi - \gamma\chi \in \sum_{\beta \in \Delta_0} \mathbf{Z}\beta$$

となる.

(4)  $\Delta_0$  が  $\tau(\Gamma)$ -不変であることは (2) の証明からわかる. 任意の  $a \in {}_F R^+$  に対して,  $\pi(\alpha) = a$  となる  $\alpha \in R^+$  が取れる.  $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} c_{\alpha, \beta} \beta$  と表すとき,

$$a = \pi(\alpha) = \sum_{\beta \in \Delta - \Delta_0} c_{\alpha, \beta} \pi(\beta)$$

となるから,  $a$  は  $\pi(\Delta - \Delta_0)$  の要素の一次結合で表せる. これは  $\pi(\Delta - \Delta_0) = {}_F \Delta$  を示す.

(5)  $R$  の  $\bar{F}$  上の実現  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in R}$  を固定して,  $U_\alpha = \text{Im} u_\alpha$  とおく. 任意の部分集合  $\theta \subset \Delta$  に対して

$$T_\theta := \left( \bigcap_{\alpha \in \theta} \text{Ker } \alpha \right)^0, \quad P_\theta := Z_G(T_\theta) \prod_{\beta \in \Delta - \langle \theta \rangle} U_\beta$$

とする. ここで  $\langle \theta \rangle$  は  $\theta$  の要素の一次結合で表せる  $R$  の要素全体を表す.  $P_\theta$  は  $Z_G(T_\theta)$  をレビ部分群とする標準パラボリック部分群で,  $(Z_G(T_\theta), T)$  のルート系は  $\langle \theta \rangle$  になる.  $\tau$  の定義から

$$\gamma P_\theta = w_\gamma^{-1} P_{\tau(\gamma)(\theta)} w_\gamma, \quad (\gamma \in \Gamma)$$

がわかる. このことからとくに  $\theta$  が  $\tau(\Gamma)$ -不変でかつ  $\langle \theta \rangle$  と  $\Delta - \langle \theta \rangle$  が  $W_0$ -不変ならば,  $P_\theta$  は標準  $F$ -パラボリック部分群になることがわかる. さて  $\alpha \in \Delta - \Delta_0$  をとり  $\pi(\alpha) = a \in {}_F \Delta$  として,  $\Delta$  の部分集合  $\theta$  と  $\theta'$  を

$$\theta := \tau(\Gamma)\alpha \cup \Delta_0, \quad \theta' := (\pi^{-1}(a) \cap \Delta) \cup \Delta_0$$

ととる. (3) の証明からわかるように  $\langle \theta \rangle, \langle \theta' \rangle$  は共に  $W_0$ -不変である. また (4) から  $\theta$  と  $\theta'$  は  $\tau(\Gamma)$ -不変でもある. 従って上で述べたことから  $P_\theta, P_{\theta'}$  は共に標準  $F$ -パラボリック部分群である.  $S$  の部分  $F$ -トーラス  $S_a = (\text{Ker } a)^0$  をとれば,  $\theta$  の取り方から  $S_a \subset T_\theta$  となるので,  $Z_G(T_\theta) \subset Z_G(S_a)$  である. これから標準  $F$ -パラボリック部分群の間の包含関係

$$P_{\Delta_0} \subset P_\theta \subset Z_G(S_a) P_{\Delta_0}$$

がえられる.  $P_{\Delta_0}$  と  $Z_G(S_a) P_{\Delta_0}$  の間に真に挟まれる標準  $F$ -パラボリック部分群は存在しないから,  $P_\theta = Z_G(S_a) P_{\Delta_0}$  が従う.  $P_{\theta'}$  も  $P_\theta$  と同じ性質を持つから, 結局  $P_\theta = P_{\theta'} = Z_G(S_a) P_{\Delta_0}$  となる. よって  $\theta = \theta'$  でなければならない.

(6) 被約単純ルート系  $\Delta$  は次の性質をみたす正ルート  $\tilde{\alpha} \in R^+$  を少なくとも一つはもつ.

$$\langle \tilde{\alpha}, \beta^\vee \rangle \geq 0 \quad (\beta \in \Delta)$$

この  $\tilde{\alpha}$  を最高ルートという. 最高ルートは丁度  $\Delta$  の既約成分の個数だけあり, とくに  $\Delta$  が既約ならば最高ルートはただ一つしかなく, 逆に最高ルートがただ一つしかなければ  $\Delta$  は既約になる. 被約でないルート系についても同様である. ただしこの場合は最高ルートは上の不等式だけでは特徴付けられない. 即ち被約でない既約ルート系 ( $BC_n$ -型ルート系) の場合は, 上の不等式をみたす正ルートは2つ存在するが, この2つのうちで線型順序が大きいほうが最高ルートになる. いま  $\Delta$  は既約であると仮定する. このとき任意の  $\alpha \in R^+ - \{\tilde{\alpha}\}$  は上の不等式をみたし得ないから, ある  $\beta \in \Delta$  によって  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle < 0$  でなければならない. これから

$$s_\beta \alpha = \alpha + m\beta, \quad m = -\langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0$$

となるから,  $s_\beta \alpha$  は正ルートで  $s_\beta \alpha > \alpha$  をみたす. これを続けていけば最後は必ず最高ルートで終わる列

$$\alpha = \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\ell = \tilde{\alpha}$$

ができる. さて  $a \in R^+_F$  を  ${}_F\Delta$  の最高ルートの一つとして,  $\alpha \in \pi^{-1}(a)$  をとる. (3.2.1) より  $\alpha \in R^+$  である. この  $\alpha$  について上の列を考えて, それを  $\pi$  でうつせば

$$a = \pi(\alpha) \leq \pi(\alpha_2) \leq \cdots \leq \pi(\tilde{\alpha})$$

という列ができる.  $a$  は最高ルートであったから, これから  $a = \pi(\tilde{\alpha})$  が従う. よって  $\pi(\tilde{\alpha})$  は最高ルートで,  ${}_F\Delta$  の最高ルートはこれだけであるから  ${}_F\Delta$  も既約である.  $\square$

**定義** 上の記号のもとで,

$${}_i\Psi(G) := (X(T), \Delta, X^\vee(T), \Delta^\vee, \Delta_0, \tau)$$

を  $G$  の  $F, S, T$  に関する  $\Gamma$ -データという. また  $\{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  を  $G$  の  $F, S, T$  に関する  $\Gamma$ -図形という.  ${}_i\Psi(G)$  の同型類は  $S, T$  には依存しない.  ${}_i\Psi(G)$  が半分裂型, 非等方型であるかに従って  $G$  もそれぞれ半分裂型, 非等方型とよばれる.

**注意** 相対ルート系  ${}_F\Delta$  は  $\Gamma$ -図形  $\{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  から求めることができる. 実際次のことが成り立つ. いま  $X(T)_R := X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$  に  $W$ -不変かつ  $\tau(\Gamma)$ -不変な内積  $(\cdot, \cdot)$  を入れて,  $X(T)_R$  と  $X^\vee(T)_R$  を同一視する. とくに  $\alpha$  に対応するコルート  $\alpha^\vee$  は

$$\alpha^\vee = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

で与えられるものとする. また  $X(S)_R$  と  $X(T)_0$  の  $X(T)_R$  での直交補空間を同一視することにより,  $X(S)_R$  を  $X(T)_R$  の部分空間とみなす. これにより相対ルート  $a, b \in {}_F R$  に対しても内積  $(a, b)$  が定義できる. そこで

$$m_{\alpha, \beta} = (\alpha, \beta), \quad m_{a, b} = (a, b), \quad (\alpha, \beta \in \Delta, \quad a, b \in {}_F\Delta)$$

とにおいて, これらを成分にもつ行列を  $M = (m_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in \Delta}$ ,  $M_F = (m_{a, b})_{a, b \in {}_F\Delta}$  とする. このとき

(1)  $M, M_F$  の逆行列をそれぞれ

$$M^{-1} = (c_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in \Delta}, \quad M_F^{-1} = (c_{a, b})_{a, b \in {}_F\Delta}$$

とすとき

$$c_{a,b} = \sum_{\alpha \in \pi^{-1}(a) \cap \Delta} \sum_{\beta \in \pi^{-1}(b) \cap \Delta} c_{\alpha,\beta}$$

が成り立つ.

(2) 各  $a \in {}_F\Delta$  に対して

$$\max(n \in \mathbf{Z} : na \in {}_FR) = \max\left( \sum_{\alpha \in \pi^{-1}(a) \cap \Delta} c_\alpha : \sum_{\alpha \in \pi^{-1}(a) \cap \Delta} c_\alpha \alpha + \sum_{\beta \in \Delta_0} c_\beta \beta \in R^+ \right)$$

が成り立つ.

(1), (2) の関係式の右辺は共に  $\{\Delta, \Delta_0, \Gamma\}$  から定まるので,  ${}_F\Delta$  は  $\Gamma$ -図形で決まる. (2) は (3.2.1) から明らかである. (1) を示す.  $\beta \in \Delta, b \in {}_F\Delta$  に対して,  $\beta^* \in X(T)_{\mathbf{R}}, b^* \in X(S)_{\mathbf{R}}$  を

$$(\beta^*, \alpha) = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases}, \quad (b^*, a) = \begin{cases} 1 & (a = b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases}$$

で定める. ただし  $G$  の中心の上では  $\beta^*, b^*$  共にトリビアルとする. このとき  $\pi : X(T)_{\mathbf{R}} \rightarrow X(S)_{\mathbf{R}}$  が直交射影になることから,  $(b^*, \alpha) = (b^*, \pi(\alpha))$  が成り立つ. これから

$$b^* = \sum_{\beta \in \pi^{-1}(b) \cap \Delta} \beta^*$$

が従う. 定義から

$$b^* = \sum_{a \in {}_F\Delta} c_{a,b} a = \sum_{\beta \in \pi^{-1}(b) \cap \Delta} \sum_{\alpha \in \Delta} c_{\alpha,\beta} \alpha = \sum_{\beta \in \pi^{-1}(b) \cap \Delta} \beta^*$$

である. そこで両辺と  $a^* = \sum_{\alpha \in \pi^{-1}(a) \cap \Delta} \alpha^*$  との内積をとれば求める等式が従う.

### 3.3 半単純群の $\Gamma$ -データとツイスト

$G$  は連結半単純  $F$ -代数群とする.  $G$  の極大  $F$ -分裂トーラス  $S$  と  $S$  を含む極大  $F$ -トーラス  $T$  をとり, それから従う  $\Gamma$ -データを  ${}_i\Psi(G) = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee, \Delta_0, \tau)$  とする.  ${}_i\Psi(G)$  に含まれる基底ルートデータ  $\Psi_b(G) = (X, \Delta, X^\vee, \Delta)$  に対して, 分裂群の存在定理から連結分裂半単純  $F$ -代数群  $G^s$  で  $\Psi_b(G^s, B^s, T^s; F) = \Psi_b(G)$  となるものが存在する.  $\Delta_0$  から  $T^s$  の部分  $F$ -トーラスを

$$T_{\Delta_0}^s := \left( \bigcap_{\alpha \in \Delta_0} \text{Ker } \alpha \right)^0$$

で定める.  $T_{\Delta_0}^s$  の  $G^s$  での中心化群を  $Z_{G^s}(T_{\Delta_0}^s)$  とおく. これは  $B^s$  を含む放物的部分群のレビ部分群になる. さて  $\tau$  はその定義から連続準同型  $\tau : \Gamma \rightarrow \text{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta)$  を与える. 従って §2.5 から

$$[\tau] \in H^1(F, \text{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta)) \subset H^1(F, \text{Aut}(G))$$

とみなせる. これから  $G^s$  の  $\tau$  によるツイスト  $G_\tau^s$  ができる. 同様に  $\Delta_0$  の  $\tau(\Gamma)$ -不変性から,  $\tau$  は  $\text{Aut}(Z_{G^s}(T_{\Delta_0}^s))$  に値を取る 1-コサイクルを与えるので  $Z_{G^s}(T_{\Delta_0}^s)$  の  $\tau$  によるツイスト  $Z_{G^s}(T_{\Delta_0}^s)_\tau$  が

できる.  $G_\tau^s, Z_{G^s}(T_{\Delta_0}^s)_\tau$  は共に半分裂型である. 自然な準同型  $G_\tau^s \rightarrow \text{Inn}(G_\tau^s)$  による  $Z_{G^s}(T_{\Delta_0}^s)_\tau$  の像からなる  $\text{Inn}(G_\tau^s)$  の部分群を  $\text{Inn}_{\Delta_0}(G_\tau^s)$  で表す.

補題

- (1)  $G$  に対応するコホモロジー類  $\eta_{G^s}(G)$  の  $H^1(F, \text{Aut}_F(G^s, \mathcal{D}_\Delta))$  への像は  $[\tau]$  に等しい. そして  $G$  は半分裂群  $G_\tau^s$  の内部  $F$ -型である.
- (2)  $G = (G_\tau^s)_z$  となる  $[z] \in H^1(F, \text{Inn}_{\Delta_0}(G_\tau^s))$  が存在する.
- (3) 上の  $[z]$  を  $[z] \in Z^1(F, \text{Inn}(Z_{G^s}(T_{\Delta_0}^s)_\tau))$  とみなすとき,  $Z_G(S)$  は  $(Z_{G^s}(T_{\Delta_0}^s)_\tau)_z$  に  $F$ -同型である.

証明 (1) は定義と §2.5 定理から従う.

(2) ある  $[z] \in H^1(F, \text{Inn}(G_\tau^s))$  により  $G = (G_\tau^s)_z$  と表せる. いま  $G$  中の  $T$  を含む単純ルート系  $\Delta$  に対応する  $\bar{F}$ -ボレル部分群を  $B$  とする. 2つのボレル部分群は  $\bar{F}$  上共役だから, ある  $g \in G(\bar{F}) = G_\tau^s(\bar{F})$  により  $B^s = gBg^{-1}, T^s = gTg^{-1}$  となる. そこで  $z$  と同値なコサイクル  $z'$  を

$$z'(\gamma) = \text{inn}(g) \circ z(\gamma) \circ \text{inn}(\gamma(g)^{-1}), \quad (\gamma \in \Gamma)$$

与えれば, 写像  $\text{inn}(g) : (G_\tau^s)_z \rightarrow (G_\tau^s)_{z'}$  は  $F$ -同型となり,  $\text{inn}(g)(T) = T^s, \text{inn}(g)(B) = B^s$  となる. 従って最初から  $G$  を  $(G_\tau^s)_{z'}$  と同一視することにより,  $B = B^s, T = T^s$  としてよい. この同一視により更に  $S = T_{\Delta_0}^s$  となる. さて  $z'$  は  $\text{Inn}(G_\tau^s)$  に値を取るから, 各  $\gamma \in \Gamma$  に対して,  $z'(\gamma) = \text{inn}(g_\gamma)$  となる  $g_\gamma \in G_\tau^s(\bar{F})$  が取れる. 以下  $g_\gamma \in (Z_{G^s}(S))_\tau(\bar{F}) = Z_{G_\tau^s}(S)(\bar{F})$  であることを示す.  $\Gamma$  の作用を区別するために,  $\Gamma$  の  $G_\tau^s$  への作用を  $\sigma$  で, また  $(G_\tau^s)_{z'}$  への作用を  $\sigma'$  で表すことにする.  $\tau$  の定義から,  $G_\tau^s$  の中で  $S$  は  $F$ -分裂トーラスになる. 実際  $F$ -トーラスであることは明らかだから,  $F$ -分裂であることを示す. それには  $X(S)$  への  $\Gamma$  の  $\sigma$ -作用がトリビアルになることを示せばよい.  $\pi : X(T) \rightarrow X(S)$  を制限写像とすれば  $\{\pi(\alpha) \mid \alpha \in \Delta - \Delta_0\}$  は  $X(S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  の基底になる. 各  $\gamma \in \Gamma, \alpha \in \Delta - \Delta_0$  に対して

$$\sigma(\gamma)\pi(\alpha) = \pi(\sigma(\gamma)\alpha) = \pi(\tau(\gamma)\gamma\alpha) = \pi(\tau(\gamma)\alpha)$$

である. ここで  $\alpha \mapsto \gamma\alpha$  は  $G^s$  から従う  $\Gamma$ -作用とする. §3.2 補題から  $\pi(\tau(\gamma)\alpha) = \pi(\alpha)$  となるから.  $\pi(\alpha)$  は  $\sigma(\Gamma)$ -不変になる. よって  $\sigma(\Gamma)$  の  $X(S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  への作用はトリビアルになるから,  $S$  は  $F$ -分裂である. また  $S$  は  $(G_\tau^s)_{z'}$  の  $F$ -分裂トーラスでもある. これらのことから

$$S(F) := S \cap (G_\tau^s)_{z'}(F) = S \cap G_\tau^s(F)$$

が従う. とくに  $S(F)$  の要素は  $\sigma(\Gamma)$ -作用,  $\sigma'(\Gamma)$ -作用で不変になるから

$$g_\gamma t g_\gamma^{-1} = t, \quad (t \in S(F), \gamma \in \Gamma)$$

となる.  $S(F) \subset S$  は稠密で集合  $\{t \in S \mid Z_{G_\tau^s}(t) = Z_{G_\tau^s}(S)\}$  は  $S$  の中で稠密開集合であるから, レギュラーな  $t \in S(F)$  で  $Z_{G_\tau^s}(t) = Z_{G_\tau^s}(S)$  である. これは  $g_\gamma \in Z_{G_\tau^s}(S)(\bar{F})$  を示す.

(3)  $f : G = (G_\tau^s)_{z'} \rightarrow G_\tau^s$  を恒等写像とする. このとき  $f \circ (\gamma f^{-1}) = \text{inn}(g_\gamma)$  である.  $f$  の  $Z_G(S)$  への制限は  $\bar{F}$ -同型  $f : Z_G(S) \rightarrow Z_{G_\tau^s}(S)$  を与え, そのコホモロジー類は  $[z']$  となる.  $\square$

## 4 同型定理

このセクションでは連結リダクティブ  $F$ -代数群に関する同型定理を示す. §1 では分裂群の場合に同型定理を述べたが, それを一般の場合に拡張するわけである. もちろんその際の情報は基底ルートデータだけでは不足なので, 新たに許容系とよばれるものを定義する. 結果を一言で述べれば, 連結リダクティブ  $F$ -代数群はその  $\Gamma$ -データと非等方核および根基からなる3つ組で完全に分類できる, というのである.

### 4.1 許容系

$\Gamma$ -データ  ${}_i\Psi = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee, \Delta_0, \tau)$  と連結リダクティブ  $F$ -代数群  $K, F$ -トーラス  $C$  からなる三つ組  $({}_i\Psi, K, C)$  を考える.

定義:  $({}_i\Psi, K, C)$  が次の (a),(b),(c) をみたすとき, 許容系 (**admissible system**) であるという.

(a)  $K$  の  $\Gamma$ -データは

$${}_i\Psi(K) = (X_1, \Delta_0, X_1^\vee, \Delta_0^\vee, \Delta_0, \tau)$$

の形をもつ. とくに  $K$  は非等方的である.

(b)  $X$  は  $X_1 \oplus X(C)$  の  $\Gamma$ -不変指数有限部分群で, 直和成分への射影は次の同型を引き起こす.

$$X + X(C)/X(C) \cong X_1, \quad X + X_1/X_1 \cong X(C)$$

(c)  $X \cap X(C) = \{x \in X \mid \langle x, \alpha^\vee \rangle = 0 \ (\alpha^\vee \in \Delta^\vee)\}$  である.

定義 二つの許容系  $({}_i\Psi, K, C)$  と  $({}_i\Psi', K', C')$  は, 同型写像  $f : {}_i\Psi \rightarrow {}_i\Psi'$  と  $F$ -同型写像  $f_K : K \rightarrow K', f_C : C \rightarrow C'$  で次の可換図式みたすものが存在するとき, 同型であるという.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_1 \oplus X(C) \\ f \downarrow & & \downarrow f_K^\# \oplus f_C^\# \\ X' & \longrightarrow & X_1' \oplus X(C') \end{array}$$

ここで  $f_K^\# : X_1 \rightarrow X_1'$  は  $f_K$  から導かれる同型写像で  $f_C^\# = (f_C^{-1})^*$  とする.

許容系  $({}_i\Psi, K, C)$  で, とくに  $C$  が単位元だけの場合を半単純であるという. この場合  $C$  を省略して  $({}_i\Psi, K)$  と表す. 半単純許容系では  $X = X_1$  で  $\Delta$  は  $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  の基底になる.

### 4.2 連結リダクティブ群の許容系

以下 §3.2 と同じ記号を使う.  $(G, G)$  を  $G$  の交換子群,  $R(G)$  を  $G$  の根基 (即ち  $G$  の中心の単位連結成分) とする.  $(G, G)$  における  $S$  の中心化群を  $Z_{(G,G)}(S)$  で表す. このとき  $({}_i\Psi(G), Z_{(G,G)}(S), R(G))$  は許容系になる. もし  $G'$  がもう一つの連結リダクティブ  $F$ -代数群で,  $\varphi : G \rightarrow G'$  が  $F$ -同型ならば, これは許容系の同型  $\varphi^* : ({}_i\Psi(G'), Z_{(G',G')}(S'), R(G')) \cong ({}_i\Psi(G), Z_{(G,G)}(S), R(G))$  を引き起こす.  $G$  が半単純ならば  $(G, G) = G, R(G) = \{e\}$  で, 対応する許容系も半単純になる.

### 4.3 同型定理

定理

$G, G'$  は連結リダクティブ  $F$ -代数群とする. いま対応する許容系の間に同型写像

$$f : ({}_i\Psi(G'), Z_{(G',G')}(S'), R(G')) \longrightarrow ({}_i\Psi(G), Z_{(G,G)}(S), R(G))$$

があれば,  $F$ -同型  $\varphi : G \rightarrow G'$  で  $\varphi^* = f$  となるものが存在する.

証明  $H = (G, G), K = Z_H(S), T_H = T \cap H, C = R(G)$  とおく.  $G'$  についても同様に  $H', K', T_{H'}, C'$  を定める. 与えられた同型を

$$f : {}_i\Psi(G') \rightarrow {}_i\Psi(G), \quad f_{K'} : K' \rightarrow K, \quad f_{C'} : C' \rightarrow C$$

とおく. 基底  $\Delta$  に対応する  $G$  の  $\bar{F}$ -ボレル部分群を  $B$  とする. 同様に  $\Delta'$  に対応する  $G'$  の  $\bar{F}$ -ボレル部分群を  $B'$  とする. このとき  $f$  から導かれる基底ルートデータの間の同型

$$f : \Psi(G')_b = \Psi_b(G', B', T'; \bar{F}) \rightarrow \Psi(G)_b = \Psi_b(G, B, T; \bar{F})$$

から, 分裂群の同型定理により  $\bar{F}$ -同型  $\psi : G \rightarrow G'$  で  $\psi(B) = B', \psi(T) = T', \psi^* = f$  となるものが取れる.  $\psi^* = f$  は  $\Delta'_0$  を  $\Delta_0$  にうつすことから  $\psi(S) = S'$  が従う. これから  $\psi$  は  $\bar{F}$ -同型  $\psi|_K : K \rightarrow K'$  を導く. また  $G$  の根基は  $G'$  の根基にうつるから  $\psi$  の  $C$  への制限は  $\bar{F}$ -同型  $\psi|_C : C \rightarrow C'$  を導く. さて  $\bar{F}$ -同型  $f_{K'} \circ \psi|_K : K \rightarrow K'$  は  $T \cap K$  を  $T \cap K$  にうつすが, さらに  $(f_{K'} \circ \psi|_K)^*$  は  $\Delta_0$  を不変にするので  $B \cap K$  を  $B \cap K$  にうつす. 従って分裂群の同型定理からある  $t \in T \cap K$  により  $f_{K'} \circ \psi|_K \circ \text{inn}(t)$  は  $K$  の恒等写像になる. そこで  $\psi \circ \text{inn}(t)$  を改めて  $\psi$  と取り直せば,  $\psi|_K = f_{K'}^{-1}$  となり  $\psi|_K$  は  $F$ -同型となる. さらにこのとき §4.1 定義 (2) の可換図式から  $(\psi|_C)^* = f_{C'}^\sharp$  となるので  $\psi|_C = f_{C'}^{-1}$  が従う.  $(\psi|_K)^* : X(T' \cap K') \rightarrow X(T \cap K)$  と  $(\psi|_C)^* : X(C') \rightarrow X(C)$  が  $\Gamma$  の作用と可換なことから  $\psi^* : X(T') \rightarrow X(T)$  も  $\Gamma$  の作用と可換になり,  $\psi$  の  $T$  への制限は  $F$ -同型  $\psi|_T : T \rightarrow T'$  になる.

$G$  の中心を  $Z$  として  $\bar{G} = G/Z, \bar{T} = T/Z$  とする. また

$$\bar{T}_{\Delta_0} = \bigcap_{\alpha \in \Delta_0} \text{Ker}(\alpha : \bar{T} \rightarrow \mathbf{G}_m)$$

とおく. いま各  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $z(\gamma) = \psi^{-1} \circ \gamma \psi : G \rightarrow G$  とおけば,  $z : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(G)$  は 1-コサイクル  $Z^1(F, \text{Aut}(G))$  を定める. 自然な単射

$$\bar{T}_{\Delta_0} \rightarrow \bar{G} = \text{Inn}(G) \rightarrow \text{Aut}(G)$$

から導かれるコホモロジー集合の写像を

$$H^1(F, \bar{T}_{\Delta_0}) \xrightarrow{i} H^1(F, \text{Aut}(G))$$

とおく. 以下では  $z$  から定まるコホモロジー類を  $[z]$  で表すとき

$$[z] \in \text{Im}(H^1(F, \bar{T}_{\Delta_0}) \xrightarrow{i} H^1(F, \text{Aut}(G))) \quad (4.3.1)$$



となることを示す. ルート系  $R$  と  $R'$  の  $\bar{F}$  上の実現をそれぞれ  $(u_\alpha)_{\alpha \in R}$ ,  $(v_{\alpha'})_{\alpha' \in R'}$  と固定する.  $U_\alpha = \text{Im } u_\alpha$ ,  $V_{\alpha'} = \text{Im } v_{\alpha'}$  とおけば

$$\psi(U_{\psi^*(\alpha')}) = V_{\alpha'}$$

である. また  $\psi^*$  が  $\Gamma$  の作用と可換なことから

$$\psi(\gamma U_{\psi^*(\alpha')}) = \psi(U_{\gamma\psi^*(\alpha')}) = V_{\gamma\alpha'} = \gamma V_{\alpha'}, \quad (\gamma \in \Gamma)$$

となる.  $z(\gamma)$  は  $T$  を不変にし, また上に述べたことから  $U_\alpha$  も不変にする. 従って分裂群の同型定理から  $t_\gamma \in T$  で  $z(\gamma) = \text{inn}(t_\gamma)$  となるものが取れる.  $t_\gamma \in \bar{T}$  とみなしてよい. さらに  $\psi|_K$  は  $F$ -同型であったから,  $z(\gamma)|_K : K \rightarrow K$  は恒等写像である. とくに  $\alpha \in \Delta_0$  ならば  $U_\alpha \subset K$  より

$$u_\alpha(x) = z(\gamma)(u_\alpha(x)) = u_\alpha(\alpha(t_\gamma)x), \quad (x \in \mathbf{G}_a(\bar{F}), \gamma \in \Gamma)$$

となる. 従って  $\alpha(t_\gamma) = 1$  である. これは  $t_\gamma \in \bar{T}_{\Delta_0}$  を意味するから, (4.3.1) が成り立つ.

次に  $H^1(F, \bar{T}_{\Delta_0}) = 0$  であることを示す. まず

$$X(\bar{T}_{\Delta_0}) = X(\bar{T}) / \sum_{\alpha \in \Delta_0} \mathbf{Z}\alpha \cong \sum_{\alpha \in \Delta - \Delta_0} \mathbf{Z}\alpha$$

であるから, §3.2 補題より  $X(\bar{T}_{\Delta_0})$  上  $\Gamma$  の通常的作用と  $\tau(\Gamma)$  の作用は一致する.  $\Delta - \Delta_0$  の  $\tau(\Gamma)$ -軌道分解から, 各相対ルート  $a \in {}_F\Delta$  に対して

$$X_a = \sum_{\alpha \in \pi^{-1}(a) \cap \Delta} \mathbf{Z}\alpha$$

とおけば,  $X(\bar{T}_{\Delta_0})$  は直和分解

$$X(\bar{T}_{\Delta_0}) = \bigoplus_{a \in {}_F\Delta} X_a$$

をもつ. この分解に対応して  $\bar{T}_{\Delta_0}$  は  $F$ -トーラス  $\bar{T}_a$  の直積に  $F$ -同型になる. 即ち

$$\bar{T}_{\Delta_0} \cong \prod_{a \in {}_F\Delta} \bar{T}_a, \quad X(\bar{T}_a) = X_a$$

そこで  $H^1(F, \bar{T}_a) = 0$  がいえればよい.  $\alpha \in \pi^{-1}(a) \cap \Delta$  を固定して

$$\Gamma_\alpha = \{\gamma \in \Gamma \mid \tau(\gamma)\alpha = \alpha\}$$

とおく.  $\bar{F}$  の  $\Gamma_\alpha$  による不変体を  $E_\alpha$  で表す. 明らかに

$$X(\mathbf{G}_{m/E_\alpha}) \cong \mathbf{Z}\alpha$$

で,  $\Gamma$ -同型

$$X(\bar{T}_a) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_\alpha} \tau(\gamma)(\mathbf{Z}\alpha) \cong \text{Ind}_{\Gamma_\alpha}^{\Gamma} X(\mathbf{G}_{m/E_\alpha})$$

があるから,  $\bar{T}_a = R_{E_\alpha/F}(\mathbf{G}_{m/E_\alpha})$  となる. ここで  $R_{E_\alpha/F}$  は係数制限関手である. 従って

$$H^1(F, \bar{X}_a) \cong H^1(E_\alpha, \mathbf{G}_m) = 0$$

となる.

このことから, コサイクル  $\gamma \rightarrow t_\gamma$  はトリビアル類を表すから, ある  $t \in \bar{T}_{\Delta_0}$  により

$$t_\gamma = t^{-1}(\gamma t), \quad (\gamma \in \Gamma)$$

とかける. そこで  $\varphi = \psi \circ \text{inn}(t^{-1})$  とおけば, これは求める  $F$ -同型  $\varphi : G \rightarrow G'$  を与える.  $\square$

## 5 許容系の実現可能性

連結リダクティブ  $F$ -代数群を許容系から分類するには、与えられた許容系が実際に代数群から来る許容系になるかどうかを判定しなければならない。ここで示されるように、その判定は単連結既約許容系の場合の判定に帰着される。

### 5.1 許容系の実現

許容系  $({}_i\Psi, K, C)$  に対して、連結リダクティブ  $F$ -代数群  $G$  で、 $({}_i\Psi, K, C) \cong ({}_i\Psi(G), Z_{(G,G)}(S), R(G))$  となるものが存在するとき、 $({}_i\Psi, K, C)$  は実現可能であるという。また  $G$  を  $({}_i\Psi, K, C)$  の実現という。同型定理より実現は  $F$ -同型を除いて一意に定まる。もし  $({}_i\Psi, K, C)$  が半単純で実現可能ならば、その実現  $G$  は半単純になる。

### 5.2 半単純の場合への帰着

許容系  $({}_i\Psi, K, C)$  に対して、定義の三番目の条件 (c) から、 $\Delta$  は  $X + X(C)/X(C) \cong X_1$  に埋め込まれることがわかる。その像を同じ記号  $\Delta$  で表す。これから  $X$  を  $X_1$  で置き換えた  $\Gamma$ -データ

$${}_i\Psi_s := (X_1, \Delta, X_1^\vee, \Delta^\vee, \Delta_0, \tau)$$

が考えられる。このとき  $({}_i\Psi_s, K)$  は半単純許容系になる。これを  $({}_i\Psi, K, C)$  の半単純部分と呼ぶことにする。

定理

許容系  $({}_i\Psi, K, C)$  について、その半単純部分  $({}_i\Psi_s, K)$  が実現可能ならば、 $({}_i\Psi, K, C)$  も実現可能である。

証明  $({}_i\Psi_s, K)$  の実現を  $G_1$  として、 $G_1 \times C$  を考える。  $G_1$  の極大  $F$ -分裂トーラスを  $S_1$ 、それを含む極大  $F$ -トーラスを  $T_1$  とする。  $X(T_1)$  を  $X_1$  と同一視する。許容系の条件 (b) から、 $X$  は  $X_1 \oplus X(C)$  の  $\Gamma$ -不変指数有限部分群であるから、有理指標群として  $X$  をもつトーラス  $T$  と  $F$ -アイソジェニ  $\varphi : T_1 \times C \rightarrow T$  で、 $\varphi^* : X = X(T) \rightarrow X_1 \oplus X(C)$  が与えられた埋め込み  $X \subset X_1 \oplus X(C)$  と一致するものが存在する。  $\text{Ker}\varphi$  は有限部分群で  $F$  上定義される。また  $\text{Ker}\varphi$  の有理指標群は  $X_1 \oplus X(C)/X$  となる。いま  $X$  は  $(G_1, T_1)$  のルート系を含むから、任意のルートは  $\text{Ker}\varphi$  上トリビアルになる。これは  $\text{Ker}\varphi$  が  $G_1 \times C$  の中心に含まれることを示す。そこで  $G = G_1 \times C / \text{Ker}\varphi$  とすれば、 $G$  は  $({}_i\Psi, K, C)$  の実現を与える。  $\square$

### 5.3 単連結の場合への帰着

半単純許容系  $({}_i\Psi, K)$  の単連結カバー  $(\widetilde{{}_i\Psi}, \widetilde{K})$  を定義する。  $\Gamma$ -データ  ${}_i\Psi$  中の基底ルートデータを  $\Psi_b = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$  とする。  $\widetilde{X}$  をウェイト格子、 $\widetilde{X}^\vee$  をコルート格子とする。これから単連結な基底ルートデータ

$$\widetilde{\Psi}_b := (\widetilde{X}, \Delta, \widetilde{X}^\vee, \Delta^\vee)$$

ができる。ガロワ群の作用  $\tau$  は自然に  $\widetilde{X}$  に延長されるので、これから  $\Gamma$ -データ  ${}_i\widetilde{\Psi}$  ができる。次に  $\widetilde{K}$  を定める。§3.3 と同じ記号で、まず基底ルートデータ  $\Psi_b$  に対して連結分裂半単純  $F$ -代数群  $G^s$  で  $\Psi_b = \Psi_b(G^s, B^s, T^s; F)$  となるものをとる。そして  $T^s$  の部分トラス  $T_{\Delta_0}^s$  の  $G^s$  での中心化群を  $K^s = Z_{G^s}(T_{\Delta_0}^s)$  とおく。§3.3 でみたように  $G^s, K^s$  の  $\tau$  によるツイスト  $G_\tau^s, K_\tau^s$  はそれぞれ半分裂代数群になる。さて  $\widetilde{\Psi}_b$  に対して同様に連結分裂半単純  $F$ -代数群  $\widetilde{G}^s$  で  $\widetilde{\Psi}_b = \Psi_b(\widetilde{G}^s, \widetilde{B}^s, \widetilde{T}^s; F)$  となるものを取り、 $\widetilde{T}_{\Delta_0}^s$  の  $\widetilde{G}^s$  での中心化群を  $\widetilde{K}^s := Z_{\widetilde{G}^s}(\widetilde{T}_{\Delta_0}^s)$  とおく。これらの  $\tau$  によるツイストを  $\widetilde{G}_\tau^s, \widetilde{K}_\tau^s$  とおく。定義から  $\widetilde{G}_\tau^s$  は  $G_\tau^s$  の  $F$  上定義された単連結被覆である。

#### 補題

- (1)  $({}_i\Psi, K)$  が実現可能ならば  $K$  は  $K_\tau^s$  の非等方的内部  $F$ -型である。
- (2)  $K$  が  $K_\tau^s$  の非等方的内部  $F$ -型であると仮定する。そのコホモロジー類を

$$[z] = \eta_{K_\tau^s}(K) \in \text{Im}(H^1(F, \text{Inn}(K_\tau^s)) \rightarrow H^1(F, \text{Aut}(K_\tau^s)))$$

とおく。  $\text{Inn}(K_\tau^s) = \text{Inn}(\widetilde{K}_\tau^s)$  であるから  $[z]$  による  $\widetilde{K}_\tau^s$  のツイスト  $\widetilde{K} := (\widetilde{K}_\tau^s)_z$  ができる。このとき  $({}_i\widetilde{\Psi}, \widetilde{K})$  は許容系になる。

補題の証明は §3.3 から容易に従う。以下半単純許容系  $({}_i\Psi, K)$  の  $K$  が (2) の仮定をみたすとき、ツイストということにする。

#### 定理

$K$  はレビツイストとする。このとき  $({}_i\widetilde{\Psi}, \widetilde{K})$  が実現可能ならば  $({}_i\Psi, K)$  も実現可能である。

証明は §5.2 定理と同様である。

### 5.4 $F$ -単純の場合への帰着

$({}_i\Psi, K)$  は単連結許容系とし、単連結分裂半単純  $F$ -代数群  $G^s$  で  $\Psi_b = \Psi_b(G^s, B^s, T^s; F)$  となるものをとる。  $K$  は  $K_\tau^s := Z_{G^s}(T_{\Delta_0}^s)_\tau$  の内部  $F$ -型であると仮定する。  $\Delta$  を互いに直交する既約な単純ルート系の直和に分解する。それを

$$\Delta = \bigsqcup_j \widehat{\Delta}_j$$

とする。  $\tau(\Gamma)$  は  $\Delta$  を不変にするから、 $\{\widehat{\Delta}_j\}$  の置換を引き起こす。そこで  $\{\widehat{\Delta}_j\}$  の  $\tau(\Gamma)$ -軌道の代表系を  $\widehat{\Delta}_1, \dots, \widehat{\Delta}_\ell$  とする。各  $\widehat{\Delta}_j$  に対して、その固定化群を

$$\Gamma_j := \{\gamma \in \Gamma \mid \tau(\gamma)\widehat{\Delta}_j = \widehat{\Delta}_j\}$$

とおき、 $\overline{F}$  の  $\Gamma_j$  による不変体を  $E_j$  とする。これから

$$\Delta_j := \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_j} \tau(\gamma)\widehat{\Delta}_j$$

とおけば、これは  $\tau(\Gamma)$ -不変で、 $\Delta$  は

$$\Delta = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} \Delta_j$$

と分割される. 対応する  $X, X^\vee, \Delta^\vee, \Delta_0$  の分割を  $X_j, X_j^\vee, \Delta_j^\vee, (\Delta_j)_0$  で表し, また  $\Gamma$  の  $X_j$  への作用を  $\tau_j$  で表して

$${}_i\Psi_j := (X_j, \Delta_j, X_j^\vee, \Delta_j^\vee, (\Delta_j)_0, \tau_j)$$

とおく. これは再び  $\Gamma$ -データになる. その基底ルートデータ  $(\Psi_j)_b$  は単連結であるから, 単連結分裂半単純  $F$ -代数群  $G_j^s$  で  $(\Psi_j)_b = \Psi_b(G_j^s, B_j^s, T_j^s; F)$  となるものが取れる. 単連結代数群の一意性から

$$G^s = G_1^s \times \cdots \times G_\ell^s$$

となる. また  $(K_j^s)_{\tau_j} := Z_{G_j^s}((T_j^s)_{(\Delta_j)_0})_{\tau_j}$  とすれば

$$K_\tau^s = (K_1^s)_{\tau_1} \times \cdots \times (K_\ell^s)_{\tau_\ell}$$

である. この分解に従って  $K$  も

$$K = K_1 \times \cdots \times K_\ell$$

と分解する. 各  $({}_i\Psi_j, K_j)$  が単連結許容系になることは容易に分かる. また次の定理も明らかである.

定理

上の状況で,  $({}_i\Psi, K)$  が実現可能であることと, すべての  $({}_i\Psi_j, (G_j)_0)$  が実現可能であることは同値である.

## 5.5 $\bar{F}$ -単純の場合への帰着

設定は §5.4 と同じとする.  $({}_i\Psi_1, K_1)$  を考える.  $\Delta_1$  は

$$\Delta_1 = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_1} \tau(\gamma)\widehat{\Delta}_1$$

と分解されるから, 対応して  $X_1$  は

$$X_1 = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_1} \tau(\gamma_1)\widehat{X}_1$$

と分解される. ここで  $\widehat{X}_1$  は基本ウェイト  $\omega_\alpha, \alpha \in \widehat{\Delta}_1$  で生成される  $\mathbf{Z}$ -加群である.  $\widehat{X}_1$  は  $\tau(\Gamma_1)$ -不変である.  $\widehat{\Delta}_1$  に対応するコルートを  $\widehat{\Delta}_1^\vee$  として, そのコルルート格子を  $\widehat{X}_1^\vee$  とする.  $(\widehat{\Psi}_1)_b = (\widehat{X}_1, \widehat{\Delta}_1, \widehat{X}_1^\vee, \widehat{\Delta}_1^\vee)$  は単連結既約基底ルートデータになる.  $(\widehat{\Delta}_1)_0 = \widehat{\Delta}_1 \cap (\Delta_1)_0$  とおく. また  $\Gamma_1$  の  $\widehat{X}_1$  への作用を  $\widehat{\tau}_1$  で表す.  ${}_i\widehat{\Psi}_1 = ((\widehat{\Psi}_1)_b, (\widehat{\Delta}_1)_0, \widehat{\tau}_1)$  は  $\Gamma$ -データになる.  $(\widehat{\Psi}_1)_b$  に対して, 単連結分裂半単純  $E_1$ -代数群  $\widehat{G}_1^s$  で,  $(\widehat{\Psi}_1)_b = \Psi_b(\widehat{G}_1^s, \widehat{B}_1^s, \widehat{T}_1^s; E_1)$  となるものにとる.  $\widehat{\Delta}_1$  は既約だから  $\widehat{G}_1^s$  は  $\bar{F}$ -単純である.

$$(\widehat{G}_1^s)^{|\Gamma/\Gamma_1|} := \underbrace{\widehat{G}_1^s \times \cdots \times \widehat{G}_1^s}_{|\Gamma/\Gamma_1|}$$

とおけば,  $\Delta_1$  の分解から  $E_1$  上の同型

$$G_1^s \cong (\widehat{G}_1^s)^{|\Gamma/\Gamma_1|}$$

がある. この同型で  $B_1^s, T_1^s$  はそれぞれ  $(\widehat{B}_1^s)^{|\Gamma/\Gamma_1|}, (\widehat{T}_1^s)^{|\Gamma/\Gamma_1|}$  に対応するとしてよい. このとき  $(T_1^s)_{(\Delta_1)_0}$  は  $(\widehat{T}_1^s)_{(\widehat{\Delta}_1)_0}^{|\Gamma/\Gamma_1|}$  に対応するから,

$$Z_{G_1^s}((T_1^s)_{(\Delta_1)_0}) \cong Z_{\widehat{G}_1^s}((\widehat{T}_1^s)_{(\widehat{\Delta}_1)_0})^{|\Gamma/\Gamma_1|}$$

となる. さらに  $\tau_1 = \text{Ind}_{\Gamma_1}^{\Gamma} \widehat{\tau}_1$  であることに注意すれば,  $F$ -同型

$$(G_1^s)_{\tau_1} \cong R_{E_1/F}(\widehat{G}_1^s)_{\widehat{\tau}_1}, \quad (K_1^s)_{\tau_1} \cong R_{E_1/F}(\widehat{K}_1^s)_{\widehat{\tau}_1}$$

が従う. ここで  $R_{E_1/F}$  は  $E_1$  から  $F$  への係数制限関手で,  $(\widehat{K}_1^s)_{\widehat{\tau}_1} = Z_{\widehat{G}_1^s}((\widehat{T}_1^s)_{(\widehat{\Delta}_1)_0})_{\widehat{\tau}_1}$  である.  $K_1$  は  $(K_1^s)_{\tau_1}$  の内部  $F$ -型であるから, ある  $[z_1] \in H^1(F, \text{Inn}((K_1^s)_{\tau_1}))$  による  $(K_1^s)_{\tau_1}$  のツイストで表せる. 上の同型から

$$H^1(F, \text{Inn}((K_1^s)_{\tau_1})) \cong H^1(E_1, \text{Inn}((\widehat{K}_1^s)_{\widehat{\tau}_1}))$$

が従うから,  $[z_1]$  による  $(\widehat{K}_1^s)_{\widehat{\tau}_1}$  のツイスト  $\widehat{K}_1$  ができる.  $\widehat{K}_1$  は非等方的な  $E_1$ -代数群で,  $({}_i\Psi_1, \widehat{K}_1)$  は許容系になる.

定理

$({}_i\Psi_1, K_1)$  が実現可能なことと  $({}_i\widehat{\Psi}_1, \widehat{K}_1)$  が実現可能なことは同値である.

## 6 単連結群の基底許容系

前のセクションの結果から, 以下単連結の場合に限って分類の話を進めよう. 単連結の場合には,  $\Gamma$ -データはそこに含まれる  $\Gamma$ -図形で完全に定まるので, 一般の場合に比べて扱いが少し容易になる. そこで許容系に代えて, より単純な基底許容系を導入し, それによる分類を説明する. 許容系の場合と同様に, この場合も基底許容系が実現可能かどうかの判定が問題となる. 分類の鍵となる実現可能性の必要十分条件が §6.4 で与えられる. その後は話題を  $\Gamma$ -図形の実現可能性に絞る.  $\Gamma$ -図形そのものは絶対ガロワ群の準同型を含んでいるので, 基礎体  $F$  に強く依存している. そこで基礎体の依存性を形式的に取り除いたより簡単な佐武-Tits 図形を導入し, 実現可能な佐武-Tits 図形の分類を行う. 古典型の場合にはこの分類は Weil の定理に基づく. 例外型の場合には実現可能  $\Gamma$ -図形の必要条件を幾つか組み合わせたものから分類が記述される.

### 6.1 単連結代数群

基底ルートデータ  $\Psi_b = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$  が単連結ならば  $\Psi_b$  は単純ルート系  $\Delta$  だけから完全に復元できる.  $\Psi_b$  をルートデータにもつ単連結分裂半単純  $F$ -代数群は  $F$ -同型を除いて一意に定まるから, それを  $G^s(\Delta)$  で表す. また  $\Delta$  に対応する  $G^s(\Delta)$  の極大  $F$ -分裂トーラスと  $F$ -ボレル部分群を  $T^s(\Delta), B^s(\Delta)$  で表す. このとき  $\Psi_b$  を絶対ルート系にもつ  $F$ -代数群は  $G^s(\Delta)$  のツイストになる.

#### 補題

$G$  を単連結半単純代数群として,  $P$  を  $G$  のパラボリック部分群とする.  $P$  のレビ部分群を  $M$  とするとき, その交換子群  $(M, M)$  も単連結になる.

証明  $T$  を  $G$  の極大トーラス,  $B$  を  $T$  を含むボレル部分群とする.  $(G, B, T)$  に対応する基底ルート系を  $\Delta$  とする. 部分集合  $\theta \subset \Delta$  に対して,  $T$  の部分トーラス

$$T_\theta = \left( \bigcap_{\alpha \in \theta} \text{Ker } \alpha \right)^0$$

をとる.  $M$  は  $T_\theta$  の  $G$  における中心化群  $Z_G(T_\theta)$  と仮定してよい. その交換子群を  $L = (Z_G(T_\theta), Z_G(T_\theta))$  とする. このとき  $T_\theta$  は  $Z_G(T_\theta)$  の根基で,  $Z_G(T_\theta) = T_\theta \cdot L$  となる.  $L$  の極大トーラス  $T_L$  で  $T = T_\theta \cdot T_L$  となるものをとる.  $\alpha \in \theta$  に対応するコルート  $\alpha^\vee$  について  $\text{Im } \alpha^\vee \subset T_L$  は容易にわかる. 従って

$$\sum_{\alpha \in \theta} \mathbf{Z} \alpha^\vee \subset X^\vee(T_L)$$

である. いま  $\text{Im } \alpha^\vee, (\alpha \in \theta)$  で生成される  $T_L$  の部分トーラスを  $T'_L$  とすると,  $\dim T'_L = \dim T_L = |\theta|$  から  $T'_L = T_L$  でなければならない. このことから

$$X^\vee(T_L) = \sum_{\alpha \in \theta} \mathbf{Z} \alpha^\vee$$

が従う. ゆえに  $L$  は単連結である. □

## 6.2 基底許容系

$({}_i\Psi, K)$  を半単純許容系とし,

$${}_i\Psi = (\Psi_b, \Delta_0, \tau), \quad \Psi_b = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$$

とする.  $\Psi_b$  が単連結ならば,  ${}_i\Psi$  はその  $\Gamma$ -図形  $\{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  だけで決まる. さらに  $K$  がレビツイストならば  $K$  の交換子群  $(K, K)$  は上の補題から単連結  $F$ -代数群で, その絶対単純ルート系は  $\Delta_0$  になる. これから逆に  $(K, K)$  は  $\Delta_0$  を単純ルート系にもつ単連結分裂半単純  $F$ -代数群  $G^s(\Delta_0)$  のツイストでなければならない.

**定義**  $I = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  を  $\Gamma$ -データの  $\Gamma$ -図形とし,  $G^s(\Delta_0)$  の  $\tau$  によるツイストを  $G^s(\Delta_0)_\tau$  とする.  $F$ -代数群  $L$  が  $G^s(\Delta_0)_\tau$  の非等方内部  $F$ -型であるとき,  $I$  と  $L$  のペア  $(I, L)$  を基底許容系という.

**定義** ふたつの基底許容系  $(I, L)$  と  $(I', L')$  に対して, 全単射  $f : \Delta \rightarrow \Delta'$  と  $F$ -同型  $f_L : L \rightarrow L'$  で

$$f \circ \tau(\gamma) = \tau'(\gamma) \circ f \quad (\gamma \in \Gamma), \quad f(\Delta_0) = \Delta'_0, \quad f|_{\Delta_0} = f_L^\sharp$$

をみたすものが存在するとき  $(I, L)$  と  $(I', L')$  は合同であるという.

$G$  を単連結半単純  $F$ -代数群として, その許容系を  $({}_i\Psi(G), Z_G(S))$  とする.  ${}_i\Psi(G)$  の  $\Gamma$ -図形を  $I(G)$  で表す. また  $Z_G(S)$  の交換子群を  $D_G(S) = (Z_G(S), Z_G(S))$  で表す. このとき  $(I(G), D_G(S))$  は基底許容系になる. これを  $G$  に対応する基底許容系という.  $G'$  をもう一つの  $F$ -代数群として, その基底許容系を  $(I(G'), D_{G'}(S'))$  とする. もし  $F$ -同型  $\varphi : G \rightarrow G'$  があれば,  $\varphi(S)$  を  $S'$  にうつす  $G'$  の内部自己同型と合成することにより, 合同  $\varphi^\sharp : (I(G), D_G(S)) \rightarrow (I(G'), D_{G'}(S'))$  を得る.

## 6.3 単連結群の同型定理

定理

$G, G'$  を単連結半単純  $F$ -代数群とする. それらの基底許容系の間には合同

$$f : (I(G), D_G(S)) \rightarrow (I(G'), D_{G'}(S'))$$

があれば,  $F$ -同型  $\varphi : G \rightarrow G'$  で  $\varphi^\sharp = f$  となるものがある.

**証明**  $f_{D_G(S)} : D_G(S) \rightarrow D_{G'}(S')$  は与えられた同型とする.  $I(G) = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  として, この  $\Gamma$ -図形を与える  $G$  の極大  $F$ -トーラスを  $T$  とする. また  $\Gamma$ -図形  $I(G')$  を与える  $G'$  の極大  $F$ -トーラスを  $T'$  とする. 単連結性から合同  $f : I(G) \rightarrow I(G')$  は  $\Gamma$ -データの同型  ${}_i\Psi(G) \rightarrow {}_i\Psi(G')$  に延長される. これも  $f$  で表す. そこで  $F$ -同型  $\psi : Z_G(S) \rightarrow Z_{G'}(S')$  で  $\psi^\sharp = f$  かつ  $\psi|_{D_G(S)} = f_{D_G(S)}$  となるものが存在することをいえば, §4.3 同型定理より求める  $F$ -同型  $\varphi : G \rightarrow G'$  の存在がいえる.  $G^s = G^s(\Delta)$ ,  $T^s = T^s(\Delta)$  とすれば, 仮定より  $G, G'$  は共に  $G_\tau^s$  の内部  $F$ -型で, さらに §3.3 補題から  $Z_G(S)$  と  $Z_{G'}(S')$  は共に  $Z_{G^s(T_{\Delta_0}^s)}_\tau$  の内部  $F$ -型になる. 従って  $\bar{F}$ -同型  $\psi : G \rightarrow G'$  で,  $\psi^\sharp = f$  かつ

$$\psi^{-1} \circ (\gamma\psi) = \text{inn}(t_\gamma), \quad (\gamma \in \Gamma, t_\gamma \in Z_{G^s(T_{\Delta_0}^s)}_\tau)$$

となるものが存在する. このとき  $\psi(Z_G(S)) = \psi(Z'_G(S'))$  であるが,  $S$  は  $Z_G(S)$  の中心トーラスだから

$$\gamma\psi(t) = \psi(t), \quad (t \in S, \gamma \in \Gamma)$$

が成り立つ. ゆえに  $\psi$  の  $S$  への制限  $\psi|_S$  は  $F$  上定義されている. そこで  $D_G(S)$  上の  $\bar{F}$ -自己同型  $f_{D_G(S)}^{-1} \circ \psi|_{D_G(S)} : D_G(S) \rightarrow D_{G'}(S')$  を考える.  $(f_{D_G(S)}^{-1} \circ \psi|_{D_G(S)})^\sharp(\Delta_0) = \Delta_0$  から, 分裂群の同型定理により  $\psi|_{D_G(S)} \circ \text{inn}(g) = f_{D_G(S)}$  となる  $g \in D_G(S) \cap T$  が取れる. そこで  $\psi \circ \text{inn}(g)$  を改めて  $\psi$  と取り直せば,  $\psi^\sharp = f$  のままで,  $\psi|_S, \psi|_{D_G(S)} = f_{D_G(S)}$  はどちらも  $F$  上定義されている.  $Z_G(S) = S \cdot D_G(S)$  であるから,  $\psi : Z_G(S) \rightarrow Z_{G'}(S')$  は求める  $F$ -同型を与える.  $\square$

## 6.4 基底許容系の実現可能性

基底許容系  $(I, L)$  について,  $(I, L) \cong (I(G), D_G(S))$  となる単連結半単純  $F$ -代数群  $G$  が存在するとき  $(I, L)$  は実現可能であるという. またこのとき  $I$  を実現可能  $\Gamma$ -図形という. 以下では  $(I, L)$  が実現可能であるための必要または十分条件を調べる.  $I = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  として  $G^s = G^s(\Delta)$ ,  $B^s = B^s(\Delta)$ ,  $T^s = T^s(\Delta)$  とおく.

$$S_0 := T_{\Delta_0}^s = \left( \bigcap_{\alpha \in \Delta_0} \text{Ker } \alpha \right)^0$$

とすれば,  $\Delta_0$  は  $(Z_{G^s}(S_0), B^s \cap Z_{G^s}(S_0), T^s)$  から従う単純ルート系である.  $G_0 := G_\tau^s, M_0 := Z_{G^s}(S_0)_\tau$  を  $\tau$  によるツイストでえられる半分裂群とする. §6.1 補題より  $M_0$  の交換子群  $L_0 := (M_0, M_0)$  は単連結である. もし  $(I, L)$  が実現可能ならばその実現は  $G_0$  の内部  $F$ -型で,  $L$  は  $L_0$  の非等方内部  $F$ -型でなければならない (§3.3 補題, §5.3). いま

$$\pi_0 : G_0 \rightarrow \text{Inn}(G_0) = G_0/Z(G_0)$$

を自然な準同型とする. このとき準同型

$$\varphi : \pi_0(M_0) \rightarrow \text{Inn}(M_0) = \text{Inn}(L_0) : \text{inn}(g) \mapsto \text{inn}(g)|_{M_0}$$

$$\psi : \pi_0(L_0) \rightarrow \text{Inn}(M_0) = \text{Inn}(L_0) : \text{inn}(g) \mapsto \text{inn}(g)|_{L_0}$$

は, コホモロジーの間の写像

$$\varphi^* : H^1(F, \pi_0(M_0)) \rightarrow H^1(F, \text{Inn}(L_0)), \quad \psi^* : H^1(F, \pi_0(L_0)) \rightarrow H^1(F, \text{Inn}(L_0))$$

を導く.

定理

$L$  が  $L_0$  の非等方内部  $F$ -型で, そのコホモロジー類を

$$\eta_{L_0}(L) \in \text{Im}(i_0 : H^1(F, \text{Inn}(L_0)) \rightarrow H^1(F, \text{Aut}(L_0)))$$

とする. このとき次の同値な関係が成り立つ

$$(I, L) \text{ は実現可能である} \iff \eta_{L_0}(L) \in \text{Im}(i_0 \circ \varphi^*) \iff \eta_{L_0}(L) \in \text{Im}(i_0 \circ \psi^*)$$



証明 まず左側の同値性を示す.  $(I, L)$  が実現可能とし,  $(I, L) = (I(G), D_G(S))$  とする. このとき §3.3 補題から, ある  $[z] \in H^1(F, \pi_0(M_0))$  により,  $G = (G_0)_\tau$ ,  $Z_G(S) = (M_0)_z$  とかける. これから  $\eta_{L_0}(L) = i_0(\varphi^*([z]))$  が従う. 逆に  $[z] \in H^1(F, \pi_0(M_0))$  により  $\eta_{L_0}(L) = i_0(\varphi^*([z]))$  となったとすると,  $(G_0)_z$  が求める実現を与える.

次に右側の同値性を示す.  $B^s$  は  $G_0$  の  $F$ -ボレル部分群で  $T^s$  は  $G_0$  の中でも極大  $F$ -トーラスであることを注意する.  $F$ -トーラス  $\bar{T}_0 := M_0/L_0 Z(G_0) = T^s/(T^s \cap L_0)Z(G_0)$  をとれば, 完全列

$$1 \rightarrow \pi_0(L_0) \rightarrow \pi_0(M_0) \rightarrow \bar{T}_0 \rightarrow 1$$

がある.  $(L_0, B^s \cap L_0, T^s \cap L_0)$  の単純ルート系は  $\Delta_0$  で,  $T^s/Z(G_0)$  は随伴群  $G_0/Z(G_0)$  の極大  $F$ -トーラスであることから

$$X(\bar{T}_0) = \sum_{\alpha \in \Delta - \Delta_0} \mathbf{z}\alpha^\vee$$

が従う. このことから §4.3 定理の証明と同じ論法で  $H^1(F, \bar{T}_0) = 1$  がわかる. ゆえにコホモロジーの可換図式

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, \pi_0(L_0)) & \longrightarrow & H^1(F, \pi_0(M_0)) & \longrightarrow & 1 \\ \psi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* & & \\ H^1(F, \text{Inn}(L_0)) & \xlongequal{\quad} & H^1(F, \text{Inn}(L_0)) & & \end{array}$$

から同値性が従う. □

次に  $\Gamma$ -図形の実現可能性の必要条件をいくつか述べる. そのために反転対合 (opposition involution) を定義する.

定義  $\Delta$  を単純ルート系として, それから生成されるルート系と正ルート系をそれぞれ  $R, R^+$  とする.  $R$  のワイル群の要素  $w_0$  で,  $w_0 R^+ = -R^+$  となるものをただ一つだけとることができる. このとき  $w_0(\Delta) = -\Delta$  となる. そこでディンキン図形の自己同型  $\iota_\Delta \in \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  を

$$\iota_\Delta(\alpha) = -w_0(\alpha) \quad (\alpha \in \Delta)$$

で定義する. これを  $\Delta$  の反転対合という.

命題

$\Gamma$ -図形  $I = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  が実現可能ならば  $I$  は  $\Delta$  の反転対合で不変である. 即ち

$$\iota_\Delta(\Delta_0) = \Delta_0 \quad \text{かつ} \quad \iota_\Delta \circ \tau(\gamma) = \tau(\gamma) \circ \iota_\Delta \quad (\gamma \in \Gamma)$$

が成り立つ.

証明  $I = I(G)$  とする.  $S$  は  $G$  の極大  $F$ -分裂トーラス,  $T$  は  $S$  を含む極大  $F$ -トーラスとして,  $\Delta$  は  $(G, T)$  に関するルート系の単純ルート系とみる.  $(G, S)$  に関する相対ルート系の単純ルート系を  ${}_F\Delta$  とおく. 以下 §3.2 と同じ記号を使う. 絶対ワイル群  $W$  の部分群  $W^\Gamma$  を

$$W^\Gamma := \{w \in W \mid w(X(T)_0) = X(T)_0\}$$

で定義する. このとき  $W_0$  は  $W^\Gamma$  の正規部分群になり, 写像  $w \mapsto w|_{X(S)}$  は同型  $W^\Gamma/W_0 \cong W_F$  を導く. いま  $\bar{w}_1 \in W_F$  を  $\bar{w}_1(F\Delta) = -F\Delta$  なるものとする. このとき  $w_1 \in W^\Gamma$  で,  $w_1|_{X(S)} = \bar{w}_1$  となるものが取れる. 取り方から  $-w_1^{-1}(R^+ - R_0^+) = R^+ - R_0^+$  となる. さらに  $w_2 \in W_0$  を  $w_2 R_0^+ = -w_1^{-1} R_0^+$  となるものとする.  $w_0 = w_1 w_2$  とおく.  $w_2$  は  $R^+ - R_0^+$  を不変にすることに注意すれば,  $w_0(R^+) = -R^+$  がわかる. 従って  $\iota_\Delta = -w_0$  と表せることが分かり, これから  $\iota_\Delta(\Delta_0) = \Delta_0$  がでる. §3.2 補題より, 各  $\gamma \in \Gamma$  に対して,  $w_\gamma \in W_0$  と取れた. これから  $\tau(\gamma)^{-1} w_0 \tau(\gamma)|_{X(S)} = \bar{w}_1$  が従う. 同型  $W^\Gamma/W_0 \cong W_F$  より,  $\tau(\gamma)^{-1} w_0 \tau(\gamma) = w_1 w'_\gamma$  となる  $w'_\gamma \in W_0$  が取れる. このとき

$$w'_\gamma(\Delta_0) = w_1^{-1} \tau(\gamma)^{-1} w_0 \tau(\gamma)(\Delta_0) = -w_1^{-1}(\Delta_0)$$

で, ワイル群の作用の単純推移性から  $w'_\gamma = w_2$  でなければならない. よって  $w_0 \tau(\gamma) = \tau(\gamma) w_0$  である. □

**定義**  $\Gamma$ -図形  $I = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  に対して,  $\Delta$  の  $\tau(\Gamma)$ -不変部分集合  $\Delta_1$  で,  $\Delta_0 \subset \Delta_1$  となるものとする. このとき  $\{\Delta_1, \Delta_0, \tau\}$  もまた  $\Gamma$ -図形になる. これを  $I$  の部分  $\Gamma$ -図形という.

**命題**

$\Gamma$ -図形  $I = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  が実現可能ならば, その任意の部分  $\Gamma$ -図形も実現可能である.

**証明**  $I$  を実現する単連結半単純  $F$ -代数群を  $G$  とし,  $S$  をその極大  $F$ -分裂トーラス,  $T$  を  $S$  を含む極大  $F$ -トーラスとする.  $\Delta \subset X(T)$  とみなしてよい. 部分  $\Gamma$ -図形を  $I_1 = \{\Delta_1, \Delta_0, \tau\}$  とするとき

$$T_{\Delta_1} = \left( \bigcap_{\alpha \in \Delta_1} \text{Ker } \alpha \right)^0, \quad M = Z_G(T_{\Delta_1})$$

とおく.  $M$  は  $F$ -パラボリック部分群のレビ部分群になるから, §6.1 補題よりその交換子群  $L = (M, M)$  は単連結になる. そして  $L$  の  $\Gamma$ -図形がちょうど  $I_1$  になる. □

## 6.5 佐武-Tits 図形

以下の数節において実現可能な既約  $\Gamma$ -図形の分類を行う. 既約  $\Gamma$ -図形が実現可能かどうかは, 例えば §6.4 の最初の定理に見られるように, 基礎体の特性に依存する. そこで分類の記述を単純化するために,  $\Gamma$ -図形を基礎体に依存する部分と見かけ上は基礎体に依存しない部分とに分離する.

まず佐武-Tits 図形を定義する.  $\Delta$  を既約単純ルート系とし, その反転対合を  $\iota_\Delta$  とする. 既約性からディンキン図形の自己同型群  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  は対称群  $S_n$  ( $n \leq 3$ ) となる.  $A$  を  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  の部分群として,  $A$  と  $\iota_\Delta$  の作用で不変な  $\Delta$  の部分集合  $\Delta_0$  をとる. 三つ組  $(\Delta, \Delta_0, A)$  に対して, 図形  $\mathcal{S}_{(\Delta, \Delta_0, A)}$  を

$$\mathcal{S}_{(\Delta, \Delta_0, A)} := \left( \begin{array}{l} \mathcal{D}_\Delta \text{ 上で, } \Delta_0 \text{ の要素を黒丸, } \Delta - \Delta_0 \text{ の要素を白丸で示し} \\ \Delta \text{ 上 } A \text{ の作用は互いに移りあう丸を矢印で結んだもの.} \end{array} \right)$$

により定義し, これを佐武-Tits 図形 (**Satake-Tits diagram**) とよぶ. 以下  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  の作用でうつりあう佐武-Tits 図形は同一視する. これにより  $(\Delta, \Delta_0, A)$  の合同類

$$J = \{(\Delta, \sigma(\Delta_0), \sigma A \sigma^{-1}) \mid \sigma \in \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)\}$$

と佐武-Tits 図形は一対一に対応するので、 $J$  に対応する佐武-Tits 図形を  $\mathcal{S}_J$  と表す。また  $A$  の位数を

$$k := |A| \in \{1, 2, 3, 6\}$$

とすれば、容易に分かるように  $J$  は三つ組  $\{\Delta, \Delta_0, k\}$  から決まる。(実際このデータから、 $\{\Delta, \Delta_0, k\} = \{D_4\text{-型}, \emptyset, 2\}$  以外の場合は  $A$  が決まってしまう。) このことから

$$\mathcal{S}_J = \{\Delta, \Delta_0, k\}$$

とも表す。

次に  $I = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  が  $\iota_\Delta$ -不変な既約  $\Gamma$ -図形ならば、

$$\mathcal{S}_I := \{\Delta, \Delta_0, |\tau(\Gamma)|\}$$

は佐武-Tits 図形になる。これを  $I$  の佐武-Tits 図形と呼ぶ。

与えられた佐武-Tits 図形  $\mathcal{S}$  に対して、 $F$  上で実現可能な既約  $\Gamma$ -図形  $I$  で  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_I$  となるものが存在するとき、 $\mathcal{S}$  は  $F$  上実現可能という。基礎体  $F$  を明示しない場合には、単に実現可能という。

注意 岩波数学辞典の図表 (公式 5) や Helgason の教科書 ("Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces", Academic Press, 1978, Ch. X, Table VI) では、佐武図形の記述においてガロワ群の作用が白丸にだけに記入されているが、黒丸にも記入するのが正しい書き方である ([Sa1, p. 85])。実数体上で考える場合には、Cartan の定理から単連結コンパクト群はそのディンキン図形だけで同型を除き一意に定まるので、黒丸でのガロワ群の作用が記入されていなくても問題は生じない。しかし一般の体ではそうではないので、ガロワ群の作用を黒丸でも考える必要がある。例えば有理数体上ふたつの図形

$$\mathcal{S} : \bullet - \bullet \quad \mathcal{S}' : \bullet - \bullet$$

で見ると、 $\mathcal{S}$  は  $\mathbf{Q}$  上の斜体  $D$ ,  $[D : \mathbf{Q}] = 9$  の特殊線型群  $SL_1(D)$  から従う佐武-Tits 図形で、他方  $\mathcal{S}'$  は  $\mathbf{Q}$  上の非等方的な特殊ユニタリ群  $SU_3$  から従う佐武-Tits 図形になる。

#### 補題

$\Delta$  は既約単純ルート系で、 $I = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  と  $I' = \{\Delta, \Delta'_0, \tau'\}$  は共に  $\iota_\Delta$ -不変な  $\Gamma$ -図形とする。このとき 次の同値な関係がある。

$$I \text{ と } I' \text{ は合同である} \iff \mathcal{S}_I = \mathcal{S}_{I'} \text{ かつ } G^s(\Delta)_\tau \text{ と } G^s(\Delta)_{\tau'} \text{ は } F\text{-同型になる}$$

証明は  $\Delta$  が  $D_4$ -型でなければ自明である。また  $D_4$ -型の場合は  $\tau(\Gamma)$  の位数による場合分けて証明できる。

この補題から、実現可能  $\Gamma$ -図形の分類は半分裂群の分類と  $F$  上実現可能な佐武-Tits 図形の分類に帰着される。単連結半分裂群の  $F$ -同型類は §2.5 定理から

$$H^1(F, \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)) = \text{Hom}(\Gamma, \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)) \text{ の共役類}$$

で分類される。

## 6.6 古典型佐武-Tits 図形の分類

$\mathcal{S} = \{\Delta, \Delta_0, k\}$  は佐武-Tits 図形で,  $\Delta$  は古典型単純ルート系かつ  $k \leq 2$  と仮定する. このとき  $\Delta$  の型と  $k$  の値から次の 6 タイプが生じうる.

$${}^1A_n, {}^2A_n, B_n, C_n, D_n, {}^2D_n$$

Weil の定理から与えられた体上の古典型単純随伴群はすべて対合をもつ中心的単純環の自己同型群として得られる. このことから実現可能な佐武-Tits 図形をすべて記述できる. ここでは結果だけを述べる. 以下現れる佐武-Tits 図形は

$${}^kX_{n,\ell}^{(d)} = \{\Delta, \Delta_0, k\}, \quad \begin{cases} X_n \text{ は } \Delta \text{ のディンキン型} \\ d^2 \text{ は実現に現れる斜体の次数} \\ \ell \text{ は } \Delta - \Delta_0 \text{ の軌道の個数} \end{cases}$$

という具合に, 名前  ${}^kX_{n,\ell}^{(d)}$  で表される. 各分類の結果は

$$\begin{aligned} & \text{(名前 : } {}^kX_{n,\ell}^d \text{)} \\ & \text{(佐武-Tits 図形)} \\ & \text{(} F\Delta({}^kX_{n,\ell}^d) \text{ のディンキン型)} \end{aligned}$$

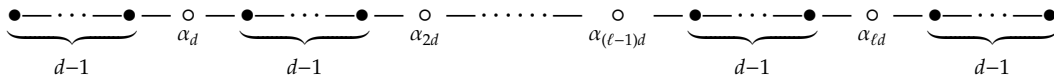
と表示される. ここで  $F\Delta({}^kX_{n,\ell}^d)$  は  $\Delta - \Delta_0$  の軌道から定まる相対ルート系とする.

${}^1A_n$ -型

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1} - \alpha_n$$

実現可能な佐武-Tits 図形は

$${}^1A_{n,\ell}^{(d)} = \{\Delta, \Delta - \{\alpha_d, \alpha_{2d}, \dots, \alpha_{\ell d}\}, 1\} \quad (d(\ell + 1) = n + 1)$$



$$F\Delta({}^1A_{n,\ell}^{(d)}) = A_\ell$$

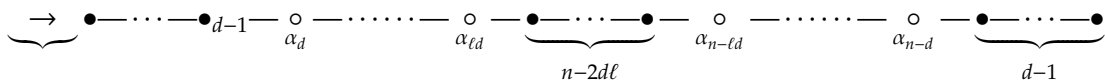
(6.6.1)  $F$  上  ${}^1A_{n,\ell}^{(d)}$  が存在するための必要十分条件は  $F$  を中心にもつ斜体  $D$  で  $[D : F] = d^2$  となるものが存在することである.

${}^2A_n$ -型

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1} - \alpha_n$$

実現可能な佐武-Tits 図形は

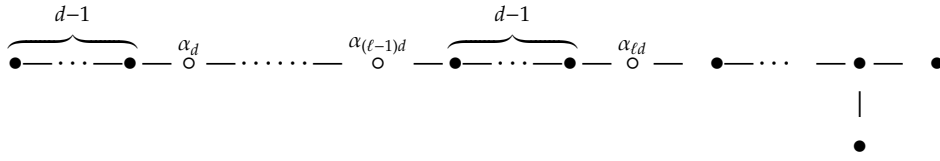
$${}^2A_{n,\ell}^{(d)} = \{\Delta, \Delta - \{\alpha_d, \dots, \alpha_{\ell d}, \alpha_{n-\ell d}, \dots, \alpha_{n-d}\}, 2\} \quad (d|(n+1), 2\ell d \leq n+1)$$



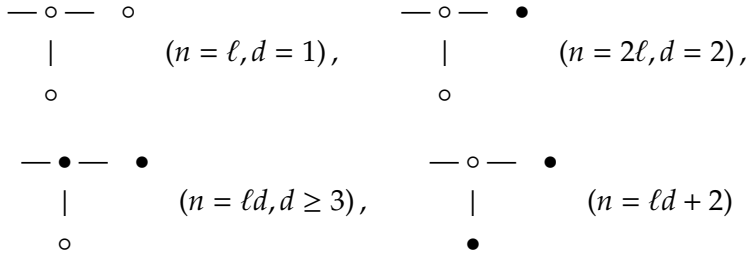


実現可能な佐武-Tits 図形は

$${}^1D_{n,\ell}^{(d)} = \{\Delta, \Delta - \{\alpha_d, \alpha_{2d}, \dots, \alpha_{\ell d}\}, 1\} \quad (d \text{ は } 2 \text{ のべきで } 2n \text{ の約数, } \ell d \leq n, \ell d + 1 \neq n)$$



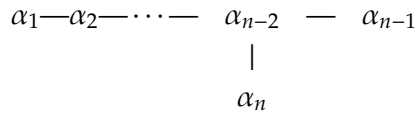
ただし  $n - \ell d \leq 2$  のときには右端は次のようになる



$$F\Delta({}^1D_{n,\ell}^{(d)}) = \begin{cases} B_\ell & (2\ell d < n) \\ D_\ell & (2\ell d = n) \end{cases}$$

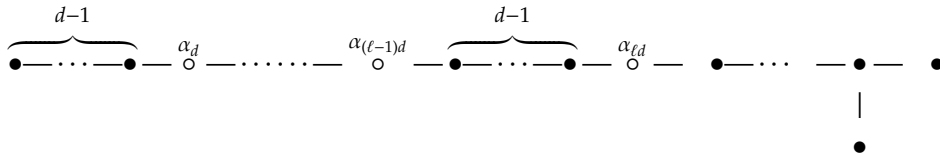
(6.6.5)  $F$  上  ${}^1D_{n,\ell}^{(d)}$  が存在するための必要十分条件は,  $F$  を中心にもつ次数  $d^2$  の斜体  $D$  とその第 1 種直交対合  $\rho$  が存在して, かつ  $D$  上  $2d^{-1}n$ -次元, ヴェイト指数  $\ell$ , 判別式 = 1 の非退化  $\rho$ -エルミート形式が存在することである.

${}^2D_n$ -型

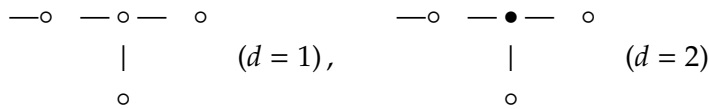


実現可能な佐武-Tits 図形は

$${}^2D_{n,\ell}^{(d)} = \{\Delta, \Delta - \{\alpha_d, \alpha_{2d}, \dots, \alpha_{\ell d}\}, 2\} \quad (d \text{ は } 2 \text{ のべきで } 2n \text{ の約数, } \ell d \leq n - 1)$$



ただし  $\ell d = n - 1$  のときには,  $d = 1, 2$  となり右端は次のようになる



$$F\Delta({}^2D_{n,\ell}^{(d)}) = \begin{cases} B_\ell & (2\ell d < n) \\ D_\ell & (2\ell d = n) \end{cases}$$

(6.6.6)  $F$  上  ${}^2D_{n,\ell}^{(d)}$  が存在するための必要十分条件は,  $F$  を中心にもつ次数  $d^2$  の斜体  $D$  とその第 1 種直交対合  $\rho$  が存在して, かつ  $D$  上  $2d^{-1}n$ -次元, ヴィット指数  $\ell$ , 判別式  $\neq 1$  の非退化  $\rho$ -エルミート形式が存在することである.

## 6.7 例外型佐武-Tits 図形の分類

最初に例外型の分類に使われる条件を整理しておく.  $I = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  を既約  $\Gamma$ -図形とする. 対応する半分裂群を  $G_0 = G^s(\Delta)_\tau$ ,  $L_0 = G^s(\Delta_0)_\tau$ ,  $\pi_0(L_0) = L_0/L_0 \cap Z(G_0)$  とおく. いまコホモロジー類  $[z] \in H^1(F, \pi_0(L_0))$  は, その  $H^1(F, \text{Inn}(L_0))$  への像が  $L_0$  の非等方内部  $F$ -型に対応しているときに非等方類とよばれる. 実現可能  $\Gamma$ -図形の必要条件 (§6.5 定理, §6.4 定理, §6.4 命題, §3.2 補題 (6), §6.5 補題, §6.6 の分類) から従う次の 4 つの条件を考えよう.

- (a)  $I$  は  $\Delta$  の反転対合  $\iota_\Delta$  で不変である.
- (b)  $H^1(F, \pi_0(L_0))$  は非等方類を含む.
- (c)  $\Delta$  が既約ならば,  $\tau(\Gamma)$ -軌道の集合  $\Delta(I) := \tau(\Gamma) \setminus (\Delta - \Delta_0)$  は既約単純ルート系の構造を持つ. さらにこのとき  $\Delta$  の最高ルート  $\tilde{\alpha}$  と  $\Delta(I)$  の最高ルート  $\tilde{a}$  を

$$\tilde{\alpha} = \sum_{\beta \in \Delta} c_{\tilde{\alpha}, \beta} \beta, \quad \tilde{a} = \sum_{b \in \Delta(I)} c_{\tilde{a}, b} b$$

と書き表したとき,

$$c_{\tilde{a}, b} = \sum_{\beta \in b} c_{\tilde{\alpha}, \beta}$$

という関係がある.

- (d)  $I_1$  が  $I$  の真の部分  $\Gamma$ -図形ならば,  $I_1$  は条件 (a), (b), (c) をみたす. さらに  $I_1$  が古典型ならば  $I_1$  は実現可能である.

とくに §6.4 定理から (b) をみたす  $I$  は実現可能である. さて  $\mathcal{S} = \{\Delta, \Delta_0, k\}$  は佐武-Tits 図形で,  $\Delta$  は例外型とする.  $\Delta, k$  について次の 8 タイプが生じうる.

$$G_2, \quad F_4, \quad {}^1E_6, \quad {}^2E_6, \quad E_7, \quad E_8, \quad {}^3D_4, \quad {}^6D_4$$

それぞれの場合に実現可能佐武-Tits 図形を決定する. 以下現れる佐武-Tits 図形は Tits の記号に従って

$${}^kX_{n,\ell}^d = \{\Delta, \Delta_0, k\}, \quad \begin{cases} X_n \text{ は } \Delta \text{ のディンキン型} \\ d \text{ は非等方核の次元 (§6.4 の記号で } d = \dim M_0) \\ \ell \text{ は } \Delta - \Delta_0 \text{ の軌道の個数} \end{cases}$$

という具合に, 名前  ${}^kX_{n,\ell}^d$  で表される. 各分類の結果は次のように表示される.

$$(\text{名前} : {}^kX_{n,\ell}^d) \quad (\text{佐武-Tits 図形}) \quad ({}_F\Delta({}^kX_{n,\ell}^d) \text{ のディンキン型})$$

ここで  ${}_F\Delta({}^kX_{n,\ell}^d)$  は  $\Delta - \Delta_0$  の軌道から定まる単純ルート系とする. すべての場合において非等方型  $\{\Delta, \Delta, k\}$  と半分裂型  $\{\Delta, \emptyset, k\}$  が実現可能佐武-Tits 図形になりうる. ただし非等方型が  $F$  上実現

されるためには  $H^1(F, \text{Inn}(G^s(\Delta)_\tau))$  が非等方類をもたなければならない. また分類の証明は消去法によるもので, 実現可能ではない佐武-Tits 図形を取り除いていく. 残ったものが本当に実現可能かどうかは確かめていないので, ここに述べる証明だけでは "実現可能な佐武-Tits-図形になりうる", ということしかわからない. 以下では  $\bar{F}$  の中の 1 の  $n$ -乗根のなす巡回群を  $\mu_n$  で,  $n$  文字の置換群を  $S_n$  で表す. また各証明に現れる佐武-Tits 図形  $\mathcal{S}$  は  $\mathcal{S} = \{\Delta, \Delta_0, k\}$  で与えられるものとし, また既約  $\Gamma$ -図形  $I$  は  $I = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  なるものとする. このとき  $G_0 = G^s(\Delta)_\tau$ ,  $L_0 = G^s(\Delta_0)_\tau$  とおく.  $Z(G_0)$  は  $G_0$  の中心とする. 基礎体  $F$  は特定しないジェネリックなものとする.

**注意** ここでは佐武-Tits 図形の実現可能性については議論しないが, 実際は Tits[T2] の結果によりここに表れるすべての佐武-Tits 図形は適当な体上で実現可能である. また, 代数体上実現可能な佐武-Tits 図形については §9.4 で分類される.



$G_2$ -型

$$\alpha_1 \Leftarrow \alpha_2$$

実現可能な佐武-Tits 図形になりうるのは次の2つである.

$$\begin{array}{lll} G_{2,0}^{14} = \{\Delta, \Delta, 1\} & \bullet \Leftarrow \bullet & \emptyset \\ G_{2,2}^0 = \{\Delta, \emptyset, 1\} & \circ \Leftarrow \circ & G_2 \end{array}$$

証明  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$  とする.  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) = 1$  より  $\tau = 1$  で  $\Delta(I) = \Delta - \Delta_0$  となる. もし  $|\Delta_0| = 1$  ならば,  $L_0 = \text{SL}_2$  と  $Z(G_0) = 1$  から  $\pi_0(L_0) = \text{SL}_2$  となり,  $H^1(F, L_0) = 1$  は非等方類を含まない. ゆえにこの場合いかなる  $I$  も実現可能ではない.  $\square$

$F_4$ -型

$$\alpha_1 - \alpha_2 \implies \alpha_3 - \alpha_4$$

実現可能な佐武-Tits 図形になりうるのは次の3つである.

$$\begin{array}{lll} F_{4,0}^{52} = \{\Delta, \Delta, 1\} & \bullet - \bullet \implies \bullet - \bullet & \emptyset \\ F_{4,1}^{21} = \{\Delta, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, 1\} & \bullet - \bullet \implies \bullet - \circ & BC_1 \\ F_{4,4}^0 = \{\Delta, \emptyset, 1\} & \circ - \circ \implies \circ - \circ & F_4 \end{array}$$

さらに

(6.7.1)  $F$  上  $F_{4,1}^{21}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, \text{Spin}_7)$  が非等方類をもつことである.

証明  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$  とする.  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) = 1$  より  $\tau = 1$  で  $\Delta(I) = \Delta - \Delta_0$  となる.  $\Delta$  の最高ルートは  $\bar{\alpha} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$  である. いま  $\Delta_0 \neq \Delta, \emptyset$  とすれば  $\Delta(I)$  は高々ランク3の既約ルート系である. ランク3以下の既約ルート系の最高ルートの係数は高々3で, しかも3が現れるのは  $G_2$ -型に限る. このことから  $\alpha_3 \in \Delta_0$  で,  $\alpha_2 \notin \Delta_0$  ならば  $|\Delta_0| = 2$  がわかる. ゆえに実現可能な  $I$  の可能性として

$$\Delta_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad \{\alpha_1, \alpha_3\}, \quad \{\alpha_2, \alpha_3\}, \quad \{\alpha_3, \alpha_4\}$$

の場合が残る. これらの場合に対応して  $L_0$  は

$$L_0 = \text{Spin}_7, \quad \text{Sp}_6, \quad \text{SL}_2 \times \text{SL}_2, \quad \text{Sp}_4, \quad \text{SL}_3$$

となる.  $Z(G_0) = 1$  だから  $\pi_0(L_0) = L_0$  である. また  $H^1(F, \text{SL}_n) = H^1(F, \text{Sp}_n) = 1$  より,  $L_0 = \text{Spin}_7$  以外は  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = 1$  となり非等方類をもたない. 従ってこの場合以外はいかなる  $I$  も実現可能ではない.  $\square$

${}^1E_6$ -型

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & - & \alpha_3 & - & \alpha_4 & - & \alpha_5 & - & \alpha_6 \\ & & & & | & & & & \\ & & & & \alpha_2 & & & & \end{array}$$

実現可能な佐武-Tits 図形になりうるのは次の4つである.

$$\begin{array}{lcl} {}^1E_{6,0}^{78} = \{\Delta, \Delta, 1\} & \begin{array}{ccccccccc} \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\ & & & & | & & & & \\ & & & & \bullet & & & & \end{array} & \emptyset \\ {}^1E_{6,2}^{28} = \{\Delta, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, 1\} & \begin{array}{ccccccccc} \circ & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \circ \\ & & & & | & & & & \\ & & & & \bullet & & & & \end{array} & A_2 \\ {}^1E_{6,2}^{16} = \{\Delta, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}, 1\} & \begin{array}{ccccccccc} \bullet & - & \bullet & - & \circ & - & \bullet & - & \bullet \\ & & & & | & & & & \\ & & & & \circ & & & & \end{array} & G_2 \\ {}^1E_{6,6}^0 = \{\Delta, \emptyset, 1\} & \begin{array}{ccccccccc} \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & & & & | & & & & \\ & & & & \circ & & & & \end{array} & E_6 \end{array}$$

さらに

(6.7.2)  $F$  上  ${}^1E_{6,2}^{28}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, \text{Spin}_8)$  が非等方類もつことである.

(6.7.3)  $F$  上  ${}^1E_{6,2}^{16}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, \text{PSL}_3)$  が非等方類をもつことである.

証明  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$  とする.  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) = \{1, \iota_\Delta\}$  で  $\Delta$  の最高ルートは

$$\tilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$$

である.  $\tau = 1$  より  $\Delta(I) = \Delta - \Delta_0$  となる. また  $Z(G_0)$  は位数3の巡回群  $\mu_3$  で

$$Z(G_0) = \{\alpha_1^\vee(\zeta)\alpha_3^\vee(\zeta^{-1})\alpha_5^\vee(\zeta)\alpha_6^\vee(\zeta^{-1}) \mid \zeta^3 = 1\}$$

である.  $1 \leq |\Delta_0| \leq 5$  の場合を調べる. 条件 (a) から  $\Delta_0$  は反転対合  $\iota_\Delta$  で不変でなければならない.

- $|\Delta_0| = 1$  の場合:

$L_0 = \text{SL}_2$  より  $\pi_0(L_0) = L_0$  となり  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = 1$  は非等方類を含まない.

- $|\Delta_0| = 2$  の場合:

$\Delta_0 = \{\alpha_1, \alpha_6\}, \{\alpha_3, \alpha_5\}$  ならば  $L_0 = \text{SL}_2 \times \text{SL}_2$  となるので,  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = 1$  は非等方類を含まない.

$\Delta_0 = \{\alpha_2, \alpha_4\}$  ならば  $\Delta(I)$  はランク4の既約単純ルート系で, その最高ルートの係数は  $(1, 2, 2, 1)$  であるが, このようなランク4の既約ルート系はない.

- $|\Delta_0| = 3$  の場合:

$\Delta_0 = \{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6\}$  または  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6\}$  である. この場合  $L_0 = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$  となり,  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = 1$  は非等方類を含まない.

- $|\Delta_0| = 4$  の場合:

$\Delta_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}$  ならば  $L_0 = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_3$  となる. このとき  $\pi_0(L_0) = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \pi_0(\mathrm{SL}_3)$  で  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = H^1(F, \pi_0(\mathrm{SL}_3))$  は  $L_0$  の  $\mathrm{SL}_2$  に対応する部分の非等方類を含まない.

$\Delta_0 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$  ならば  $\pi_0(L_0) = L_0 = \mathrm{Spin}_8$  なので,  $H^1(F, \mathrm{Spin}_8)$  が非等方類を含めば  $I$  は実現可能な  $\Gamma$ -図形になる.

$\Delta_0 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$  ならば  $\pi_0(L_0) = (\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/Z(G_0)$  より,  $H^1(F, (\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/Z(G_0))$  が非等方類を含めば  $I$  は実現可能な  $\Gamma$ -図形になる.  $Z(G_0) = \mu_3$  は  $\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3$  に対角に入ることに注意する. 分解完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}_3 \longrightarrow \pi_0(L_0) \longrightarrow \mathrm{PSL}_3 \longrightarrow 1$$

から  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = H^1(F, \mathrm{PSL}_3)$  となる.

- $|\Delta_0| = 5$  の場合:

$\Delta_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$  ならば  $L_0 = \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_3$  で,  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = H^1(F, \pi_0(\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3))$  となり,  $H^1(F, \pi_0(L_0))$  は  $\mathrm{SL}_2$  に対応する部分で非等方類をもたないので,  $I$  は実現可能ではない.

$\Delta_0 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$  の場合.  $L_0 = \mathrm{SL}_6$  で,  $\pi_0(L_0) = \mathrm{SL}_6/Z(G_0)$  となる. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, \pi_0(L_0)) & \longrightarrow & H^2(F, \mu_3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(F, \mathrm{PSL}_6) & \longrightarrow & H^2(F, \mu_6) \end{array}$$

を考える. 古典群の分類から  $\mathrm{PSL}_6$  の非等方型に対応するコホモロジー類は  $H^2(F, \mu_6)$  の中で位数 6 でなければならない. しかし, もし  $H^1(F, \pi_0(L_0))$  が非等方類をもてばその  $H^2(F, \mu_6)$  の位数は高々 3 である. ゆえに  $H^1(F, \pi_0(L_0))$  は非等方類を含まない.

□

${}^2E_6$ -型

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & - & \alpha_3 & - & \alpha_4 & - & \alpha_5 & - & \alpha_6 \\ & & & & | & & & & \\ & & & & \alpha_2 & & & & \end{array}$$

実現可能な佐武-Tits 図形になりうるのは次の 6 つである.

${}^2E_{6,0}^{78} = \{\Delta, \Delta, 2\}$	$\begin{array}{ccccccccc} \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\ & & & &   & & & & \\ & & & & \bullet & & & & \end{array}$	$\emptyset$
${}^2E_{6,1}^{35} = \{\Delta, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}, 2\}$	$\begin{array}{ccccccccc} \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\ & & & &   & & & & \\ & & & & \circ & & & & \end{array}$	$BC_1$
${}^2E_{6,1}^{29} = \{\Delta, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, 2\}$	$\begin{array}{ccccccccc} \circ & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \circ \\ & & & &   & & & & \\ & & & & \bullet & & & & \end{array}$	$BC_1$
${}^2E_{6,2}^{16''} = \{\Delta, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}, 2\}$	$\begin{array}{ccccccccc} \bullet & - & \bullet & - & \circ & - & \bullet & - & \bullet \\ & & & &   & & & & \\ & & & & \circ & & & & \end{array}$	$G_2$
${}^2E_{6,2}^{16'} = \{\Delta, \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, 2\}$	$\begin{array}{ccccccccc} \circ & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \circ \\ & & & &   & & & & \\ & & & & \circ & & & & \end{array}$	$BC_2$
${}^2E_{6,4}^2 = \{\Delta, \emptyset, 2\}$	$\begin{array}{ccccccccc} \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & & & &   & & & & \\ & & & & \circ & & & & \end{array}$	$E_6$

さらに

(6.7.4)  $F$  上  ${}^2E_{6,1}^{35}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, (SL_6)_\tau)$  が非等方類をもつことである.

(6.7.5)  $F$  上  ${}^2E_{6,1}^{29}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, (Spin_8)_\tau)$  が非等方類をもつことである.

(6.7.6)  $F$  上  ${}^2E_{6,2}^{16''}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, (PSL_3)_\tau)$  が非等方類をもつことである.

(6.7.7)  $F$  上  ${}^2E_{6,2}^{16'}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, (SL_4)_\tau)$  が非等方類をもつことである.

証明  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$  とする.  $\tau(\Gamma) = \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) = \{1, \iota_\Delta\}$  で  $\Delta$  の最高ルートは

$$\tilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$$

である.  $\Delta$  の  $\tau(\Gamma)$ -軌道は

$$a_1 = \{\alpha_1, \alpha_6\}, \quad a_2 = \{\alpha_3, \alpha_5\}, \quad a_3 = \{\alpha_2\}, \quad a_4 = \{\alpha_4\}$$

の 4 つである.  $\Delta(I) = \tau(\Gamma) \backslash (\Delta - \Delta_0)$  とする.

- $|\Delta(I)| = 1$  の場合:

$\Delta(I)$  はランク 1 の単純ルート系だから, その最高ルートの係数は高々 2 である. ゆえに  $\Delta(I) = \{a_2\}, \{a_4\}$  の場合, (c) がみたされない.  $\Delta(I) = \{a_1\}, \{a_3\}$  の場合, それぞれ  $\pi(L_0) = L_0 = \text{Spin}_8, \text{SL}_6$  となり,  $H^1(F, (L_0)_\tau)$  が非等方類をもてば  $I$  は実現可能になる.

- $|\Delta(I)| = 2$  の場合:

$\Delta(I)$  はランク 2 の単純ルート系だから, その最高ルートの係数は高々 3 である. ゆえに  $a_2 \in \Delta(I)$  ならば (c) がみたされない. また  $\Delta(I) = \{a_1, a_4\}$  ならば,  $L_0 = \text{SL}_2 \times (\text{SL}_2 \times \text{SL}_2)_\tau$  から  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = H^1(F, \pi_0((\text{SL}_2 \times \text{SL}_2)_\tau))$  は  $\text{SL}_2$  に対応する非等方類を含まない.

$\Delta(I) = \{a_1, a_3\}$  ならば  $\pi_0(L_0) = L_0 = (\text{SL}_4)_\tau$  から  $H^1(F, \pi_0((\text{SL}_4)_\tau))$  が非等方類をもてば実現可能になる.

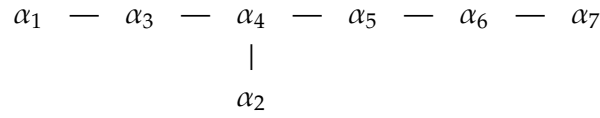
$\Delta(I) = \{a_3, a_4\}$  ならば  $L_0 = (\text{SL}_3 \times \text{SL}_3)_\tau$  で,  $H^1(F, \pi_0((\text{SL}_3 \times \text{SL}_3)_\tau)/Z(G_0)) = H^1(F, (\text{PSL}_3)_\tau)$  が非等方類をもてば実現可能になる.

- $|\Delta(I)| = 3$  の場合:

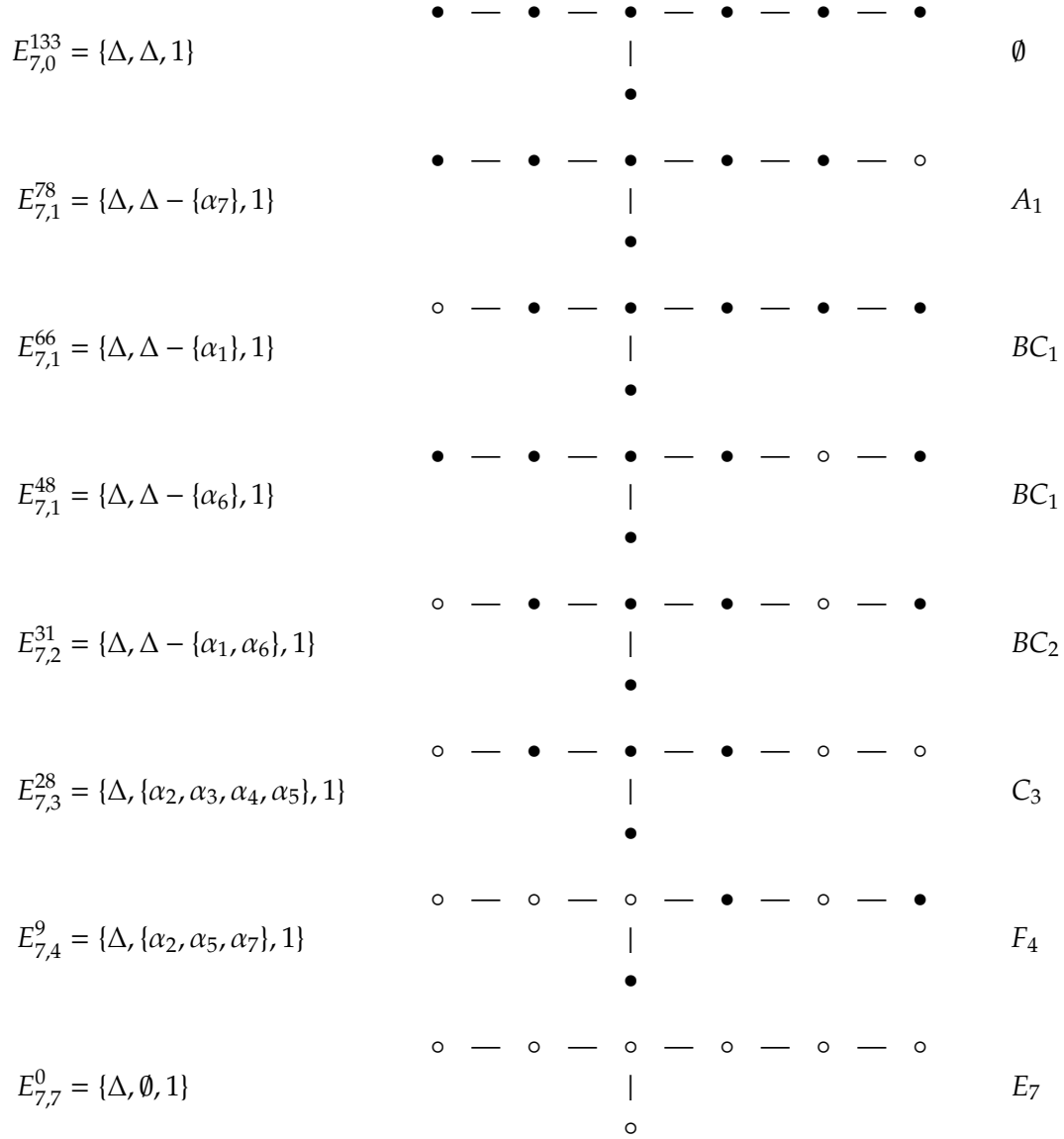
$\Delta(I)$  はランク 3 の単純ルート系になる. その最高ルートの係数は高々 3 だから,  $a_2 \in \Delta(I)$  ならば (c) がみたされない. よって  $\Delta(I) = \{a_1, a_3, a_4\}$  の場合を調べればよい. これの最高ルートの係数は 2, 2, 3 となるが, この係数の組み合わせの最高ルートをもつランク 3 の既約単純ルート系は存在しないから, この場合も  $I$  は実現可能になり得ない.

□

$E_7$ -型



実現可能な佐武-Tits 図形になりうるのは次の 8 つである.



(6.7.8)  $F$  上  $E_{7,1}^{78}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, G^s(E_6))$  が非等方類をもつことである.

(6.7.9)  $F$  上  $E_{7,1}^{66}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, \text{Spin}_{12}/\mu_2)$  が非等方類をもつことである.

(6.7.10)  $F$  上  $E_{7,1}^{48}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, (\text{Spin}_{10} \times \text{SL}_2)/\mu_2)$  が非等方類をもつことである. ここで  $\mu_2$  は  $\text{Spin}_{10} \times \text{SL}_2$  に対角に埋め込めれる.

(6.7.11)  $F$  上  $E_{7,2}^{31}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, (\text{Spin}_8 \times \text{SL}_2)/\mu_2)$  が非等方類をもつことである. ここで  $\mu_2$  は  $\text{Spin}_8 \times \text{SL}_2$  に対角に埋め込まれる.

(6.7.12)  $F$  上  $E_{7,3}^{28}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, \text{Spin}_8)$  が非等方類をもつことである.

(6.7.13)  $F$  上  $E_{7,4}^9$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, \mathrm{PSL}_2)$  が非等方類をもつことである.

証明  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$  とする.  $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) = 1$  より  $\Delta(I) = \Delta - \Delta_0$  である.  $G_0$  の中心は

$$Z(G_0) = \{\alpha_2^\vee(\zeta)\alpha_5^\vee(\zeta)\alpha_7^\vee(\zeta) \mid \zeta = \pm 1\} \cong \mu_2$$

で  $\Delta$  の最高ルートは

$$\tilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$$

である.

- $|\Delta_0| \leq 2$  の場合:

この場合  $\pi_0(L_0) = L_0$  であつ  $L_0$  は  $\mathrm{SL}_n$  のいくつかの積で表されるから,  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = 1$  となり (b) がみたされない.

- $|\Delta_0| = 3$  の場合:

$\Delta_0 \neq \{\alpha_2, \alpha_5, \alpha_7\}$  ならば上と同じ理由で  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = 1$  となり (b) がみたされない.

$\Delta_0 = \{\alpha_2, \alpha_5, \alpha_7\}$  ならば,

$$\pi_0(L_0) = (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2) / \mu_2$$

となる. ただし  $\mu_2$  は対角に埋め込まれる. 分解完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \longrightarrow \pi_0(L_0) \longrightarrow \mathrm{PSL}_2 \longrightarrow 1$$

より  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = H^1(F, \mathrm{PSL}_2)$  となるので, これが非等方類をもてば  $I$  は実現可能になる.

- $|\Delta_0| = 4$  の場合:

$\Delta(I)$  はランク 3 の単純ルート系になるからその最高ウェイトの係数は高々 2 である. よって (c) をみたすのは

$$\Delta(I) \cap \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} = \emptyset$$

の場合に限る. 従つて

$$\Delta(I) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6\}, \quad \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_7\}, \quad \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7\}, \quad \{\alpha_2, \alpha_6, \alpha_7\}$$

の場合が残る.

$\Delta(I) \neq \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7\}$  ならば  $\pi_0(L_0) = L_0$  となりかつ  $L_0$  は  $\mathrm{SL}_4 \times \mathrm{SL}_2$  または  $\mathrm{SL}_5$  に同型になるので (b) がみたされない.

$\Delta(I) = \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7\}$  ならば  $\pi_0(L_0) = L_0 = \mathrm{Spin}_8$  となる. ゆえに  $H^1(F, \mathrm{Spin}_8)$  が非等方類をもてば  $I$  は実現可能になる.

- $|\Delta_0| = 5$  の場合:

$\Delta(I)$  はランク 2 の単純ルート系になるからその最高ルートの係数は高々 3 であるから, (c) をみたすには  $\alpha_4 \notin \Delta(I)$  でなければならない. さらに  $\alpha_2 \notin \Delta_0$  ならば  $\pi_0(L_0) = L_0$  で,  $L_0$  は  $\mathrm{SL}_n$  の直積で表されるから (b) がみたされない. よつて  $\alpha_2 \notin \Delta(I)$  とする. さらに  $\alpha_3 \in \Delta(I)$  また





$E_8$ -型

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_1 & - & \alpha_3 & - & \alpha_4 & - & \alpha_5 & - & \alpha_6 & - & \alpha_7 & - & \alpha_8 \\ & & & & | & & & & & & & & \\ & & & & \alpha_2 & & & & & & & & \end{array}$$

実現可能な佐武-Tits 図形になりうるのは次の7つである.

$E_{8,0}^{248} = \{\Delta, \Delta, 1\}$	$\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ $ $ $\bullet$	$\emptyset$
$E_{8,1}^{133} = \{\Delta, \Delta - \{\alpha_8\}, 1\}$	$\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \circ$ $ $ $\bullet$	$BC_1$
$E_{8,1}^{91} = \{\Delta, \Delta - \{\alpha_1\}, 1\}$	$\circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ $ $ $\bullet$	$BC_1$
$E_{8,2}^{78} = \{\Delta, \Delta - \{\alpha_7, \alpha_8\}, 1\}$	$\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \circ - \circ$ $ $ $\bullet$	$G_2$
$E_{8,2}^{66} = \{\Delta, \Delta - \{\alpha_1, \alpha_8\}, 1\}$	$\circ - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \circ$ $ $ $\bullet$	$BC_2$
$E_{8,4}^{28} = \{\Delta, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, 1\}$	$\circ - \bullet - \bullet - \bullet - \circ - \circ - \circ$ $ $ $\bullet$	$F_4$
$E_{8,8}^0 = \{\Delta, \emptyset, 1\}$	$\circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ$ $ $ $\circ$	$E_8$

(6.7.14)  $F$  上  $E_{8,1}^{133}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, G^s(E_7))$  が非等方類をもつことである.

(6.7.15)  $F$  上  $E_{8,1}^{91}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, \text{Spin}_{14})$  が非等方類をもつことである.

(6.7.16)  $F$  上  $E_{8,2}^{78}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, G^s(E_6))$  が非等方類をもつことである.

(6.7.17)  $F$  上  $E_{8,2}^{66}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, \text{Spin}_{12})$  が非等方類をもつことである.

(6.7.18)  $F$  上  $E_{8,4}^{28}$  が存在するための必要十分条件は  $H^1(F, \text{Spin}_8)$  が非等方類をもつことである.

証明  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$  とする.  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) = 1$  より  $\Delta(I) = \Delta - \Delta_0$  である. また  $Z(G_0) = 1$  より  $\pi_0(L_0) = L_0$  となる.  $\Delta$  の最高ルートは

$$\tilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8$$

である.

- $|\Delta_0| \leq 3$  の場合:

この場合  $\pi_0(L_0)$  は  $SL_n$  の直積になるので  $H^1(F, \pi_0(L_0)) = 1$  となり (b) がみたされない。

- $|\Delta_0| = 4$  の場合:

$\Delta_0 \neq \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$  ならば  $\pi_0(L_0)$  は  $SL_n$  の直積になるので (b) がみたされない。

$\Delta_0 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$  ならば  $\pi_0(L_0) = Spin_8$  で  $H^1(F, Spin_8)$  が非等方類をもてば  $I$  は実現可能である。

- $|\Delta_0| = 5$  の場合:

ランク 3 の単純ルート系の最高ルートの係数は高々 2 である。  $\bar{\alpha}$  の形から  $\Delta(I)$  は (c) をみたさない。

- $|\Delta_0| = 6$  の場合:

$\alpha_2 \in \Delta(I)$  ならば  $\pi_0(L_0) = L_0$  は  $SL_n$  の直積になるので (b) がみたされない。ゆえに  $\alpha_2 \notin \Delta(I)$  とする。またランク 2 の単純ルート系の最高ルートの係数は高々 3 で、3 が現れるのは  $G_2$ -型である。よって (c) をみたす  $\Delta(I)$  は

$$\Delta(I) = \{\alpha_1, \alpha_8\}, \quad \{\alpha_1, \alpha_7\}, \quad \{\alpha_7, \alpha_8\}$$

である。

$\Delta(I) = \{\alpha_1, \alpha_7\}$  ならば  $\pi_0(L_0) = Spin_{10} \times SL_2$  となり、 $H^1(F, \pi_0(L_0)) = H^1(F, Spin_{10})$  は  $SL_2$  に対応する非等方類を含まない。よって (b) がみたされない。

$\Delta(I) = \{\alpha_1, \alpha_8\}, \{\alpha_7, \alpha_8\}$  ならば、 $\pi_0(L_0)$  はそれぞれ  $\pi_0(L_0) = Spin_{12}, G^s(E_6)$  となるから、 $H^1(F, \pi_0(L_0))$  が非等方類をもてば  $I$  は実現可能になる。

- $|\Delta(I)| = 7$  の場合:

上と同じ議論で (b),(c) をみたすのは  $\Delta(I) = \{\alpha_1\}, \{\alpha_8\}$  の場合だけである。この場合  $\pi_0(L_0)$  はそれぞれ  $Spin_{14}, G^s(E_7)$  になるから、 $H^1(F, \pi_0(L_0))$  が非等方類をもてば  $I$  は実現可能になる。

□

${}^3D_4, {}^6D_4$ -型

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & - & \alpha_2 & - & \alpha_3 & & \alpha_1 & - & \alpha_2 & - & \alpha_3 \\ & & | & & & & & & | & & \\ & & \alpha_4 & & & & & & \alpha_4 & & \end{array}$$

それぞれの場合に実現可能な佐武-Tits 図形になりうるのは次の3つである.

$$\begin{array}{l} {}^3D_{4,0}^{28}, {}^6D_{4,0}^{28} = \{\Delta, \Delta, 3 \text{ または } 6\} \\ {}^3D_{4,1}^9, {}^6D_{4,1}^9 = \{\Delta, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}, 3 \text{ または } 6\} \\ {}^3D_{4,2}^2, {}^6D_{4,2}^2 = \{\Delta, \emptyset, 3 \text{ または } 6\} \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet - \bullet - \bullet \quad \bullet - \bullet - \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet - \circ - \bullet \quad \bullet - \circ - \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ \circ - \circ - \circ \quad \circ - \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ \quad \circ \end{array} \quad \begin{array}{l} \emptyset \\ BC_1 \\ D_4 \end{array}$$

(6.7.19)  $F$  上  ${}^3D_{4,1}^9, {}^6D_{4,1}^9$  が存在するための必要十分条件は, それぞれの場合に  $H^1(F, ((\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)/(\mu_2 \times \mu_2))_\tau)$  が非等方類を持つことである. ここで

$$\mu_2 \times \mu_2 = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_i \in Z(\mathrm{SL}_2), \quad z_1 z_2 z_3 = 1\}$$

とみなす.

証明  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$  とする.  $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) = \mathfrak{S}_3, \tau(\Gamma) = \mathfrak{A}_3$  または  $\mathfrak{S}_3$  で,  $\Delta$  の  $\tau(\Gamma)$ -軌道は

$$a_1 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad a_2 = \{\alpha_2\}$$

の2つである.  $G_0$  の中心は

$$Z(G_0) = \{\alpha_1^\vee(\epsilon_1)\alpha_3^\vee(\epsilon_3)\alpha_4^\vee(\epsilon_4) \mid \epsilon_i = \pm 1, \quad \epsilon_1\epsilon_3\epsilon_4 = 1\}$$

で与えられる.  $\Delta(I) = \{a_1\}$  ならば  $\pi_0(L_0) = L_0 = \mathrm{SL}_2$  となり (b) がみたされない. 他方  $\Delta(I) = \{a_2\}$  ならば  $\pi_0(L_0) = ((\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)/Z(G_0))_\tau$  となり,  $H^1(F, \pi_0(L_0))$  が非等方類を含めば  $I$  は実現可能になる.  $\square$

## 第II部

# 代数体上の代数群の分類

第I部の記号はそのまま使用する. 以下では基礎体  $F$  を代数体または局所体する.

単純ルート系  $\Delta$  と連続準同型  $\tau : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  のペア  $(\Delta, \tau)$  が与えられたとき, それを含む  $\Gamma$ -図形  $I = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  は,  $I(G) = I$  となる単連結半単純  $F$ -代数群が存在するとき実現可能であるという. 集合  $\Sigma_F(\Delta, \tau)$  を

$$\Sigma_F(\Delta, \tau) := \{ \text{実現可能 } \Gamma\text{-図形 } \{\Delta, \Delta_0, \tau\} \text{ の } \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) \text{ に関する合同類} \}$$

で定める. またペア  $(\Delta, \tau)$  から決まる単連結半分裂  $F$ -代数群  $G_0 = G^s(\Delta)_\tau$  に対して

$$\Sigma_F(G_0) := \{G_0 \text{ の内部 } F\text{-型の } F\text{-同型類}\}, \quad \Sigma_F^i(G_0) := \{G_0 \text{ の内部 } F\text{-ペアの内部 } F\text{-同型類}\}$$

とおく. 明らかな全射

$$\widehat{\tau}_F : \Sigma_F(G_0) \rightarrow \Sigma_F(\Delta, \tau) : [G] \mapsto [I(G)]$$

がある. ここで一般に記号  $[\cdot]$  は同型類, 合同類をとることを意味する. §2.6 とあわせて次の可換図式をもつ.

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma_F^i(G_0) & \xrightarrow[\cong]{\eta_F} & H^1(F, \overline{G}_0) & \xrightarrow{\delta} & H^2(F, Z(G_0)) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma_F(G_0) & \xrightarrow[\cong]{\widehat{\eta}_F} & \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^1(F, \overline{G}_0) & \xrightarrow{\widehat{\delta}} & \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^2(F, Z(G_0)) \\ \widehat{\tau}_F \downarrow & & & & \\ \Sigma_F(\Delta, \tau) & & & & \end{array}$$

§2.6 補題より  $p_1^{-1}([G]) \cong \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) / \text{Aut}_F(G, \mathcal{D}_\Delta)$  が成り立つ. また  $\gamma_F = \delta \circ \eta_F$ ,  $\widehat{\gamma}_F = \widehat{\delta} \circ \widehat{\eta}_F$  であった. さらに  $\Delta$  が既約で  $k$  が  $|\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)|$  の約数であるとき,

$$\Sigma_F(k\Delta) := \{F \text{ 上実現可能な佐武-Tits 図形 } \{\Delta, \Delta_0, k\}\}$$

とおく. §6.5 補題から対応

$$\Sigma_F(\Delta, \tau) \rightarrow \Sigma_F(|\tau(\Gamma)|\Delta) : [I] \mapsto \mathcal{S}_I$$

は全単射を与える. そこで混乱がなければ, しばしばこれらの集合は同一視される.

$F$  の任意の拡大体  $E$  に対して  $\text{Br}(E)$  は  $E$  のブラウアー群とする. よく知られているように因子類をとることにより  $\text{Br}(E)$  は  $H^2(E, \mathbf{G}_m)$  と同型になる. そこで以下これらは同一視される.  $\text{Br}(E)$  の要素は  $[D]$  の形で表される. ここで  $D$  は  $E$  上の中心的斜体である. 自然数  $n$  に対して

$$\text{Br}(E)_n := \{[D] \in \text{Br}(E) \mid [D]^n = [E]\}$$

とおく.  $\text{Br}(E)$  は対合

$$\text{Br}(E) \longrightarrow \text{Br}(E) : [D] \mapsto [D]^{-1} = [D^0]$$

をもつ. ここで  $D^0$  は  $D$  の反同型環である. この対合の作用による軌道空間を  $\text{Br}(E)/\sim$  で表す.

自然数  $n$  に対して  $\mu_n$  は  $\overline{F}$  の中の 1 の  $n$ -乗根のなす群とする.  $\mu_n$  は  $F$  上の代数群とみることができ, その  $F$ -有理点は  $\mu_n(F) = \mu_n \cap F$  となる.

## 7 アルキメデス局所体上の単連結半単純群の分類

$\mathbf{C}, \mathbf{R}$  上の単連結単純群の分類を解説する.  $\mathbf{C}$  は代数閉体だから  $\mathbf{C}$  上の単連結半単純代数群はその単純ルート系だけで完全に分類できる. 以下では  $\mathbf{R}$  上の分類について述べる.

### 7.1 $\mathbf{R}$ 上の同型定理

定理

$G, G'$  は単連結半単純  $\mathbf{R}$ -代数群として, その  $\Gamma$ -図形を  $I(G), I(G')$  とする. このとき  $G$  と  $G'$  が  $\mathbf{R}$ -同型になるための必要十分条件は  $I(G)$  と  $I(G')$  が合同になることである.

証明 十分性を示す.  $(I(G) = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}, D_G(S))$  と  $(I(G') = \{\Delta', \Delta'_0, \tau'\}, D_{G'}(S'))$  を基底許容系とする. このとき  $D_G(S), D_{G'}(S')$  は  $G^s(\Delta_0) \cong G^s(\Delta'_0)$  の非等方  $\mathbf{R}$ -型である. Cartan の定理から与えられたルート系をもつ単連結コンパクト  $\mathbf{R}$ -型は同型を除いて一意に定まるから,  $D_G(S) \cong D_{G'}(S')$  である. これから  $(I(G), D_G(S))$  と  $(I(G'), D_{G'}(S'))$  が合同であることが従うので, §6.3 定理から  $G \cong G'$  となる.  $\square$

系

$G$  は上と同じで  $I(G) = \{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  とする. このとき  $G$  の外部  $\mathbf{R}$ -自己同型群  $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(G, \mathcal{D}_\Delta)$  について同型

$$\text{Aut}_{\mathbf{R}}(G, \mathcal{D}_\Delta) \xrightarrow{\cong} \{\bar{\sigma} \in \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) \mid \bar{\sigma}(\Delta_0) = \Delta_0, \bar{\sigma} \circ \tau(\gamma) = \tau(\gamma) \circ \bar{\sigma}, (\gamma \in \Gamma)\} : \sigma \mapsto \sigma^\sharp$$

がある.

証明  $\bar{\sigma}$  が  $\Delta_0$  を不変にしかつ  $\tau(\Gamma)$  の作用と可換ならば,  $\bar{\sigma}$  は  $I(G)$  から  $I(G)$  への合同写像になる. 従って上の定理の証明と §6.3 定理から,  $G$  の  $\mathbf{R}$ -自己同型  $\sigma$  で,  $\sigma^\sharp = \bar{\sigma}$  となるものが存在する.  $\widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{R})$  を法として,  $\sigma \in \text{Aut}_{\mathbf{R}}(G, \mathcal{D}_\Delta)$  としてよい. 写像  $\bar{\sigma} \mapsto \sigma$  は写像  $\sigma \mapsto \sigma^\sharp$  の逆写像を与える.  $\square$

単純ルート系と準同型  $\Gamma = \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  のペア  $(\Delta, \tau)$  を固定して,  $G_0 = G^s(\Delta)_\tau$  とおく. 上の定理から

$$\widehat{\iota}_{\mathbf{R}} : \Sigma_{\mathbf{R}}(G_0) \longrightarrow \Sigma_{\mathbf{R}}(\Delta, \tau)$$

は全単射になる.

### 7.2 $\mathbf{R}$ -同型類の分類

既約な単純ルート系  $\Delta$  と準同型  $\tau : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  のペア  $(\Delta, \tau)$  を固定する.  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) = S_n$  ( $n \leq 3$ ) だから, 準同型  $\tau$  の  $\text{Hom}(\Gamma, \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta))$  での共役類はその像の位数  $|\tau(\Gamma)|$  だけで決まってしまう. とくに半分裂群  $G^s(\Delta)_\tau$  の  $F$ -同型類は  $\Delta$  と  $|\tau(\Gamma)|$  だけで決まる. §7.1 とあわせれば次のよう

にまとめられる. また  $\mathbf{R}$  上実現可能な佐武-Tits 図形の分類はよく知られているので結果だけを述べる. ([Ar], [Mu], [Sa1, Appendix by Sugiura] 等).

#### 定理

単連結単純  $\mathbf{R}$ -代数群の  $\mathbf{R}$ -同型類は既約ルート系  ${}^k\Delta$  の佐武-Tits 図形  $\Sigma_{\mathbf{R}}({}^k\Delta)$  により完全に分類される. (半分裂群も  ${}^k\Delta$  だけで決まってしまう.) 各既約ルート系に対して,  $\mathbf{R}$  上実現可能な佐武-Tits 図形は次で与えられる. 以下では §6.6, §6.7 の記号を用いる. ただし実数  $r$  に対して  $[r]$  は  $r$  を超えない最大の整数を意味する.

#### 古典型

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathbf{R}}({}^1A_{2n}) &= \{{}^1A_{2n,2n}^{(1)}\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}({}^1A_{2n+1}) &= \{{}^1A_{2n+1,2n+1'}^{(1)}, {}^1A_{2n+1,n}^{(2)}\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}({}^2A_n) &= \{{}^2A_{n,\ell}^{(1)} \mid 0 \leq \ell \leq [(n+1)/2]\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}(B_n) &= \{B_{n,\ell} \mid 0 \leq \ell \leq n\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}(C_n) &= \{C_{n,n'}^{(1)}, C_{n,\ell}^{(2)} \mid 0 \leq \ell \leq [n/2]\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}({}^1D_{2n}) &= \{{}^1D_{2n,2\ell'}^{(1)}, {}^1D_{2n,n}^{(2)} \mid 0 \leq \ell \leq n\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}({}^1D_{2n+1}) &= \{{}^1D_{2n+1,2\ell+1}^{(1)} \mid 0 \leq \ell \leq n\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}({}^2D_{2n}) &= \{{}^2D_{2n,2\ell+1}^{(1)} \mid 0 \leq \ell \leq n-1\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}({}^2D_{2n+1}) &= \{{}^2D_{2n+1,2\ell'}^{(1)}, {}^2D_{2n+1,n}^{(2)} \mid 0 \leq \ell \leq n\}\end{aligned}$$

#### 例外型

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathbf{R}}(G_2) &= \{G_{2,0'}^{14}, G_{2,2}^0\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}(F_4) &= \{F_{4,0'}^{52}, F_{4,1'}^{21}, F_{4,4}^0\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}({}^1E_6) &= \{{}^1E_{6,2'}^{28}, {}^1E_{6,6}^0\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}({}^2E_6) &= \{{}^2E_{6,0'}^{78}, {}^2E_{6,2'}^{16}, {}^2E_{6,4}^2\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}(E_7) &= \{E_{7,0'}^{133}, E_{7,3'}^{28}, E_{7,4'}^9, E_{7,7}^0\} \\ \Sigma_{\mathbf{R}}(E_8) &= \{E_{8,0'}^{248}, E_{8,4'}^{28}, E_{8,8}^0\}\end{aligned}$$

### 7.3 内部 $\mathbf{R}$ -同型類の分類

$(\Delta, \tau)$  は §7.2 と同じとする.  $G_0 = G^s(\Delta)_\tau$  の内部  $\mathbf{R}$ -ペアの内部  $\mathbf{R}$ -同型類の集合  $\Sigma_{\mathbf{R}}^i(G_0)$  について調べる.

定理

$k = |\tau(\Gamma)|$  とする.

(1)  ${}^k\Delta \neq {}^1D_{2n}$  ならば写像

$$\widehat{\iota}_{\mathbf{R}} \circ p_1 : \Sigma_{\mathbf{R}}^i(G_0) \rightarrow \Sigma_{\mathbf{R}}({}^k\Delta)$$

は全単射である. とくに  $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(G_0, \mathcal{D}_{\Delta})$  の  $H^1(\mathbf{R}, \overline{G_0})$  への作用は自明である.

(2)  ${}^k\Delta = {}^1D_{2n}$  ならば写像

$$\widehat{\iota}_{\mathbf{R}} \circ p_1 : \Sigma_{\mathbf{R}}^i(G_0) \rightarrow \Sigma_{\mathbf{R}}({}^1D_{2n}) = \left\{ {}^1D_{2n,2\ell'}^{(1)}, {}^1D_{2n,n}^{(2)} \mid 0 \leq \ell \leq n \right\}$$

の制限

$$\widehat{\iota}_{\mathbf{R}} \circ p_1 : \Sigma_{\mathbf{R}}^i(G_0) - (\widehat{\iota}_{\mathbf{R}} \circ p_1)^{-1}({}^1D_{2n,n}^{(2)}) \rightarrow \Sigma_{\mathbf{R}}({}^1D_{2n}) - \left\{ {}^1D_{2n,n}^{(2)} \right\}$$

は全単射である.  ${}^1D_{2n,n}^{(2)}$  でのファイバーの要素の個数は

$$|(\widehat{\iota}_{\mathbf{R}} \circ p_1)^{-1}({}^1D_{2n,n}^{(2)})| = \begin{cases} 2 & (n \geq 3) \\ 3 & (n = 2) \end{cases}$$

となる.

証明  $X = \{\Delta, \Delta_0, k\} \in \Sigma_{\mathbf{R}}({}^k\Delta)$  として,  $\text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta})$  の 2 つの部分群

$$\text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}, \tau) := \{\bar{\sigma} \in \text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}) \mid \bar{\sigma} \circ \tau(\gamma) = \tau(\gamma) \circ \bar{\sigma}, (\gamma \in \Gamma)\}$$

$$\text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}, \Delta_0, \tau) := \{\bar{\sigma} \in \text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}, \tau) \mid \bar{\sigma}(\Delta_0) = \Delta_0\}$$

をとれば, §2.6 補題, §7.1 系から

$$|(\widehat{\iota}_{\mathbf{R}} \circ p_1)^{-1}(X)| = |\text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}, \tau) / \text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}, \Delta_0, \tau)|$$

である.  $|\text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta})| \neq 1$  となるのは  $\Delta$  が  $A_n, D_n, E_6$  の場合だから, これらについて調べれば良い.

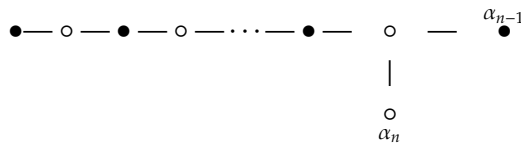
- $\Delta = A_n, D_{2n+1}, E_6$  の場合: この場合  $\text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}, \tau)$  は  $\mathcal{D}_{\Delta}$  の反転対合  $\iota_{\Delta}$  から生成される位数 2 の群になる. 佐武-Tits 図形  $X \in \Sigma_{\mathbf{R}}({}^k\Delta)$  は反転対合で不変であるから,  $\iota_{\Delta}$  は  $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(\mathcal{D}_{\Delta}, \Delta_0, \tau)$  に含まれる. 従って  $|(\widehat{\iota}_{\mathbf{R}} \circ p_1)^{-1}(X)| = 1$  である.

- $\Delta = {}^2D_{2n}$  の場合: この場合も上と同じ議論で

$$\text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}, \tau) = \text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}, \Delta_0, \tau)$$

が示される.

- $\Delta = {}^1D_{2n}, (n \geq 3)$  の場合:  $\text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}, \tau) = \text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta})$  は位数 2 の群である. その生成元を  $\bar{\sigma}$  とおく.  $X \neq {}^1D_{2n,n}^{(2)}$  ならば,  $\bar{\sigma}$  は  $\Delta_0$  を不変にするので,  $\bar{\sigma} \in \text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}, \Delta_0, \tau)$  となり,  $|(\widehat{\iota}_{\mathbf{R}} \circ p_1)^{-1}(X)| = 1$  が従う.  $X = {}^1D_{2n,n}^{(2)}$  の佐武-Tits 図形は



となり,  $\bar{\sigma}(\alpha_{n-1}) = \alpha_n$  なので,  $\bar{\sigma}$  は  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta, \Delta_0, \tau)$  に含まれない. よって  $|(\widehat{\Gamma}_{\mathbf{R}} \circ p_1)^{-1}({}^1D_{2n,n}^{(2)})| = 2$  となる.

- $\Delta = {}^1D_4$  の場合:  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta, \tau) = \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta) = \mathfrak{S}_3$  である.

$$\Sigma_{\mathbf{R}}({}^1D_4) = \{{}^1D_{4,0}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)}, {}^1D_{4,2}^{(1)} = {}^1D_{4,2}^{(2)}\}$$

の中で,  $X = {}^1D_{4,0}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)}$  ならば,  $\Delta_0 = \emptyset$  または  $\Delta_0 = \Delta$  であるから,  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta, \Delta_0, \tau) = \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  となり,  $|(\widehat{\Gamma}_{\mathbf{R}} \circ p_1)^{-1}(X)| = 1$  となる.  $X = {}^1D_{4,2}^{(2)}$  の佐武-Tits 図形は

$$\begin{array}{c} \bullet - \circ - \bullet \\ | \\ \circ \end{array}$$

となり,  $\text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta, \Delta_0, \tau)$  は黒丸同士の置換で生成される位数 2 の群になる. これから  $|(\widehat{\Gamma}_{\mathbf{R}} \circ p_1)^{-1}({}^1D_{4,2}^{(2)})| = 3$  がわかる.

□

#### 7.4 コホモロジー不変量の計算

§7.2 の分類に従って, 佐武-Tits 図形  $X \in \Sigma_{\mathbf{R}}({}^k\Delta)$  のコホモロジー不変量

$$\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}(X) := \widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}(\widehat{\Gamma}_{\mathbf{R}}^{-1}(X)) \in \text{Aut}_{\mathbf{R}}(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^2(\mathbf{R}, Z(G_0))$$

を計算しよう.  $H^2(\mathbf{R}, Z(G_0))$  の計算はより一般に §9.2 でなされるのでここでは説明を省く.  $H^2(\mathbf{R}, \mathbf{G}_m)$  をブラウアー群  $\text{Br}(\mathbf{R})$  と同一視すれば

$$H^2(\mathbf{R}, Z(G_0)) = \begin{cases} \text{Br}(\mathbf{R}) & ({}^k\Delta = {}^1A_{2n+1}, {}^2A_{2n+1}, B_n, C_n, {}^1D_{2n+1}, {}^2D_{2n+1}, E_7) \\ \text{Br}(\mathbf{R}) \oplus \text{Br}(\mathbf{R}) & ({}^k\Delta = {}^1D_{2n}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる. 標準的な同型

$$\text{Br}(\mathbf{R}) \longrightarrow \frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$$

があるので, 以下ここでは  $\text{Br}(\mathbf{R})$  を  $\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$  と同一視する. §7.3 定理でみたように,  $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(G_0, \mathcal{D}_\Delta)$  の  $H^2(\mathbf{R}, Z(G_0))$  への作用は  ${}^k\Delta \neq {}^1D_{2n}$  ならば自明である.  ${}^k\Delta = {}^1D_{2n}$  の場合その作用は,  $n \neq 2$  ならば  $(\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}) \oplus (\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})$  の成分の入れ替え  $(a, b) \mapsto (b, a)$  に対応しており,  $n = 2$  ならば  $(0, 0)$  以外の 3 つの要素の置換に対応している. これらの作用の軌道空間の代表系を

$$\left( \left( \frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \right) \oplus \left( \frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \right) \right) / \sim = \begin{cases} \{(0, 0), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} & ({}^k\Delta = {}^1D_{2n}, n \geq 3) \\ \{(0, 0), (\frac{1}{2}, 0)\} & ({}^k\Delta = {}^1D_4) \end{cases}$$

ととる. 結果は次の表のようになる.



${}^k\Delta$	$\text{Aut}_{\mathbf{R}}(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^2(\mathbf{R}, Z(G_0))$	$\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}$
${}^1A_{2n+1}$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}({}^1A_{2n+1,2n+1}^{(1)}) = 0, \widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}({}^1A_{2n+1,n}^{(2)}) = 1/2$
${}^2A_{2n+1}$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}({}^2A_{2n+1,\ell}^{(1)}) = \begin{cases} 0 & (2n+1-2\ell \equiv 3 \pmod{4}) \\ 1/2 & (2n+1-2\ell \equiv 1 \pmod{4}) \end{cases}$
$B_n$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}(B_{n,\ell}) = \begin{cases} 0 & (n-\ell \equiv 0, 3 \pmod{4}) \\ 1/2 & (n-\ell \equiv 1, 2 \pmod{4}) \end{cases}$
$C_n$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}(C_{n,n}^{(1)}) = 0, \widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}(C_{n,\ell}^{(2)}) = 1/2$
${}^1D_{2n}$	$(\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}) \oplus (\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}) / \sim$	$\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}({}^1D_{2n,2\ell}^{(1)}) = \begin{cases} (0, 0) & (2n-2\ell \equiv 0 \pmod{4}) \\ (1/2, 1/2) & (2n-2\ell \equiv 2 \pmod{4}) \end{cases}$ $\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}({}^1D_{2n,n}^{(2)}) = (1/2, 0), (n=2 \text{ ならば } (1/2, 1/2) \text{ と同値})$
${}^1D_{2n+1}$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}({}^1D_{2n+1,2\ell+1}^{(1)}) = \begin{cases} 0 & (2n-2\ell \equiv 0 \pmod{4}) \\ 1/2 & (2n-2\ell \equiv 2 \pmod{4}) \end{cases}$
${}^2D_{2n+1}$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}({}^2D_{2n+1,2\ell}^{(1)}) = 0, \widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}({}^2D_{2n+1,n}^{(2)}) = 1/2$
$E_7$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}(E_{7,7}^0) = \widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}(E_{7,3}^{28}) = 0$ $\widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}(E_{7,4}^9) = \widehat{\gamma}_{\mathbf{R}}(E_{7,0}^{133}) = 1/2$
その他	自明	

古典群の場合は例えば §6.4 定理などを使って計算できる.  $E_7$  の場合は [Sa3] の結果を使う.

## 8 非アルキメデス局所体上の単連結半単純群の分類

このセクションでは  $F$  は非アルキメデス局所体とし,  $F$  上の単連結単純群の分類を説明する.

### 8.1 $F$ -同型類の分類

次は Kneser([Kn2]) による基本定理である. Bruhat と Tits([Br-T]) による証明もある.

**定理 (Kneser)**

$G$  が単連結半単純  $F$ -代数群で,  $Z$  をその中心とする. このとき

- (1)  $H^1(F, G) = 0$  である.
- (2)  $\delta : H^1(F, G/Z) \rightarrow H^2(F, Z)$  は全単射である.

単純ルート系と準同型  $\Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  のペア  $(\Delta, \tau)$  を固定して,  $G_0 = G^s(\Delta)_\tau$  とおく. 上の定理から

$$\gamma_F : \Sigma_F^i(G_0) \rightarrow H^2(F, Z(G_0)), \quad \widehat{\gamma}_F : \Sigma_F(G_0) \rightarrow \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^2(F, Z(G_0))$$

は共に全単射になる.  $H^2(F, Z(G_0))$  を計算しよう. Tate-Poitou の双対定理から

$$H^2(F, Z(G_0)) \cong H^0(F, X(Z(G_0))) = X(Z(G_0))^\Gamma$$

である.  $G_0$  の極大  $F$ -トーラスを  $T_0$  とすれば, 完全列

$$1 \longrightarrow X(T_0/Z(G_0)) \longrightarrow X(T_0) \longrightarrow X(Z(G_0)) \longrightarrow 1$$

がある.  $T_0/Z(G_0)$  は随伴群  $G_0/Z(G_0)$  の極大  $F$ -トーラスだから,  $X(T_0/Z(G_0))$  は  $\Delta$  で生成される  $\mathbf{Z}$ -加群である. また  $G_0$  は単連結だから  $X(T_0)$  は基本ウェイトで生成される  $\mathbf{Z}$ -加群である. そこで

$$C(\Delta) := X(T_0)/X(T_0/Z(G_0)) \cong X(Z(G_0))$$

とおく.  $C(\Delta)$  上  $\Gamma$ -作用と  $\tau(\Gamma)$ -作用は一致することから

$$X(Z(G_0))^\Gamma \cong C(\Delta)^{\tau(\Gamma)}$$

となる. 従って, とくに  $\Delta$  が既約ならば  $H^2(F, Z(G_0))$  は  $(\Delta, \tau)$  から定まるディンキン型  ${}^{\tau(\Gamma)}\Delta$  だけで決まってしまう. それは次の表のようになる.(cf.[Sa1])

型	$\tau(\Gamma)$	$C(\Delta)$	$C(\Delta)^{\tau(\Gamma)}$	$\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta)$ の作用	$ \Sigma_F(G_0) $
${}^1A_n$	1	$\mu_{n+1}$	$\mu_{n+1}$	$z \mapsto z^{-1}$	$[(n+3)/2]$
${}^2A_n$	$\mathfrak{S}_2$	$\mu_{n+1}$	$\begin{cases} 1 & (n \in 2\mathbf{Z}) \\ \mu_2 & (n \in 2\mathbf{Z} + 1) \end{cases}$	自明	$\begin{cases} 1 & (n \in 2\mathbf{Z}) \\ 2 & (n \in 2\mathbf{Z} + 1) \end{cases}$
$B_n, C_n$	1	$\mu_2$	$\mu_2$	自明	2
${}^1D_{2n}(n \geq 3)$	1	$\mu_2 \times \mu_2$	$\mu_2 \times \mu_2$	$(z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$	3
${}^1D_4$	1	$\mu_2 \times \mu_2$	$\mu_2 \times \mu_2$	置換	2
${}^1D_{2n+1}$	1	$\mu_4$	$\mu_4$	$z \mapsto z^{-1}$	3
${}^2D_{2n}(n \geq 3)$	$\mathfrak{S}_2$	$\mu_2 \times \mu_2$	$\mu_2$	自明	2
${}^2D_4$	$\mathfrak{S}_2$	$\mu_2 \times \mu_2$	$\mu_2$	自明	2
${}^2D_{2n+1}$	$\mathfrak{S}_2$	$\mu_4$	$\mu_2$	自明	2
${}^3D_4$	$\mathfrak{A}_3$	$\mu_2 \times \mu_2$	1	自明	1
${}^6D_4$	$\mathfrak{S}_3$	$\mu_2 \times \mu_2$	1	自明	1
$G_2, F_4, E_8$	1	1	1	自明	1
${}^1E_6$	1	$\mu_3$	$\mu_3$	$z \mapsto z^{-1}$	2
${}^2E_6$	$\mathfrak{S}_2$	$\mu_3$	1	自明	1
$E_7$	1	$\mu_2$	$\mu_2$	自明	2

この結果から単連結単純  $F$ -代数群の同型類が分類できる.

定理

$(\Delta, \tau)$  は上と同じで  $\Delta$  は既約であると仮定する. §6.6, 6,7 の記号を用いる.

(1)  $|\tau^{(\Gamma)}|\Delta \neq {}^1A_n$  の場合: 写像

$$\widehat{\tau}_F : \Sigma_F(G_0) \rightarrow \Sigma_F(\Delta, \tau) = \Sigma_F(|\tau^{(\Delta)}|\Delta)$$

は全単射である. 従って半分裂群  $G_0$  を固定すれば  $G_0$  の内部  $F$ -同型類は佐武-Tits 図形で完全に分類できる. 各既約ルート系に対して  $F$  上実現可能な佐武-Tits 図形は次で与えられる.

古典型

$$\begin{aligned} \Sigma_F({}^2A_{2n}) &= \{{}^2A_{2n,n}^{(1)}\}, & \Sigma_F({}^2A_{2n+1}) &= \{{}^2A_{2n+1,n'}^{(1)}, {}^2A_{2n+1,n+1}^{(1)}\} \\ \Sigma_F(B_n) &= \{B_{n,n-1}, B_{n,n}\} \\ \Sigma_F(C_{2n}) &= \{C_{2n,2n'}^{(1)}, C_{2n,n}^{(2)}\}, & \Sigma_F(C_{2n+1}) &= \{C_{2n+1,2n+1'}^{(1)}, C_{2n+1,n+1}^{(2)}\} \\ \Sigma_F({}^1D_{2n}) &= \{{}^1D_{2n,2n-2'}^{(1)}, {}^1D_{2n,2n'}^{(1)}, {}^1D_{2n,n}^{(2)}\} \quad (n=2 \text{ の場合は } {}^1D_{4,2}^{(1)} = {}^1D_{4,2}^{(2)} \text{ である}) \\ \Sigma_F({}^1D_{2n+1}) &= \{{}^1D_{2n+1,2n-1'}^{(1)}, {}^1D_{2n+1,2n+1'}^{(1)}, {}^1D_{2n+1,n-1}^{(2)}\} \\ \Sigma_F({}^2D_{2n}) &= \{{}^2D_{2n,2n-1'}^{(1)}, {}^2D_{2n,n-1}^{(2)}\}, & \Sigma_F({}^2D_{2n+1}) &= \{{}^2D_{2n+1,2n'}^{(1)}, {}^2D_{2n+1,n}^{(2)}\} \end{aligned}$$

例外型

$$\begin{aligned} \Sigma_F(G_2) &= \{G_{2,2}^0\}, & \Sigma_F(F_4) &= \{F_{4,4}^0\}, & \Sigma_F(E_8) &= \{E_{8,8}^0\} \\ \Sigma_F({}^1E_6) &= \{{}^1E_{6,2'}^{16}, {}^1E_{6,6}^0\}, & \Sigma_F({}^2E_6) &= \{{}^2E_{6,4}^2\} \\ \Sigma_F(E_7) &= \{E_{7,4'}^9, E_{7,7}^0\}, & \Sigma_F({}^3D_4) &= \{{}^3D_{4,2}^2\}, & \Sigma_F({}^6D_4) &= \{{}^6D_{4,2}^2\} \end{aligned}$$

(2)  $|\tau^{(\Gamma)}|\Delta = {}^1A_n$  の場合: 写像

$$\widehat{\tau}_F : \Sigma_F(\mathrm{SL}_{n+1}) \rightarrow \Sigma_F({}^1A_n) = \{{}^1A_{n,\ell}^{(d)} \mid d(\ell+1) = (n+1), 1 \leq d, 0 \leq \ell\}$$

は全射である. 各  ${}^1A_{n,\ell}^{(d)} \in \Sigma_F({}^1A_n)$  のファイバーは

$$\widehat{\tau}_F^{-1}({}^1A_{n,\ell}^{(d)}) = \{[\mathrm{SL}_{\ell+1}(D)] \mid D \text{ は } F \text{ 上の中心斜体で } [D:F] = d^2 \text{ であるもの}\}$$

となる. より詳しく,  $F$  のブラウアー群を  $\mathrm{Br}(F)$  として, その部分群を

$$\begin{aligned} \mathrm{Br}(F)_d &:= \{[D] \in \mathrm{Br}(F) \mid [D]^d = [F]\} \cong \frac{1}{d}\mathrm{Z}/\mathrm{Z} \\ \mathrm{Br}(F)_d^\times &:= \{[D] \in \mathrm{Br}(F)_d \mid [D] \text{ の位数} = d\} \cong (\mathrm{Z}/d\mathrm{Z})^\times \end{aligned}$$

とおく.  $\mathrm{Br}(F)$  の対合  $[D] \mapsto [D^0]$  ( $D^0$  は  $D$  の反同型環) による軌道空間を  $\mathrm{Br}(F)/\sim$  とすれば, 写像

$$\mathrm{Br}(F)_d^\times / \sim \longrightarrow \widehat{\tau}_F^{-1}({}^1A_{n,\ell}^{(d)}) : [D] \mapsto [\mathrm{SL}_{\ell+1}(D)]$$

は全単射になる.  $\mathrm{SL}_{\ell+1}(D)$  の基底許容系は  $(\{{}^1A_n, {}^1A_n - \{\alpha_{d_1}, \dots, \alpha_{d_\ell}\}, 1\}, \mathrm{SL}_1(D))$  となる.

証明 古典型の場合はよく知られた結果である. 例外型の場合を示そう.  $\Delta = G_2, F_4, E_8$  の場合は  $G^s(\Delta)$  は単連結かつ随伴型なので, Kneser の定理から  $H^1(F, \text{Inn}(G^s(\Delta))) = 1$  となり,  $G^s(\Delta)$  の内部  $F$ -同型類は  $[G^s(\Delta)]$  自身しかないことがわかる. 次に  $|\tau(\Gamma)|\Delta = {}^1E_6$  の場合, 分裂群が存在することは明らかである. また (6.7.2), (6.7.3) から  ${}^1E_{6,2}^{28}$  は存在しないが  ${}^1E_{6,2}^{16}$  は存在する. よって

$$\{{}^1E_{6,6'}^0, {}^1E_{6,2}^{16}\} \subset \Sigma_F({}^1E_6) \subset \{{}^1E_{6,6'}^0, {}^1E_{6,2}^{16}, {}^1E_{6,0}^{78}\}$$

がわかる. ここで

$$\widehat{\iota}_F : \Sigma_F(G^s(E_6)) \longrightarrow \Sigma_F({}^1E_6)$$

は全射だから

$$|\Sigma_F({}^1E_6)| \leq |\Sigma_F(G^s(E_6))| = 2$$

である. 右辺の等式は上で求めた表から従う. ゆえに

$$\{{}^1E_{6,6'}^0, {}^1E_{6,2}^{16}\} = \Sigma_F({}^1E_6)$$

でなければならず, また  $\widehat{\iota}_F$  も全単射になる.  ${}^2E_6, E_7$  の場合も同じ論法で示せる. □

系

非等方単連結単純  $F$ -代数群は  $\text{SL}_n$  の内部  $F$ -型である.

## 8.2 コホモロジー不変量の計算

§8.1 の分類に従ってコホモロジー不変量を求めよう.  $(\Delta, \tau)$  は §8.1 定理と同じものとして,  $k = |\tau(\Gamma)|$  とおく.  ${}^k\Delta \neq {}^1A_n$  のときには, 佐武-Tits 図形  $X \in \Sigma_F({}^k\Delta)$  に対して

$$\widehat{\gamma}_F(X) := \widehat{\gamma}_F(\widehat{\iota}_F^{-1}(X)) \in \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{O}_\Delta) \backslash H^2(F, Z(G_0))$$

とおく.  $H^2(F, Z(G_0))$  は既に §8.1 の表で与えられているが, ここでは §9.2 の記述にあわせてブラウアー群で表しておく.

$$H^2(F, Z(G_0)) = \begin{cases} \text{Br}(F)_{n+1} & ({}^k\Delta = {}^1A_n) \\ \text{Br}(F)_4 & ({}^k\Delta = {}^1D_{2n+1}) \\ \text{Br}(F)_3 & ({}^k\Delta = {}^1E_6) \\ \text{Br}(F)_2 & ({}^k\Delta = {}^2A_{2n+1}, B_n, C_n, {}^2D_{2n+1}, E_7) \\ \text{Br}(F)_2 \oplus \text{Br}(F)_2 & ({}^k\Delta = {}^1D_{2n}) \\ \text{Br}(E)_2 & ({}^k\Delta = {}^2D_{2n}, E \text{ は } \text{Ker}\tau \text{ の不変体である } F \text{ の } 2 \text{ 次拡大}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

標準的な同型

$$\text{inv}_F : \text{Br}(F) \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

があるので, 以下これらを同一視する.  $\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta)$  の  $H^2(F, Z(G_0))$  への作用が自明でないものは  ${}^k\Delta = {}^1A_n, {}^1D_n, {}^1E_6$  の場合である. これらの場合の作用の軌道空間の代表系はそれぞれ

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n+1}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\right)/ &\sim = \left\{\frac{m}{n+1} \mid 0 \leq m \leq \left[\frac{n}{2}\right]\right\} & ({}^k\Delta = {}^1A_n) \\ \left(\frac{1}{4}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\right)/ &\sim = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right\} & ({}^k\Delta = {}^1D_{2n+1}) \\ \left(\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\right)/ &\sim = \left\{(0, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\} & ({}^k\Delta = {}^1D_{2n}, n \geq 3) \\ \left(\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\right)/ &\sim = \left\{(0, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\} & ({}^k\Delta = {}^1D_4) \\ \left(\frac{1}{3}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\right)/ &\sim = \left\{0, \frac{1}{3}\right\} & ({}^k\Delta = {}^1E_6) \end{aligned}$$

ととる. 結果は次の表で与えられる.

${}^k\Delta$	$\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^2(F, Z(G_0))$	$\widehat{\gamma}_F$
${}^1A_n$	$(\frac{1}{n+1}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})/\sim$	$\widehat{\gamma}_F([\text{SL}_{\ell+1}(D)]) = \text{inv}_F([D])$ for $[\text{SL}_{\ell+1}(D)] \in \widehat{I}_F^{-1}({}^1A_{n,\ell}^{(d)})$
${}^2A_{2n+1}$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_F({}^2A_{2n+1,n+1}^{(1)}) = 0, \widehat{\gamma}_F({}^2A_{2n+1,n}^{(1)}) = 1/2$
$B_n$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_F(B_{n,n}) = 0, \widehat{\gamma}_F(B_{n,n-1}) = 1/2$
$C_{2n}$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_F(C_{2n,2n}^{(1)}) = 0, \widehat{\gamma}_F(C_{2n,n}^{(2)}) = 1/2$
$C_{2n+1}$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_F(C_{2n+1,2n+1}^{(1)}) = 0, \widehat{\gamma}_F(C_{2n+1,n+1}^{(2)}) = 1/2$
${}^1D_{2n}$	$(\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}) \oplus (\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})/\sim$	$\widehat{\gamma}_F({}^1D_{2n,2n}^{(1)}) = (0, 0), \widehat{\gamma}_F({}^1D_{2n,2n-2}^{(1)}) = (1/2, 1/2)$ $\widehat{\gamma}_F({}^1D_{2n,n}^{(2)}) = (1/2, 0), (n=2 \text{ ならば } (1/2, 1/2) \text{ と同値})$
${}^1D_{2n+1}$	$(\frac{1}{4}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})/\sim$	$\widehat{\gamma}_F({}^1D_{2n+1,2n+1}^{(1)}) = 0$ $\widehat{\gamma}_F({}^1D_{2n+1,2n-1}^{(1)}) = 2/4, \widehat{\gamma}_F({}^1D_{2n+1,n-1}^{(2)}) = 1/4$
${}^2D_{2n}$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_F({}^2D_{2n,2n-1}^{(1)}) = 0, \widehat{\gamma}_F({}^2D_{2n,n-1}^{(2)}) = 1/2$
${}^2D_{2n+1}$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_F({}^2D_{2n+1,2n}^{(1)}) = 0, \widehat{\gamma}_F({}^2D_{2n+1,n}^{(2)}) = 1/2$
${}^1E_6$	$(\frac{1}{3}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})/\sim$	$\widehat{\gamma}_F({}^1E_{6,6}^0) = 0, \widehat{\gamma}_F({}^1E_{6,2}^{16}) = 1/3$
$E_7$	$\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$	$\widehat{\gamma}_F(E_{7,7}^0) = 0, \widehat{\gamma}_F(E_{7,7}^9) = 1/2$
その他	自明	

計算はほとんどの場合自明であるが,  $\widehat{\gamma}_F({}^1D_{2n+1,n-1}^{(2)}) = 1/4$  を証明しておこう.  $G_0 = G^s(D_{2n+1})$  を単連結分裂群として,  ${}^1D_{2n+1,n-1}^{(2)}$  に対応する単連結群を  $G$  とおく.  ${}^1D_{2n+1,n-1}^{(2)}$  の佐武-Tits 図形は

$$\begin{array}{cccccccccccc} \alpha_1 & \bullet & \xrightarrow{\alpha_2} & \circ & \xrightarrow{\alpha_3} & \bullet & \xrightarrow{\alpha_4} & \circ & \cdots & \xrightarrow{\alpha_{2n-2}} & \circ & \xrightarrow{\alpha_{2n-1}} & \bullet & \xrightarrow{\alpha_{2n}} & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & & & & & & & \rightarrow & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & \alpha_{2n+1} & & \end{array}$$

である.  $\Delta_0$  は黒丸の集合として  $L_0 = G^s(\Delta_0)$  とおく.  $G_0$  の中心は

$$Z_0 = \{\alpha_1^\vee(\zeta^2)\alpha_3^\vee(\zeta^2)\cdots\alpha_{2n-1}^\vee(\zeta^2)\alpha_{2n}^\vee(\zeta)\alpha_{2n+1}^\vee(\zeta^{-1}) \mid \zeta \in \mu_4\}$$

で与えられるから, とくに  $Z_0 \subset L_0$  である. そこで次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, \bar{L}_0) & \xrightarrow{\cong} & H^2(F, Z(L_0)) & \xrightarrow{\cong} & \text{Br}(F)_2^{n-1} \oplus \text{Br}(F)_4 \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ H^1(F, L_0/Z_0) & \xrightarrow{\delta'} & H^2(F, Z_0) & \xrightarrow{\cong} & \text{Br}(F)_4 \\ \downarrow & & & & \parallel \\ H^1(F, \bar{G}_0) & \xrightarrow{\cong} & H^2(F, Z_0) & \xrightarrow{\cong} & \text{Br}(F)_4 \end{array}$$

この図式で  $G$  は  $H^1(F, L_0/Z_0)$  の中の非等方類  $[z]$  から従う  $G_0$  のツイストによりえられる. 非等方類であることから  $[z]$  の  $H^2(F, Z(L_0))$  への像は位数 4 をもつ. 従って  $\delta'([z]) = \widehat{\eta}_F([G])$  は位数 4 でなければならない.



## 9 代数体上の単連結半単純群の分類

代数体上の単連結代数群の分類を与える. このセクションで使われる記号を幾つか定義しよう. 以下では  $F$  は  $\mathbf{Q}$  上有限次の代数拡大とし,  $V = V^F$  は  $F$  の素点全体の集合とする.  $V$  の中で有限素点のなす部分集合を  $V_f$  で, 無限素点のなす部分集合を  $V_\infty$  で表す. 更に実無限素点のなす集合を  $V_{\infty,1}$  で表す. 各  $v \in V$  に対して,  $F_v$  は  $F$  の  $v$  による完備化とする.  $F_v$  と  $\bar{F}$  の合併体  $\bar{F}_v$  は  $F_v$  の代数閉包を与える. その絶対ガロワ群を  $\Gamma_v = \text{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$  とおく. 制限写像  $\gamma \mapsto \gamma|_{\bar{F}}$  は自然な単射  $\Gamma_v \rightarrow \Gamma$  を与えるので, 以下では  $\Gamma_v$  は  $\Gamma$  の部分群と同一視される.  $H$  が  $F$ -代数群ならば, それを  $F_v$  上の代数群とみてコホモロジー  $H^i(F_v, H)$  が考えられる. これから  $V$  の部分集合  $S$  に対してハッセ写像

$$H^i(F, H) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^i(F_v, H) : [z] \mapsto ([z_v])_{v \in S}$$

ができる.

### 9.1 ガロワコホモロジーのハッセ原理

次の定理が基本的である. ([K3], [H1], [Ch], [P-R], [Se1])

定理 (H)

$G$  は単連結半単純  $F$ -代数群として,  $Z(G)$  をその中心,  $\bar{G} = G/Z(G)$  とする.

(1) (Kneser–Chernousov) ハッセ写像

$$H^1(F, G) \longrightarrow \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, G)$$

は全単射である.

(2) (Tate–Poitou–Chebotarev) ハッセ写像

$$H^1(F, Z(G)) \longrightarrow \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, Z(G))$$

は全射である.

(3) (Tate–Poitou) 次の完全列がある.

$$1 \longrightarrow H^2(F, Z(G)) \longrightarrow \prod_{v \in V} H^2(F_v, Z(G)) \longrightarrow (X(Z(G))^\Gamma)^{PD} \longrightarrow 1$$

ここで  $(X(Z(G))^\Gamma)^{PD}$  は  $X(Z(G))$  の  $\Gamma$ -不変要素のなす群  $X(Z(G))^\Gamma$  のポントリャーギン双対群を表す.

(4) (Kneser–Harder) 連結写像

$$H^1(F, \bar{G}) \longrightarrow H^2(F, Z(G))$$

は全射である.

単純ルート系  $\Delta$  と連続準同型  $\tau : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}_\Delta)$  を固定して,  $G_0 = G^s(\Delta)_\tau$  を対応する単連結半分裂  $F$ -代数群とする. その中心を簡単に  $Z_0 = Z(G_0)$  で表す. さて  $G_0$  の内部  $F$ -ペアの内部  $F$ -同型

類の集合  $\Sigma_F^i(G_0)$  は写像

$$\eta_F : \Sigma_F^i(G_0) \longrightarrow H^1(F, \overline{G}_0)$$

の全単射性から  $H^1(F, \overline{G}_0)$  により完全に分類される. そこで  $H^1(F, \overline{G}_0)$  について調べよう. 連結写像とハッセ写像を

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, \overline{G}_0) & \xrightarrow{\delta} & H^2(F, Z_0) \\ h_\infty^1 \downarrow & & \\ \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0) & & \end{array}$$

とする. また次の連結写像とハッセ写像からなる図式

$$\begin{array}{ccc} & & H^2(F, Z_0) \\ & & \downarrow h_\infty^2 \\ \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0) & \xrightarrow{\delta_\infty = \prod_{v \in V_{\infty,1}} \delta_v} & \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^2(F_v, Z_0) \end{array}$$

に関するファイバー積を

$$\begin{aligned} & H^2(F, Z_0) \times_{h_\infty^2 \times \delta_\infty} \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0) \\ &= \left\{ [\beta] \times ([\alpha_v])_{v \in V_{\infty,1}} \in H^2(F, Z_0) \times \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0) \mid h_\infty^2([\beta]) = \delta_\infty([\alpha_v])_{v \in V_{\infty,1}} \right\} \end{aligned}$$

とおく.

定理

写像

$$H^1(F, \overline{G}_0) \longrightarrow H^2(F, Z_0) \times_{h_\infty^2 \times \delta_\infty} \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0) : [z] \mapsto \delta([z]) \times h_\infty^1([z])$$

は全単射である.

証明  $H^1(F, \overline{G}_0)$  の  $\delta \times h_\infty^1$  による像がファイバー積に含まれることは明らかである.

単射性を示す.  $[z], [z'] \in H^1(F, \overline{G}_0)$  について,  $\delta([z]) = \delta([z'])$  かつ  $h_\infty^1([z]) = h_\infty^1([z'])$  であると仮定する.  $z$  による  $G_0$  のツイストを  $G = (G_0)_z$  として, 次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(F, Z(G)) & \xrightarrow{q} & H^1(F, G) & \xrightarrow{p} & H^1(F, \overline{G}) & \xrightarrow{\delta'} & H^2(F, Z(G)) \\ \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow \bar{j} & & \downarrow \\ H^1(F, Z_0) & \longrightarrow & H^1(F, G_0) & \longrightarrow & H^1(F, \overline{G}_0) & \xrightarrow{\delta} & H^2(F, Z_0) \end{array}$$

ここで  $\bar{j}$  はトリビアル類 [1] を  $[z]$  にうつす自然な全単射である. 仮定から  $\bar{j}^{-1}([z']) \in \text{Ker } \delta' = \text{Im } p$  となるから,  $\bar{j}^{-1}([z']) = p([\xi])$  となる  $[\xi] \in H^1(F, G)$  が取れる. 各  $v \in V_{\infty,1}$  において,  $F$  を  $F_v$  で置き換えることにより上と同じ可換図式が成り立ち, とくに仮定  $[z_v] = [z'_v]$  から

$$p_v([\xi_v]) = \bar{j}_v^{-1}([z'_v]) = \bar{j}_v^{-1}([z_v]) = [1]$$

をもつ. 従って  $[\xi_v] \in \text{Ker } p_v = \text{Im } q_v$  となるから  $[\xi_v] = q_v([\zeta_v])$  となる  $[\zeta_v] \in H^1(F_v, Z(G))$  が取れる. このとき上の定理 (H) (1),(2) と可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, Z(G)) & \xrightarrow{q} & H^1(F, G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, Z(G)) & \xrightarrow{\prod q_v} & \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, G) \end{array}$$

から  $[\zeta] \in H^1(F, Z(G))$  で  $q([\zeta]) = [\xi]$  となるものが取れる. 従って,  $\bar{j}^{-1}([z']) = p(q([\zeta])) = [1]$  より  $[z'] = [z]$  でなければならない.

全射性を示す.  $[\beta] \times ([\alpha_v])_{v \in V_{\infty,1}}$  をファイバー積から取る. 上の定理 (H) から,  $\delta([z]) = [\beta]$  となる  $[z] \in H^1(F, \bar{G}_0)$  が存在する.  $G_0$  の  $z$  によるツイストを  $G = (G_0)_z$  とおく. そして次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, G_0) & \longrightarrow & H^1(F, \bar{G}_0) & \xrightarrow{\delta} & H^2(F, Z_0) \\ \uparrow j & & \uparrow \bar{j} & & \uparrow j_2 \\ H^1(F, G) & \xrightarrow{p} & H^1(F, \bar{G}) & \xrightarrow{\delta'} & H^2(F, Z(G)) \\ \downarrow & & \downarrow h_{\infty}^1 & & \downarrow \\ \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, G) & \xrightarrow{\prod p_v} & \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \bar{G}) & \xrightarrow{\prod \delta'_v} & \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^2(F_v, Z(G)) \\ & & \downarrow \prod \bar{j}_v & & \downarrow \prod j_{2,v} \\ & & \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \bar{G}_0) & \xrightarrow{\prod \delta_v} & \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^2(F_v, Z_0) \end{array}$$

$\bar{j}$  はトリビアル類を  $[z]$  にうつす全単射で,  $j_2$  はトリビアル類を  $[\beta]$  にうつす全単射である. 各  $v \in V_{\infty,1}$  について,  $[\beta_v] = \delta_v([\alpha_v])$  だから,  $\bar{j}_v^{-1}([\alpha_v]) \in \text{Ker } \delta'_v = \text{Im } p_v$  でなければならない. 定理 (H)(1) とあわせて,  $\bar{j}_v^{-1}([\alpha_v]) = p_v([\xi_v])$  となる  $[\xi] \in H^1(F, G)$  が存在する. そこで  $[z'] := \bar{j}(p([\xi])) \in H^1(F, \bar{G}_0)$  をとれば,  $\delta([z']) = [\beta]$ ,  $h_{\infty}^1([z']) = ([\alpha_v])_{v \in V_{\infty,1}}$  となる.  $\square$

**注意** 一般の半単純群の場合については [San] を参照. また任意の半単純随伴型群  $\bar{G}$  でハッセ写像  $H^1(F, \bar{G}) \rightarrow \prod_{v \in V} H^1(F_v, \bar{G})$  は単射になる. これは定理 (H)(1),(3) から従う. ([P-R, Theorem 6.22], その証明の後の Remark も参照のこと).

## 9.2 コホモロジーの計算

既約単純ルート系  $\Delta$  と連続準同型  $\tau : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta})$  を固定する.  $Z_0$  を  $G_0 = G^s(\Delta)_{\tau}$  の中心として,  $H^2(F, Z_0)$  と  $H^2(F_v, Z_0)$  を計算しよう.  $E$  を  $\bar{F}$  の  $\text{Ker } \tau$  による不変体とする.  $\text{Aut}(\mathcal{D}_{\Delta}) = \mathfrak{S}_n$ , ( $n \leq 3$ ) だから  $[E : F] \leq 6$  である. 自然数  $n$  に対して,  $\mu_n$  を  $\bar{F}$  中の 1 の  $n$ -乗根のなす群とする.  $\mu_n$  を  $E$  上の代数群とみてその  $F$  への係数制限を  $R_{E/F}(\mu_n)$  とする. ノルム写像  $N_{E/F} : R_{E/F}(\mu_n) \rightarrow \mu_n$  の核を  $R_{E/F}^{(1)}(\mu_n) := \text{Ker } N_{E/F}$  とおく. 一般に  $Z_0$  は  $R_{E/F}(\mu_n)$  または  $R_{E/F}^{(1)}(\mu_n)$  の形の群の直積になる. そこで  $H^2(F, R_{E/F}(\mu_n))$ ,  $H^2(F, R_{E/F}^{(1)}(\mu_n))$  を計算する必要がある. これらについてまとめておくと

補題

- (1)  $H^1(F, R_{E/F}(\mu_n)) = E^\times / (E^\times)^n$ ,  $H^2(F, R_{E/F}(\mu_n)) = \text{Br}(E)_n$  である。  
 (2) 次の完全列がある。

$$1 \rightarrow \mu_n(F)/N_{E/F}(\mu_n(E)) \rightarrow H^1(F, R_{E/F}^{(1)}(\mu_n)) \rightarrow \text{Ker}(E^\times / (E^\times)^n \xrightarrow{N_{E/F}} F^\times / (F^\times)^n) \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow F^\times / (F^\times)^n N_{E/F}(E^\times) \rightarrow H^2(F, R_{E/F}^{(1)}(\mu_n)) \rightarrow \text{Br}^{(1)}(E)_n \rightarrow 1$$

ここで  $\text{Br}^{(1)}(E)_n := \text{Ker}(\text{Br}(E)_n \xrightarrow{N_{E/F}} \text{Br}(F)_n)$  とする。

証明 (1) は完全列

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbf{G}_m \xrightarrow{n \text{ 乗}} \mathbf{G}_m \rightarrow 1$$

のコホモロジー完全列と  $H^2(F, R_{E/F}(\mathbf{G}_m)) = H^2(E, \mathbf{G}_m) = \text{Br}(E)$  から従う。(2) は完全列

$$1 \rightarrow R_{E/F}^{(1)}(\mu_n) \rightarrow R_{E/F}(\mu_n) \xrightarrow{N_{E/F}} \mu_n \rightarrow 1$$

のコホモロジー完全列と (1) から従う。 □

これらを用いて  $H^2(F, Z_0)$ ,  $H^2(F_v, Z_0)$  が計算される。結果は次の表のようになる。表の中で  $V$  の部分集合  $V_s(E)$  は

$$V_s(E) := \{v \in V = V^F \mid v \text{ は } E \text{ で完全分解する}\}$$

で与えられるものとする。また  $\tau(\Gamma) = \mathfrak{S}_3$  のとき、中間体  $F \subset E' \subset E$  で  $[E' : F] = 3$  となるものを一つ固定する。

$ \tau(\Gamma) \Delta$	$Z_0$	$H^2(F, Z_0)$	$H^2(F_v, Z_0)$
${}^1A_n$	$\mu_{n+1}$	$\text{Br}(F)_{n+1}$	$\text{Br}(F_v)_{n+1}$
${}^2A_{2n}$	$R_{E/F}^{(1)}(\mu_{2n+1})$	$\text{Br}^{(1)}(E)_{2n+1}$	$\begin{cases} 1 & (v \notin V_s(E)) \\ \text{Br}(F_v)_{2n+1} & (v \in V_s(E)) \end{cases}$
${}^2A_{2n+1}$	$R_{E/F}^{(1)}(\mu_{2n+2})$	$(F^\times/N_{E/F}(E^\times)) \times \text{Br}^{(1)}(E)_{2n+2}$	$\begin{cases} \text{Br}(F_v)_2 & (v \notin V_s(E)) \\ \text{Br}(F_v)_{2n+2} & (v \in V_s(E)) \end{cases}$
$B_n$	$\mu_2$	$\text{Br}(F)_2$	$\text{Br}(F_v)_2$
$C_n$	$\mu_2$	$\text{Br}(F)_2$	$\text{Br}(F_v)_2$
${}^1D_{2n}$	$\mu_2 \times \mu_2$	$\text{Br}(F)_2 \times \text{Br}(F)_2$	$\text{Br}(F_v)_2 \times \text{Br}(F_v)_2$
${}^1D_{2n+1}$	$\mu_4$	$\text{Br}(F)_4$	$\text{Br}(F_v)_4$
${}^2D_{2n}$	$R_{E/F}(\mu_2)$	$\text{Br}(E)_2$	$\begin{cases} \text{Br}(E_v)_2 & (v \notin V_s(E)) \\ \text{Br}(F_v)_2 \times \text{Br}(F_v)_2 & (v \in V_s(E)) \end{cases}$
${}^2D_{2n+1}$	$R_{E/F}^{(1)}(\mu_4)$	$(F^\times/N_{E/F}(E^\times)) \times \text{Br}^{(1)}(E)_4$	$\begin{cases} \text{Br}(F_v)_2 & (v \notin V_s(E)) \\ \text{Br}(F_v)_4 & (v \in V_s(E)) \end{cases}$
${}^3D_4$	$R_{E/F}^{(1)}(\mu_2)$	$\text{Br}^{(1)}(E)_2$	$\begin{cases} 1 & (v \notin V_s(E)) \\ \text{Br}(F_v)_2 \times \text{Br}(F_v)_2 & (v \in V_s(E)) \end{cases}$
${}^6D_4$	$R_{E/F}^{(1)}(\mu_2)$	$\text{Br}^{(1)}(E')_2$	$\begin{cases} 1 & (v \notin V_s(E')) \\ \text{Br}(F_v)_2 \times \text{Br}(F_v)_2 & (v \in V_s(E)) \\ \text{Br}(E'_v)_2 & (\text{その他}) \end{cases}$
$G_2$	1	1	1
$F_4$	1	1	1
${}^1E_6$	$\mu_3$	$\text{Br}(F)_3$	$\text{Br}(F_v)_3$
${}^2E_6$	$R_{E/F}^{(1)}(\mu_3)$	$\text{Br}^{(1)}(E)_3$	$\begin{cases} 1 & (v \notin V_s(E)) \\ \text{Br}(F_v)_3 & (v \in V_s(E)) \end{cases}$
$E_7$	$\mu_2$	$\text{Br}(F)_2$	$\text{Br}(F_v)_2$
$E_8$	1	1	1

### 9.3 $F$ -同型類の記述

$G_0 = G^s(\Delta)_\tau$  の内部  $F$ -型の  $F$ -同型類を記述するには,  $\text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \backslash H^1(F, \overline{G}_0)$  を調べる必要がある. 記号を簡単にするために

$$A_F := \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta), \quad \widehat{H}^1(F, \overline{G}_0) := A_F \backslash H^1(F, \overline{G}_0), \quad \widehat{H}^2(F, Z_0) := A_F \backslash H^2(F, Z_0)$$

と書くことにする.  $[z] \in H^1(F, \overline{G}_0)$  の軌道は  $\mathcal{O}([z]) \in \widehat{H}^1(F, \overline{G}_0)$  で表す. 局所体  $F_v$  においても同様の記号を用いる. ただし, 各  $v \in V$  において  $\tau(\Gamma_v) \subset \tau(\Gamma)$  から自然な包含関係

$$A_F = \text{Aut}_F(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \subset A_{F_v} = \text{Aut}_{F_v}(G_0, \mathcal{D}_\Delta) \quad (9.3.1)$$

があるので,  $A_F \backslash H^1(F_v, \overline{G}_0)$  も考えられるが, これは一般に  $\widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0) = A_{F_v} \backslash H^1(F_v, \overline{G}_0)$  とは一致しない. 明らかに自然な写像

$$\widehat{H}^1(F, \overline{G}_0) \longrightarrow \widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0), \quad \widehat{H}^2(F, Z_0) \longrightarrow \widehat{H}^2(F_v, Z_0)$$

は全射である. また (9.3.1) から  $A_F$  は  $\prod H^1(F_v, \overline{G}_0)$  と  $\prod H^2(F_v, Z_0)$  に作用する. そこで図式

$$\begin{array}{ccc} & & \widehat{H}^2(F, Z_0) \\ & & \downarrow h_\infty^2 \\ A_F \backslash \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0) & \xrightarrow{\delta_\infty} & A_F \backslash \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^2(F_v, Z_0) \end{array}$$

のファイバー積を

$$\begin{aligned} & \widehat{H}^2(F, Z_0) \times_{h_\infty^2 \times \delta_\infty} A_F \backslash \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0) \\ &= \{ \mathcal{O}([\beta]) \times \mathcal{O}([\alpha_v]_{v \in V_{\infty,1}}) \mid \mathcal{O}(h_\infty^2([\beta])) = \mathcal{O}(\delta_\infty([\alpha_v])) \} \end{aligned}$$

とする.  $A_F$  の作用は写像  $h_\infty^2, \delta_\infty$  と可換であるから, 写像

$$\widehat{H}^1(F, \overline{G}_0) \longrightarrow \widehat{H}^2(F, Z_0) \times_{h_\infty^2 \times \delta_\infty} A_F \backslash \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0) : \mathcal{O}([z]) \mapsto \mathcal{O}(\delta([z])) \times \mathcal{O}(h_\infty^1([z])) \quad (9.3.2)$$

が全射になることは容易に分かる. 実際  $\Delta \neq D_{2n}$  の場合には §7.3 でみたように  $A_F$  の  $\prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0)$  への作用は自明になるから, この場合 (9.3.2) は全単射になる. さらに図式

$$\begin{array}{ccc} & & \prod_{v \in V} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \\ & & \downarrow h_\infty^2 \\ \prod_{v \in V_{\infty,1}} \widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0) & \xrightarrow{\delta_\infty} & \prod_{v \in V_{\infty,1}} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \end{array} \quad (9.3.3)$$

のファイバー積を

$$\begin{aligned} & \prod_{v \in V} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \times_{h_\infty^2 \times \delta_\infty} \prod_{v \in V_{\infty,1}} \widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0) \\ &= \{ (\mathcal{O}_v([\beta_v]))_{v \in V} \times (\mathcal{O}_v([\alpha_v]))_{v \in V_{\infty,1}} \mid (\mathcal{O}_v(h_\infty^2([\beta_v]))_{v \in V_{\infty,1}}) = (\mathcal{O}_v(\delta_v([\alpha_v]))_{v \in V_{\infty,1}}) \} \end{aligned}$$

とおく. 自然な写像

$$\widehat{H}^2(F, Z_0) \times_{h_{\infty}^2 \times \delta_{\infty}} A_F \setminus \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}) \longrightarrow \prod_{v \in V} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \times_{h_{\infty}^2 \times \delta_{\infty}} \prod_{v \in V_{\infty,1}} \widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0)$$

と (9.3.2) を合成して, 写像

$$\widehat{H}^1(F, \overline{G}_0) \longrightarrow \prod_{v \in V} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \times_{h_{\infty}^2 \times \delta_{\infty}} \prod_{v \in V_{\infty,1}} \widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0)$$

を得る. 以下ではこの写像の像とファイバーを調べよう. Tate–Poitou の完全列

$$1 \longrightarrow H^2(F, Z_0) \longrightarrow \prod_{v \in V} H^2(F_v, Z_0) \xrightarrow{\lambda} (X(Z_0)^{\Gamma})^{PD} \longrightarrow 1$$

から  $H^2(F, Z_0) \cong \text{Ker} \lambda$  である. そこで  $\mathcal{O}_{\mathbf{A}} = (\mathcal{O}_v)_{v \in V} \in \prod_{v \in V} \widehat{H}^2(F_v, Z_0)$  に対して,  $\text{Ker} \lambda$  の部分集合を

$$\mathcal{O}_{\mathbf{A}}^{(1)} := \text{Ker} \lambda \cap \prod_{v \in V} \mathcal{O}_v$$

と定義して, さらに

$$\prod_{v \in V}^{(1)} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) := \{ \mathcal{O}_{\mathbf{A}} \in \prod_{v \in V} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \mid \mathcal{O}_{\mathbf{A}}^{(1)} \neq \emptyset \}$$

とおく. (9.3.3) と同様な図式によりファイバー積

$$\prod_{v \in V}^{(1)} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \times_{h_{\infty}^2 \times \delta_{\infty}} \prod_{v \in V_{\infty,1}} \widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0)$$

ができる. この集合の要素

$$\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \times \mathcal{X}_{\infty} = (\mathcal{O}_v)_{v \in V} \times (\mathcal{X}_v)_{v \in V_{\infty,1}} \in \prod_{v \in V}^{(1)} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \times_{h_{\infty}^2 \times \delta_{\infty}} \prod_{v \in V_{\infty,1}} \widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0)$$

に対して,  $\text{Ker} \lambda \times \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0)$  の部分集合  $(\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \times \mathcal{X}_{\infty})^{(1)}$  を

$$\begin{aligned} & (\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \times \mathcal{X}_{\infty})^{(1)} \\ &= \{ ([\beta_v])_{v \in V} \times ([\alpha_v])_{v \in V_{\infty,1}} \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}}^{(1)} \times \prod_{v \in V_{\infty,1}} \mathcal{X}_v \mid h_{\infty}^2([\beta_v])_{v \in V_{\infty,1}} = \delta_{\infty}([\alpha_v]_{v \in V_{\infty,1}}) \} \end{aligned}$$

で定義する. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, \overline{G}_0) & \xrightarrow[\cong]{\ell_{\mathbf{A}}} & \text{Ker} \lambda \times_{h_{\infty}^2 \times \delta_{\infty}} \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{H}^1(F, \overline{G}_0) & \xrightarrow{L_{\mathbf{A}}} & \prod_{v \in V}^{(1)} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \times_{h_{\infty}^2 \times \delta_{\infty}} \prod_{v \in V_{\infty,1}} \widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0) \end{array}$$

から次は容易に示せる.

定理

写像

$$L_A : \widehat{H}^1(F, \overline{G}_0) \longrightarrow \prod_{v \in V}^{(1)} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \times_{h_\infty^2 \times \delta_\infty} \prod_{v \in V_{\infty,1}} \widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0)$$

は全射で, そのファイバーは

$$L_A^{-1}(\mathcal{O}_A \times \mathcal{X}_\infty) = A_F \setminus \ell_A^{-1}((\mathcal{O}_A \times \mathcal{X}_\infty)^{(1)})$$

となる.

ファイバーを同型類の言葉で書き直せば,  $F$ -同型類  $[G] \in \Sigma_F(G_0)$  に対して  $L_A \circ \widehat{\eta}_F([G]) = \mathcal{O}_A \times \mathcal{X}_\infty$  とすれば

$$(L_A \circ \widehat{\eta}_F)^{-1}(\mathcal{O}_A \times \mathcal{X}_\infty) = \{[G'] \in \Sigma_F(G_0) \mid \text{任意の } v \in V \text{ で } G \text{ と } G' \text{ は } F_v\text{-同型}\}$$

となる.  ${}^k\Delta$  の型に従って,  $L_A$  をもう少し詳しく見てみよう.

- $G_2, F_4, E_8$ -型の場合:

この場合  $H^2(F, Z_0) = 0$  かつ  $A_F$  が自明になるから

$$L_A : H^1(F, \overline{G}_0) = \widehat{H}^1(F, \overline{G}_0) \longrightarrow \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0)$$

は同型になり,  $F$ -同型類は  $v \in V_{\infty,1}$  での  $F_v$ -同型類だけで分類できる. とくに  $F$ -同型類は有限個しかなく,  $F$ -同型類についてハッセ原理が成り立つ.

- $B_n, C_n, E_7$ -型の場合:

この場合  $A_F$  が自明になるので,

$$L_A = \ell_A : H^1(F, \overline{G}_0) = \widehat{H}^1(F, \overline{G}_0) \longrightarrow \text{Ker } \lambda \times_{h_\infty^2 \times \delta_\infty} \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F, \overline{G}_0)$$

が同型になる. 従って  $F$ -同型類についてハッセ原理が成り立つ.

- ${}^1A_{2n}, {}^2A_{2n}, {}^1E_6, {}^2E_6$ -型の場合:

この場合  $v \in V_{\infty,1}$  において  $H^2(F_v, Z_0) = 0$  かつ  $A_{F_v}$  の作用が自明になるから, ファイバー積は直積になり

$$L_A : \widehat{H}^1(F, \overline{G}_0) \longrightarrow \prod_{v \in V_f}^{(1)} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \times \prod_{v \in V_{\infty,1}} H^1(F_v, \overline{G}_0)$$

をもつ.  $F$ -同型類のハッセ原理は成り立たない.

- ${}^1A_{2n+1}, {}^2A_{2n+1}, {}^1D_n, {}^2D_n, {}^3D_4, {}^6D_4$ -型の場合

これらの場合はとくに簡単にはならない.  $F$ -同型類のハッセ原理は成り立たない.



## 9.4 代数体上の佐武-Tits 図形

最後に代数体上実現可能な佐武-Tits 図形を求めよう. そのためにまず旗多様体のハッセ原理について説明しよう.  $\Delta, \tau, G_0$  は前と同様として,  $F$ -同型類  $[G] \in \Sigma_F(G_0)$  を固定しておく.  $G$  の  $\Gamma$ -図形を  $\{\Delta, \Delta_0, \tau\}$  としよう.  $\Delta$  の部分集合  $\theta$  に対して,  $P_\theta$  は  $\theta$  に対応する  $G$  の中の標準  $\bar{F}$ -パラボリック部分群とする. このとき等質空間  $\mathcal{P}_\theta := G/P_\theta$  は  $P_\theta$  の共役類の集合と同一視でき, 射影多様体の構造を持っている. §3.2 補題の証明でみたように

$$\gamma P_\theta = w_\gamma^{-1} P_{\tau(\gamma)(\theta)} w_\gamma, \quad (\gamma \in \Gamma)$$

が成り立つから, 同値な関係

$$\mathcal{P}_\theta \text{ は } F \text{ 上定義される} \iff \theta \text{ は } \tau(\Gamma)\text{-不変}$$

がある. さて  $\mathcal{P}_\theta$  が  $F$  上定義されるとき,  $\mathcal{P}_\theta$  の  $F$ -有理点は  $G$  の  $F$ -パラボリック部分群に対応する. §3.2 補題 (5) の証明から, 同値な関係

$$\mathcal{P}_\theta(F) \neq \emptyset \iff \theta \text{ は } \tau(\Gamma)\text{-不変かつ } \Delta_0 \subset \theta \quad (9.4.1)$$

が導かれる. 次の定理は Harder([H2]) によるものである.

**定理 (Harder)**

$\mathcal{P}_\theta$  は  $F$  上定義されているとする. このとき  $\mathcal{P}_\theta(F) \neq \emptyset$  であるための必要十分条件は任意の  $v \in V$  で  $\mathcal{P}_\theta(F_v) \neq \emptyset$  となることである.

これから次が従う.

**系**

各  $v \in V$  について,  $G$  の  $F_v$  上の  $\Gamma_v$ -図形を  $\{\Delta, \Delta_0^{(v)}, \tau_v\}$  で表すとき,  $\Delta_0$  はすべての  $\Delta_0^{(v)}$ , ( $v \in V$ ) を含む最小の  $\tau(\Gamma)$ -不変部分集合である. 即ち

$$\Delta_0 = \bigcup_{\bar{\sigma} \in \tau(\Gamma)} \bar{\sigma} \left( \bigcup_{v \in V} \Delta_0^{(v)} \right) \quad (9.4.2)$$

である.

**証明**  $\theta$  を右辺で与えられる集合とする. このとき任意の  $v \in V$  で  $\mathcal{P}_\theta(F_v) \neq \emptyset$  であるから, Harder の定理より  $\mathcal{P}_\theta(F) \neq \emptyset$  である. よって (9.4.1) から,  $\Delta_0 \subset \theta$  となる. 逆の包含関係は,  $\Delta_0^{(v)} \subset \Delta_0$  は自明で,  $\Delta_0$  が  $\tau(\Gamma)$ -不変であることから従う.  $\square$

§9.1, 9.2, 9.3 の結果を合わせて,  $F$  上実現可能な佐武-Tits 図形が分類できる. 古典型の場合は直接 §6.6 らでも分類できるので, 結果を古典型と例外型に分けて述べよう.

## 古典型

${}^k\Delta$  が古典型るとき  $\Sigma_F({}^k\Delta)$  は次で与えられる.

$$\begin{aligned}\Sigma_F({}^1A_n) &= \{ {}^1A_{n,\ell}^{(d)} \mid d(\ell+1) = n+1, 1 \leq d, 0 \leq \ell \} \\ \Sigma_F({}^2A_n) &= \{ {}^2A_{n,\ell}^{(d)} \mid d \mid n+1, 2\ell d \leq n+1 \} \\ \Sigma_F(B_n) &= \{ B_{n,\ell} \mid 0 \leq \ell \leq n \} \\ \Sigma_F(C_n) &= \{ C_{n,n'}^{(1)}, C_{n,\ell}^{(2)} \mid 0 \leq \ell \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \} \\ \Sigma_F({}^1D_{2n}) &= \{ {}^1D_{2n,2\ell'}^{(1)}, {}^1D_{2n,\ell}^{(2)} \mid 0 \leq \ell \leq n \} \\ \Sigma_F({}^1D_{2n+1}) &= \{ {}^1D_{2n+1,2\ell+1'}^{(1)}, {}^1D_{2n+1,n-1}^{(2)} \mid 0 \leq \ell \leq n \} \\ \Sigma_F({}^2D_n) &= \{ {}^2D_{n,\ell'}^{(1)}, {}^2D_{n,m}^{(2)} \mid 0 \leq \ell \leq n-1, 0 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \}\end{aligned}$$

## 例外型

${}^k\Delta$  が例外型るとき実現可能な佐武-Tits 図形は下の表で与えられる. 表は

$$\begin{array}{l} \text{実現可能佐武-Tits 図形: } X \quad \begin{cases} (p) & (p\text{-進体で実現可能なときのマーク}) \\ (r) & (\text{実数体で実現可能なときのマーク}) \end{cases} \\ \begin{array}{cc} p\text{-進体} & \text{実数体} \\ Y_i, (Y_i')_{pos}, (Y_i'')_{a.a.} \text{ または } (Y_i'')_{all} & Z_j, (Z_j')_{pos} \text{ または } (Z_j'')_{all} \end{array} \end{array}$$

の形をもつ. 成分の意味は

- $Y_i, Z_j$ :  $X$  の実現の際にそれぞれある局所体  $F_{v_i}, F_{w_j}$  ( $v_i \in V_f, w_j \in V_{\infty,1}$ ) 上で必ず現れなければならない佐武-Tits 図形.
- $(Y_i')_{pos}, (Z_j')_{pos}$ :  $Y_i, Z_j$  以外に局所体上に現れうる, しかし必ずしも現れるとは限らない, 佐武-Tits 図形.
- $(Y_i'')_{a.a.}$ :  $X$  の実現で有限個を除いたほとんどすべての  $F_v$  ( $v \in V_f$ ) で佐武-Tits 図形が  $Y_i''$  になること.
- $(Y_i'')_{all}$ :  $X$  の実現ですべての  $F_v$  ( $v \in V_f$ ) で佐武-Tits 図形が  $Y_i''$  になること.
- $(Z_j'')_{all}$ :  $X$  の実現ですべての  $F_w$  ( $w \in V_{\infty,1}$ ) で佐武-Tits 図形が  $Z_j''$  になること.

とする.

$G_2$ -型

$F$		$F_v (v \in V_f)$	$F_w (w \in V_{\infty,1})$
$G_{2,0}^{14} : \bullet \Leftarrow \bullet$	( $r$ )	$(G_{2,2}^0)_{all}$	$G_{2,0}^{14}, (G_{2,2}^0)_{pos}$
$G_{2,2}^0 : \circ \Leftarrow \circ$	( $p, r$ )	$(G_{2,2}^0)_{all}$	$(G_{2,2}^0)_{all}$

$F_4$ -型

$F$		$F_v (v \in V_f)$	$F_w (w \in V_{\infty,1})$
$F_{4,0}^{52} : \bullet - \bullet \Rightarrow \bullet - \bullet$	( $r$ )	$(F_{4,4}^0)_{all}$	$F_{4,0}^{52}, (F_{4,4}^0, F_{4,1}^{21})_{pos}$
$F_{4,1}^{21} : \bullet - \bullet \Rightarrow \bullet - \circ$	( $r$ )	$(F_{4,4}^0)_{all}$	$F_{4,1}^{21}, (F_{4,4}^0)_{pos}$
$F_{4,4}^0 : \circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ$	( $p, r$ )	$(F_{4,4}^0)_{all}$	$(F_{4,4}^0)_{all}$

${}^1E_6$ -型

$F$		$F_v (v \in V_f)$	$F_w (w \in V_{\infty,1})$
${}^1E_{6,0}^{78} :$ $\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ $ $ $\bullet$			${}^1E_{6,2}^{16}, ({}^1E_{6,6}^0)_{a.a.}$ ${}^1E_{6,2}^{28}, ({}^1E_{6,6}^0)_{pos}$
${}^1E_{6,2}^{28} :$ $\circ - \bullet - \bullet - \bullet - \circ$ $ $ $\bullet$	( $r$ )	$({}^1E_{6,6}^0)_{all}$	${}^1E_{6,2}^{28}, ({}^1E_{6,6}^0)_{pos}$
${}^1E_{6,2}^{16} :$ $\bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet$ $ $ $\circ$	( $p$ )	${}^1E_{6,2}^{16}, ({}^1E_{6,6}^0)_{a.a.}$	$({}^1E_{6,6}^0)_{all}$
${}^1E_{6,6}^0 :$ $\circ - \circ - \circ - \circ - \circ$ $ $ $\circ$	( $p, r$ )	$({}^1E_{6,6}^0)_{all}$	$({}^1E_{6,6}^0)_{all}$

${}^2E_6$ -型

$F$		$F_v (v \in V_f)$	$F_w (w \in V_{\infty,1})$
${}^2E_{6,0}^{78} :$ $\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ $ $ $\bullet$	( $r$ )	(1) $({}^1E_{6,2}^{16})_{pos}, ({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{a.a.}$ (2) ${}^1E_{6,2}^{16}, ({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{a.a.}$	${}^2E_{6,0}^{78}, ({}^2E_{6,2}^{16}', \dots)_{pos}$ ${}^1E_{6,2}^{28}, {}^2E_{6,2}^{16}', ({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{pos}$
${}^2E_{6,1}^{35} :$ $\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ $ $ $\circ$		${}^1E_{6,2}^{16}, ({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{a.a.}$	${}^2E_{6,2}^{16}', ({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{pos}$
${}^2E_{6,1}^{29} :$ $\circ - \bullet - \bullet - \bullet - \circ$ $ $ $\bullet$		$({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{all}$	${}^1E_{6,2}^{28}, ({}^2E_{6,2}^{16}', {}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{pos}$
${}^2E_{6,2}^{16''} :$ $\bullet - \bullet - \circ - \bullet - \bullet$ $ $ $\circ$		${}^1E_{6,2}^{16}, ({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{a.a.}$	$({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{all}$
${}^2E_{6,2}^{16'}$ $\circ - \bullet - \bullet - \bullet - \circ$ $ $ $\circ$	( $r$ )	$({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{all}$	${}^2E_{6,2}^{16}', ({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{pos}$
${}^2E_{6,4}^2 :$ $\circ - \circ - \circ - \circ - \circ$ $ $ $\circ$	( $p, r$ )	$({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{all}$	$({}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,6}^0)_{all}$

ここで

$$({}^2E_{6,2}^{16}', \dots)_{pos} = ({}^2E_{6,2}^{16}', {}^2E_{6,4}^2, {}^1E_{6,2}^{28}, {}^1E_{6,6}^0)_{pos}$$

とする。

$E_7$ -型

$F$		$F_v (v \in V_f)$	$F_w (w \in V_{\infty,1})$
$E_{7,0}^{133} :$	(r)	$(E_{7,4}^9)_{pos}, (E_{7,7}^0)_{a.a.}$	$E_{7,0}^{133}, (E_{7,3}^{28}, T_{7,4}^9, E_{7,7}^0)_{pos}$
$E_{7,2}^{31} :$		(1) $E_{7,4}^9, (E_{7,7}^0)_{a.a.}$ (2) $(E_{7,4}^9)_{pos}, (E_{7,7}^0)_{a.a.}$	$E_{7,3}^{28}, (E_{7,4}^9, E_{7,7}^0)_{pos}$ $E_{7,3}^{28}, E_{7,4}^9, (E_{7,7}^0)_{pos}$
$E_{7,3}^{28} :$	(r)	$(E_{7,7}^0)_{all}$	$E_{7,3}^{28}, (E_{7,7}^0)_{pos}$
$E_{7,4}^9 :$	(p, r)	(1) $E_{7,4}^9, (E_{7,7}^0)_{a.a.}$ (2) $(E_{7,4}^9)_{pos}, (E_{7,7}^0)_{a.a.}$	$(E_{7,4}^9, E_{7,7}^0)_{pos}$ $E_{7,4}^9, (E_{7,7}^0)_{pos}$
$E_{7,7}^0 :$	(p, r)	$(E_{7,7}^0)_{all}$	$(E_{7,7}^0)_{all}$

$E_8$ -型

$F$		$F_v (v \in V_f)$	$F_w (w \in V_{\infty,1})$
$E_{8,0}^{248} :$	(r)	$(E_{8,8}^0)_{all}$	$E_{8,0}^{248}, (E_{8,4}^{28}, E_{8,8}^0)_{pos}$
$E_{8,4}^{28} :$	(r)	$(E_{8,8}^0)_{all}$	$E_{8,4}^{28}, (E_{8,8}^0)_{pos}$
$E_{8,8}^0 :$	(p, r)	$(E_{8,8}^0)_{all}$	$(E_{8,8}^0)_{all}$

${}^3D_4$ -型

$F$	$F_v (v \in V_f)$	$F_w (w \in V_{\infty,1})$
${}^3D_{4,0}^{28}$ :	$({}^1D_{4,2}^{(1)})_{pos}, ({}^3D_{4,2'}^2, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{a.a.}$	${}^1D_{4,0'}^{(1)}, ({}^1D_{4,2'}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{pos}$
${}^3D_{4,1}^9$ :	$(1) {}^1D_{4,2'}^{(1)}, ({}^3D_{4,2'}^2, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{a.a.}$ $(2) ({}^1D_{4,2}^{(1)})_{pos}, ({}^3D_{4,2'}^2, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{a.a.}$	$({}^1D_{4,2'}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{pos}$ ${}^1D_{4,2}^{(1)}, ({}^1D_{4,4}^{(1)})_{pos}$
${}^3D_{4,2}^2$ :	(p) $({}^3D_{4,2'}^2, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{all}$	$({}^1D_{4,4}^{(1)})_{all}$

${}^6D_4$ -型

$F$	$F_v (v \in V_f)$	$F_w (w \in V_{\infty,1})$
${}^6D_{4,0}^{28}$ :	$(1) ({}^2D_{4,1'}^{(2)}, {}^1D_{4,2}^{(1)})_{pos}, ({}^6D_{4,2'}^2, \dots)_{a.a.}$ $(2) ({}^2D_{4,1'}^{(2)}, {}^1D_{4,2}^{(1)})_{pos}, ({}^6D_{4,2'}^2, \dots)_{a.a.}$	${}^2D_{4,1'}^{(1)}, ({}^2D_{4,3'}^{(1)}, \dots)_{pos}$ ${}^1D_{4,0'}^{(1)}, ({}^2D_{4,1'}^{(1)}, \dots)_{pos}$
${}^6D_{4,1}^9$ :	$(1) {}^1D_{4,2'}^{(1)}, ({}^2D_{4,1}^{(2)})_{pos}, ({}^6D_{4,2'}^2, \dots)_{a.a.}$ $(2) {}^2D_{4,1'}^{(2)}, ({}^1D_{4,2}^{(1)})_{pos}, ({}^6D_{4,3'}^2, \dots)_{a.a.}$ $(3) ({}^2D_{4,1'}^{(2)}, {}^1D_{4,2}^{(1)})_{pos}, ({}^6D_{4,2'}^2, \dots)_{a.a.}$	$({}^2D_{4,3'}^{(1)}, {}^1D_{4,2'}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{pos}$ $({}^2D_{4,3'}^{(1)}, {}^1D_{4,2'}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{pos}$ ${}^1D_{4,2}^{(1)}, ({}^2D_{4,3'}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{pos}$
${}^6D_{4,2}^2$ :	(p) $({}^6D_{4,2'}^2, {}^3D_{4,2'}^2, {}^2D_{4,3'}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{all}$	$({}^2D_{4,3'}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{all}$

ここで

$$\begin{aligned}
 ({}^6D_{4,2'}^2, \dots)_{a.a.} &= ({}^6D_{4,2'}^2, {}^3D_{4,2'}^2, {}^2D_{4,3'}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{a.a.}, \\
 ({}^2D_{4,3'}^{(1)}, \dots)_{pos} &= ({}^2D_{4,3'}^{(1)}, {}^1D_{4,0'}^{(1)}, {}^1D_{4,2}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{pos}, \quad ({}^2D_{4,1'}^{(2)}, \dots)_{pos} = ({}^2D_{4,1'}^{(2)}, {}^2D_{4,3'}^{(1)}, {}^1D_{4,0'}^{(1)}, {}^1D_{4,2}^{(1)}, {}^1D_{4,4}^{(1)})_{pos}
 \end{aligned}$$

とする. 各記号の佐武-Tits 図形は

$$\begin{aligned}
 {}^1D_{4,0}^{(1)} : & \quad \bullet - \bullet - \bullet & (r), \quad {}^1D_{4,2}^{(1)} : & \quad \bullet - \circ - \bullet & (p, r), \quad {}^1D_{4,4}^{(1)} : & \quad \circ - \circ - \circ & (p, r) \\
 & \quad \quad \quad | & & \quad \quad \quad | & & \quad \quad \quad | & \\
 & \quad \quad \quad \bullet & & \quad \quad \quad \circ & & \quad \quad \quad \circ & \\
 {}^2D_{4,1}^{(2)} : & \quad \bullet - \circ - \bullet & (p), \quad {}^2D_{4,1}^{(1)} : & \quad \circ - \bullet - \bullet & (r), \quad {}^2D_{4,3}^{(1)} : & \quad \circ - \circ - \circ & (p, r) \\
 & \quad \quad \quad | & & \quad \quad \quad | & & \quad \quad \quad | & \\
 & \quad \quad \quad \bullet & & \quad \quad \quad \bullet & & \quad \quad \quad \circ &
 \end{aligned}$$

である.

$(\Delta, \tau)$  が固定されたとき,  $k_v = |\tau(\Gamma_v)|$  とおいて

$$\coprod_{v \in V} \Sigma_{F_v}(k_v \Delta) = \{(X^{(v)}) \in \prod_{v \in V} \Sigma_{F_v}(k_v \Delta) \mid \text{有限個を除いたほとんどすべての } v \in V \text{ で } X^{(v)} \text{ は半分裂型}\}$$

と定める. その要素  $(X^{(v)})$  が与えられれば, (9.4.2) によって佐武-Tits 図形  $X$  が決まる. この対応から次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_F(G_0) & \xrightarrow{L_A \circ \widehat{\tau}_F} & \prod_{v \in V}^{(1)} \widehat{H}^2(F_v, Z_0) \times_{h_\infty^2 \times \delta_\infty} \prod_{v \in V_{\infty,1}} \widehat{H}^1(F_v, \overline{G}_0) \\ \widehat{\tau}_F \downarrow & & \downarrow \widehat{\tau}_A \\ \Sigma_F(k \Delta) & \longleftarrow & \prod_{v \in V} \Sigma_F(k_v \Delta) \end{array}$$

§7, 8 の結果から  $\widehat{\tau}_A$  のファイバーは有限集合である. しかし下段の写像  $(X^{(v)}) \mapsto X$  のファイバーは一般には有限集合とは限らないので, 写像  $\widehat{\tau}_F$  のファイバーも有限集合とは限らない. 例外型で有限集合となるのは次の場合である.

$X$	$G_{2,0}^{14}$	$F_{4,0}^{52}$	$F_{4,1}^{21}$	${}^1E_{6,2}^{28}$	${}^2E_{6,1}^{29}$	${}^2E_{6,2}^{16'}$
$ \widehat{\tau}_F^{-1}(X) $	$2^m - 1$	$3^m - 2^m$	$2^m - 1$	$2^m - 1$	$2^{m-n}(2^n - 1)$	$2^{m-n} - 1$
	$E_{7,3}^{28}$	$E_{8,0}^{248}$	$E_{8,4}^{28}$	(半分裂型)		
	$2^m - 1$	$3^m - 2^m$	$2^m - 1$	1		

ここで  $m = |V_{\infty,1}|$ ,  $n = |V_{\infty,1}(E)|$  とする. ただし  $E$  は  $\overline{F}$  の  $\text{Ker } \tau$  による不変体で,  $V_{\infty,1}(E)$  は  $F$  の実素点で  $E$  上完全分解するものの集合とする.

## 参考文献

- [AG] Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, A. Borel and G. D. Mostow eds. Proc. Symp. Pure Math. 9 Amer. Math. Soc. 1966.
- [Ar] S. Araki, *On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces*, J. Math. Osaka City Univ. 13 (1962) 1-34.
- [B2] A. Borel, *Linear Algebraic Groups* (2nd ed.), Springer-Verlag 1991.
- [B-T] A. Borel and J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. I.H.E.S. 27 (1965) 55 - 150.
- [Bou] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Ch. 4,5 et 6, Ch. 7 et 8, Masson 1990
- [C] C. Chevalley, *Classification des groupes de Lie algébriques*, Seminaire Ecole Norm. Sup., Paris 1956–1958.
- [Mu] S. Murakami, *Sur la classification des algèbres de Lie réelles et simples*, Osaka J. Math. 2 (1965) 291-307.
- [Mo] M. Morishita, 線形代数群の Galois cohomology, 本報告集
- [P-R] V. Platonov and A. Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory*, Academic Press 1994
- [K] S. Kato, 相対ルート系, 本報告集
- [San] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine und angew. 327 (1981) 12-80.
- [Sa1] I. Satake, *Classification Theory of Semi-Simple Algebraic Groups*, Marcel Dekker 1971.
- [Sa2] I. Satake, *On classification of semisimple algebraic groups*, The-7th MSJ Int. Res. Inst. Class Field Theory
- [Sa3] I. Satake, *On a certain invariants of the groups of type  $E_6$  and  $E_7$* , J. Math. Soc. Japan 20 (1968) 322-335.
- [Se] J. P. Serre, *Cohomologie Galoisienne* (5th ed.), Springer Verlag 1994.
- [Sp] T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups* (2nd ed.), Birkhauser 1998.
- [St] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley Groups*, Yale Univ. 1967.
- [T1] J. Tits, *Classification of algebraic semisimple groups*, in [AG], 33 - 62.
- [T2] J. Tits, *Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups*, J. Algebra 131 (1990) 648-677.
- [W] A. Weil, *Algebras with involutions and the classical groups*, J. Ind. Math. Soc. 24 1960 589-623.