対称錐体と Jordan 代数

渡部 隆夫

平成１１年度 (１９９９年) 後期

目的: 有限次元ユークリッド空間内の対称錐体を, Koecher − Vinberg による形式的実 Jordan 代数との対応関係を使って分類する.

目次

参考図書

[1] A. Ash, On eutactic forms, Can. J. Math. Vol.XXIX, 1040 - 1054 (1977).
[2] J. Faraut and A. Korányi, Analysis on Symmetric Cones, Clarendon Press, 1994.
[3] A. Koecher, Jordan Algebras and Their Applications, Lecture Note at Univ. Minnesota, 1962.

1. 凸錐体

V: 有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間
$(,)$: V 上の内積
部分集合 $X, Y \subset V$ に対して

$$-X := \{-x : x \in X\}, \qquad X - Y := \{x - y : x \in X, y \in Y\}$$
$$X^- := X \text{ の閉包}, \qquad X^o := X \text{ の開核}, \qquad V \backslash X := X \text{ の補集合}$$

Def.
$\Omega \subset V$ について
(1) Ω が錐体 (cone) とは, $0 < \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \implies \lambda x \in \Omega$ が成り立つこと.
(2) Ω が凸 (convex) とは, $0 < \lambda < 1,\ x, y \in \Omega \implies \lambda x + (1-\lambda) y \in \Omega$ が成り立つこと.

Lemma 1
Ω は凸錐体とする.
(1) $0 < \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ x, y \in \Omega \implies \lambda x + \mu y \in \Omega$
(2) $\Omega - \Omega$ は Ω を含む最小の部分空間である.
(3) $\Omega \cap (-\Omega)$ は Ω に含まれる最大の部分空間である.

定理1
任意の部分集合 $X \subset V$ に対し

$$P(X) := \{y \in V : (x, y) \leq 1, \quad ({}^\forall x \in X)\}$$

を X の極集合 (polar set) という. Ω が閉凸集合で $0 \in \Omega$ ならば $P(P(\Omega)) = \Omega$ である.

証明.

$$P(P(\Omega)) = \{z \in V : (y, z) \leq 1, \quad ({}^\forall y \in P(\Omega))\}$$

より $\Omega \subset P(P(\Omega))$ は明らか. そこで $P(P(\Omega)) \subset \Omega$ を示す. 補集合を取って $V \backslash \Omega \subset V \backslash P(P(\Omega))$ を示す.
$x_0 \in V \backslash \Omega$ とする. Ω は閉だから

$${}^\exists x_1 \in \Omega \ \ s.t. \ ||x_1 - x_0|| = \min_{x \in \Omega} ||x - x_0||$$

が存在する. また Ω の閉凸性から $0 \leq \lambda \leq 1,\ x \in \Omega$ について, $\lambda x + (1-\lambda) x_1 \in \Omega$. よって

$$||\lambda x + (1-\lambda) x_1 - x_0||^2 \geq ||x_1 - x_0||^2$$

より

$$\lambda^2 ||x - x_1||^2 + 2\lambda (x - x_1, x_1 - x_0) \geq 0$$

これがすべての $0 \leq \lambda \leq 1$ で成り立つから

$$(x - x_1, x_1 - x_0) \geq 0$$

ゆえに

$$(x, x_0 - x_1) \leq (x_1, x_0 - x_1), \qquad (x \in \Omega)$$

とくに $x = 0 \in \Omega$ ととれば $0 \leq (x_1, x_0 - x_1)$. また $0 < ||x_0 - x_1||^2$ から

$$0 \leq (x_1, x_0 - x_1) < \mu < (x_0, x_0 - x_1)$$

となる μ が取れる. そこで

$$y = \frac{1}{\mu}(x_0 - x_1)$$

とおけば

$$x \in \Omega, \ \ (x, y) = \frac{1}{\mu}(x, x_0 - x_1) \leq \frac{1}{\mu}(x_1, x_0 - x_1) < 1$$

より $y \in P(\Omega)$. さらに

$$(x_0, y) = \frac{1}{\mu}(x_0, x_0 - x_1) > 1$$

より $x_0 \notin P(P(\Omega))$. したがって $x_0 \in V \backslash P(P(\Omega))$. $\square$

Def.

Ω が錐体のとき

$$\Omega^\sharp := \{y \in V : (x, y) \geq 0, \quad (^\forall x \in \Omega)\}$$

を Ω の閉双対錐体 (closed dual cone) という. $\Omega^\sharp$ は閉凸錐体である.

定理 2

$\Omega \neq \emptyset$ が閉凸錐体ならば $(\Omega^\sharp)^\sharp = \Omega$ である.

証明. $\Omega^\sharp = -P(\Omega)$ である. Ω は閉錐体だから $0 \in \Omega$. よって定理 1 から主張が従う. $\square$

系

Ω は定理 2 と同じ. このとき $(\Omega^\sharp - \Omega^\sharp)^\perp = \Omega \cap (-\Omega)$ である.

定理 3

$\Omega \neq \emptyset$ は閉凸錐体とする. このとき

$$(\Omega^\sharp)^o = \{y \in V : (x, y) > 0, \quad (^\forall x \in \Omega \backslash \{0\})\}$$

である. さらに

$$\Omega \cap (-\Omega) = \{0\} \iff (\Omega^\sharp)^o \neq \emptyset$$

証明. $S(V) := \{x \in V \colon ||x|| = 1\}$ とする. C は錐体だから

$$D := \{y \in V \colon (x, y) > 0\,, \quad ({}^\forall x \in \Omega \backslash \{0\})\} = \{y \in V \colon (x, y) > 0\,, \quad ({}^\forall x \in \Omega \cap S(V))\}$$

である. $\Omega \cap S(V)$ はコンパクトであるから, 関数 $y \mapsto m(y) := \min_{x \in \Omega \cap S(V)}(x, y)$ は連続で $D = \{y \in V \colon m(y) > 0\}$ は開集合になる. よって $D \subset (\Omega^\sharp)^o$. 逆に $y \in (\Omega^\sharp)^o$ のとき, 十分小さい $\epsilon > 0$ で $y + z \in (\Omega^\sharp)^o$, $(||z|| < \epsilon)$ となる. したがって

$$0 \leq (x, y + z) = (x, y) + (x, z)\,, \qquad ({}^\forall x \in \Omega \backslash \{0\},\ ||z|| < \epsilon)$$

これから

$$0 < (x, y)\,, \qquad ({}^\forall x \in \Omega \backslash \{0\})$$

でなければならない. ゆえに $y \in D$.

前の系から

$$\begin{aligned} \Omega \cap (-\Omega) = \{0\} \iff \Omega^\sharp - \Omega^\sharp = V &\iff V \text{ は } \Omega^\sharp \text{ で張られる} \\ &\iff \Omega^\sharp \text{ は } V \text{ の基底を含む} \\ &\iff (\Omega^\sharp)^o \neq \emptyset \end{aligned}$$

である. ただし最後の $\Longrightarrow$ は $\Omega^\sharp$ に含まれる基底を $v_1, \cdots, v_n$ とすれば, $\Omega^\sharp$ は凸錐体だから

$$\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \colon 0 < \lambda_i\} \subset (\Omega^\sharp)^o$$

から従う. □

Lemma 2

Ω は閉凸錐体で, $U \subset (\Omega^\sharp)^o$ はコンパクト部分集合とする. このとき

$${}^\exists \rho > 0 \ \ s.t.\ \ (x, y) \geq \rho ||x||\,, \qquad ({}^\forall x \in \Omega,\ y \in U)$$

証明. $x = 0$ のときは自明だから $x \neq 0$ で示せばよい. $z = x/||x|| \in \Omega \cap S(V)$ として

$${}^\exists \rho > 0 \ \ s.t.\ \ (z, y) \geq \rho\,, \qquad ({}^\forall z \in \Omega \cap S(V),\ y \in U)$$

を示せばい. コンパクト性から

$$\rho = \min_{y \in U} \min_{z \in \Omega \cap S(V)} (z, y)$$

が存在する. 定理 3 より $\rho > 0$ である □

系

Ω は閉凸錐体とする. 任意の $y \in (\Omega^\sharp)^o$ に対して

$$\{x \in \Omega \colon (x, y) \leq 1\}$$

はコンパクトである.

証明. Lemma 2 で $U = \{y\}$ ととる. このとき

$$1 \geq (x, y) \implies \frac{1}{\rho} \geq ||x||$$

で $\{x \in \Omega \colon (x, y) \leq 1\}$ は球に含まれる閉集合である. □

2. 対称錐体

$\Omega \neq \emptyset$ は開凸錐体とする．その閉包 Ω^- は閉凸錐体になる．

Lemma 3
$(\Omega^-)^o = \Omega$

証明．まず

$$x \in \Omega^-,\ y \in \Omega \implies \lambda x + \mu y \in \Omega, \qquad (0 \leq \lambda,\ 0 < \mu)$$

を示す．$U_\epsilon = \{u \in V : ||u|| < \epsilon\}$ として, $\epsilon << 0$ ならば $y + U_\epsilon \subset \Omega$ とできる．Ω^- は凸錐体だから

$$\lambda x + \mu(y + U_\epsilon) \subset \Omega^-$$

とくに $(\lambda x + \mu(y + U_\epsilon)) \cap \Omega \neq \emptyset$ となり, $u \in U_\epsilon$ で $\lambda x + \mu(y + u) \in \Omega$ となるものが取れる．このとき $-u \in U_\epsilon$ でもあるから, $y - u \in \Omega$ で $\mu(y - u) \in \Omega$. したがって $\lambda x + 2\mu y = \lambda x + \mu(y + u) + \mu(y - u) \in \Omega$ を得る．μ は任意だから $\lambda x + \mu y \in \Omega$.
さて $x \in (\Omega^-)^o$ とする．$x + U_\epsilon \subset (\Omega^-)^o$ となる近傍を取る．上より $x + \mu' y \in \Omega$ で, $0 < \mu'$ が十分小さければ $\mu' y \in U_\epsilon$. したがって $x - \mu' y \in x + U_\epsilon \subset (\Omega^-)^o$. $\lambda = \mu = 1$ で上を適用すれば

$$2x = \lambda(x - \mu' y) + \mu(x + \mu' y) \in \Omega$$

ゆえに $x \in \Omega$ となり $(\Omega^-)^o \subset \Omega$. 逆の包含関係は自明． □

Def.
集合

$$\Omega^* := \{y \in V : (x, y) > 0\,, \quad (^\forall x \in \Omega^- \backslash \{0\})\}$$

を Ω の開双対錐体 (open dual cone) という．定理 3 から $\Omega^* = ((\Omega^-)^\sharp)^o$ で,

$$\Omega^* \neq \emptyset \iff \Omega^- \cap (-\Omega^-) = \{0\}$$

である．

定理 4
$\Omega^* \neq \emptyset$ ならば $(\Omega^*)^* = \Omega$ である．

証明．定理 3 より $(\Omega^*)^- = (\Omega^-)^\sharp$ である．したがって定理 2 と補題 3 から

$$(\Omega^*)^* = (((((\Omega^-)^\sharp)^o)^-)^\sharp)^o = (((\Omega^-)^\sharp)^\sharp)^o = (\Omega^-)^o = \Omega$$

を持つ． □

Def.
$\Omega^* = \Omega$ であるような Ω を自己双対錐体 (self-dual cone) という．

Def.
開凸錐体 Ω に対し

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V) \colon g\Omega = \Omega\} = \{g \in GL(V) \colon g\Omega^- = \Omega^-\}$$

を Ω の自己同型群という.

Lemma 4
$G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群である. とくにそれは Lie 群になる.

証明. $g = \lim g_n \in G(\Omega)^-$ とする. $g_n\Omega^- = \Omega^-$, $g_n^{-1}\Omega^- = \Omega^-$ より $g\Omega^- \subset \Omega^-$, $g^{-1}\Omega^- \subset \Omega^-$. ゆえに $g\Omega^- = \Omega^-$ で $g \in G(\Omega)$. $\square$

Def.
開凸錐体 Ω について
(1) $G(\Omega)$ が Ω 上推移的に作用 ($^\forall x, y,\ ^\exists g \in G(\Omega),\ s.t.\ gx = y$) するとき Ω は等質的 (homogeneous) であるという.
(2) 等質的な自己双対錐体を対称錐体 (symmetric cone) という.

$g \in GL(V)$ の転置を g^* で表す. すなわち

$$(gx, y) = (x, g^*y)\,, \qquad (x, y \in V)$$

Lemma 5
開凸錐体 Ω について $\Omega^* \neq \emptyset$ ならば $G(\Omega^*) = G(\Omega)^*$ である. とくに Ω が自己双対錐体ならば $G(\Omega) = G(\Omega)^*$ が成り立つ.

証明. $g \in G(\Omega)$, $y \in \Omega^*$ について

$$(x, g^*y) = (gx, y) > 0\,, \qquad (^\forall x \in \Omega^- \backslash \{0\})$$

これから $g^*y \in \Omega^*$. ゆえに $g^*\Omega^* \subset \Omega^*$. 同様に $(g^{-1})^*\Omega^* \subset \Omega^*$. よって $g^* \in G(\Omega^*)$ で $G(\Omega)^* \subset G(\Omega^*)$. Ω を Ω^* で置き直せば, $G(\Omega^*)^* \subset G((\Omega^*)^*) = G(\Omega)$ より $G(\Omega^*) \subset G(\Omega)^*$. $\square$

Lemma 6
開凸錐体 Ω は $\Omega^* \neq \emptyset$ を満たすとする. コンパクト集合 $C_1, C_2 \subset \Omega$ に対し

$$G(\Omega)_{C_1, C_2} := \{g \in G(\Omega) \colon gC_1 \cap C_2 \neq \emptyset\}$$

とおけば, $G(\Omega)_{C_1, C_2}$ はコンパクトである.

証明. $GL(V) = GL_n(\mathbb{R})$ の位相について注意をしておく. $GL_n(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2+1}$ の中に

$$g = (g_{ij}) \mapsto (g_{ij}, \frac{1}{\det g})$$

で埋め込む. その像は $\mathbb{R}^{n^2+1}$ の中の超曲面

$$\{(x_{ij}, y) \in \mathbb{R}^{n^2+1} \colon \det(x_{ij})y = 1\}$$

になる. このとき $GL(V)$ の位相はこの超曲面の $\mathbb{R}^{n^2+1}$ からの相対位相と一致する. したがって $GL(V)$ の部分集合がコンパクトであることを示すには, それが $\mathbb{R}^{n^2+1}$ の中で閉かつ有界であることを示せばよい.

$g \in G(\Omega)_{C_1,C_2}$ とすると, ${}^{\exists}x_g \in C_1$ $s.t.$ $gx_g \in C_2$ である. $C_1 \subset \Omega = (\Omega^*)^*$ と $g^*y \in (\Omega^*)^-$ に Lemma 2 を適用すれば

$$^{\exists}\rho_1 > 0 \ \ s.t. \ \ (x_g, g^*y) \geq \rho_1||g^*y||, \qquad ({}^{\forall}y \in (\Omega^*)^-)$$

となる. 他方 Schwarz の不等式から

$$(gx_g, y) \leq ||gx_g||||y|| \leq (\max_{x \in C_2}||x||)||y||$$

したがって

$$||g^*y|| \leq \rho_2||y||, \qquad \rho_2 = \max_{x \in C_2}||x||/\rho_1$$

となる. Ω^* は開だから V の基底を含む. それを $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ とする. $||\mathbf{e}_i|| = 1$ としてよい. このとき

$$||g^*\mathbf{e}_k|| \leq \rho_2 \qquad (1 \leq k \leq n)$$

グラム行列 $((\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ は正定値対称行列だから, ある $A \in GL_n(\mathbb{R})$ により $((\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)) = {}^tAA$ とあらわせる. これから

$$||g^*\mathbf{e}_k||^2 = ||\sum_j g^*_{jk}\mathbf{e}_j||^2 = (g^*_{1k}, \cdots, g^*_{nk})^tAA \begin{pmatrix} g^*_{1k} \\ \vdots \\ g^*_{nk} \end{pmatrix} \leq \rho_2^2$$

したがって

$$A \begin{pmatrix} g^*_{1k} \\ \vdots \\ g^*_{nk} \end{pmatrix} \in (\text{半径 } \rho_2 \text{ の球})$$

だから $|g^*_{jk}|$ は有界である. $g \mapsto g^*$ は同相写像だから g の成分も有界である. 同様に g^{-1} について, $C_1 \cap g^{-1}C_2 \neq \emptyset$ だから C_1 と C_2 を入れ替えて同じ議論をすれば g^{-1} の成分も有界になる. したがって

$$g \in G(\Omega)_{C_1,C_2} \implies g \text{ と } g^{-1} \text{ の成分が動く範囲は有界}$$

となるから, $G(\Omega)_{C_1,C_2}$ は $GL(V)$ の中で有界になる. また $G(\Omega)_{C_1,C_2}$ が閉になることは容易だから, それはコンパクトになる. $\square$

各 $a \in \Omega$ に対し, その固定化群を

$$G(\Omega)_a := \{g \in G(\Omega) \colon ga = a\}$$

とおく.

系

Ω は上と同じ.

(1) 任意の $a \in \Omega$ について $G(\Omega)_a$ はコンパクトである.

(2) $H \subset G(\Omega)$ がコンパクト部分群ならば, ある $a \in \Omega$ で $H \subset G(\Omega)_a$ となるものが存在する.

証明. (1) $C_1 = C_2 = \{a\}$ とすれば $G(\Omega)_a = G(\Omega)_{C_1, C_2}$

(2) $x_0 \in \Omega$ を固定する. $h \mapsto hx_0$ を Ω に値をとる H 上の関数とする. dh を H 上の不変測度として

$$a = \int_H hx_0 dh \in V$$

とおく. 任意の $y \in (\Omega^*)^- \backslash \{0\}$ について, $x_0 \in \Omega = (\Omega^*)^*$ から $(x_0, y) > 0$. ゆえに

$$(a, y) = \int_H (hx_0, y) dh > 0$$

したがって $a \in (\Omega^*)^* = \Omega$. H は a を不変にするから $H \subset G(\Omega)_a$. $\Box$

系

開凸錐体 Ω は等質的かつ $\Omega^* \neq \emptyset$ とする. $a \in \Omega$ を固定するとき, 写像

$$f \colon G(\Omega)/G(\Omega)_a \longrightarrow \Omega \colon gG(\Omega)_a \mapsto ga$$

は同相写像になる.

証明. 等質性から写像は全単射で連続である. そこで開写像であることを示せばよい.

$$\pi \colon G(\Omega) \longrightarrow G(\Omega)/G(\Omega)_a$$

を自然な写像とする. e を単位元とする. $\pi(e)$ の基本近傍は $\pi(W)$, (W は e の近傍), の形に取れる. そこで $f(\pi(W)) = \pi(W)a = Wa$ が a の近傍になることを示せば十分.

背理法. Wa が a の近傍ではないとする. このとき点列

$$^\exists\{x_n\} \subset \Omega \backslash Wa \ \ s.t. \ \ \lim x_n = a$$

が取れる. $U_\epsilon = \{x \in V \colon ||x|| < \epsilon\}$ として, $\epsilon << 0$ とすれば $a + U_\epsilon$ は a の近傍を与える. $\{x_n\} \subset a + U_\epsilon$ としてよい. $a + U_\epsilon^-$ はコンパクトだから

$$\pi^{-1}(f^{-1}(a + U_\epsilon^-)) = \{g \in G(\Omega) \colon ga \in a + U_\epsilon^-\} = G(\Omega)_{\{a\}, a + U_\epsilon^-}$$

もコンパクトになる. 各 x_n に対し, $g_n \in \pi^{-1}(f^{-1}(a + U_\epsilon^-))$ で $g_n a = x_n$ となるものが取れる. コンパクト性から $\{g_n\}$ は収束部分列 $\lim g_{n_j} = g$ を含む. f の連続性から $a = \lim x_{n_j} = \lim g_{n_j} a = ga$. したがって $g \in G(\Omega)_a$ で, $\lim \pi(g_{n_j}) = \pi(g) = \pi(e)$. ゆえに $n_j >> 0$ の時 $\pi(g_{n_j}) \in \pi(W)$ となり, $x_{n_j} = f(\pi(g_{n_j})) \in f(\pi(W)) = Wa$ で矛盾. $\Box$

Lemma 7
開凸錐体 Ω は等質的かつ $\Omega^* \neq \emptyset$ であるとする. $G(\Omega)$ の単位元を含む連結成分を G とする.
(1) G は $G(\Omega)$ の開正規部分群で, Ω に推移的に作用する.
(2) 任意の $a \in \Omega$ について, $G_a := G \cap G(\Omega)_a$ は G の極大コンパクト部分群である. またこのような 2 つの群 G_a, G_b は互いに共役である.
(3) G_a は連結である.

証明. (1) G は連結成分であるから $G(\Omega)$ の中で開かつ閉である. $g, h \in G$ とする. このとき $g^{-1}G$ と $h^{-1}G$ も単位元を含む連結成分だから $g^{-1}G = G = h^{-1}G$ で $hg^{-1}G = G$. よって $hg^{-1} \in G$ となり G は開部分群になる. $g \in G(\Omega)$ とすると, gGg^{-1} も単位元を含む連結成分だから $gGg^{-1} = G$ で G は正規部分群である.
前の系から同相 $f\colon G(\Omega)/G(\Omega)_a \cong \Omega$ がある. G は開かつ閉であるから, $f(G)$ も開かつ閉. Ω は連結だから $f(G) = \Omega$ である.
(2) $a, b \in \Omega$ ならば $ga = b$ となる $g \in G$ がある. このとき $G_b = gG_ag^{-1}$ である. $H \subset G$ がコンパクト部分群ならば, ある $a \in \Omega$ で $H \subset G(\Omega_a) \cap G = G_a$. ゆえに G_a は極大になる.
(3) (1) より $G/G_a \cong \Omega$ で, Ω は凸だから単連結である. もし G_a が連結でなければ, その単位元を含む連結成分 G_a^0 は G_a の正規部分群で

$$G/G_a^0 \longrightarrow G/G_a$$

は被覆を与えるので, 単連結性に矛盾する. □

一般に $H \subset GL_n(\mathbb{R})$ を線形 Lie 群として, $\mathbb{R}$ から H への C^ω 級準同型全体を $\mathrm{Hom}_\omega(\mathbb{R}, H)$ とするとき, H の Lie 環は

$$\mathrm{Lie}(H) = \{\alpha'(0)\colon \alpha \in \mathrm{Hom}_\omega(\mathbb{R}, H)\}$$

により定義される. 指数写像 $\exp\colon M_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ を

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

とすれば,

$$\mathrm{Lie}(H) = \{X \in M_n(\mathbb{R})\colon \exp(tX) \in H \ \ (t \in \mathbb{R})\}$$

とも表される.
$O(V) = \{g \in GL(V)\colon g^* = g^{-1}\}$ とする.

Lemma 8
Ω は対称錐体とする.

$$^\exists e \in \Omega \ \ s.t. \ G_e = G \cap O(V)$$

である.

証明. $K := G \cap O(V)$ はコンパクトであるから, Lemma 7 (2) より, $K \subset G_e$ となる $e \in \Omega$ が存在する. G_e は連結であるから

$$K^\circ = G_e \iff \mathrm{Lie}(K) = \mathrm{Lie}(G_e)$$

したがって $\mathrm{Lie}(G_e) \subset \mathrm{Lie}(K)$ を示せばよい.

$$\mathrm{Lie}(G) = \{X \in \mathrm{End}(V) \colon \exp(X) \in G\}$$

である. Ω は対称だから $G(\Omega)^* = G(\Omega)$. これから $G^* = G$. したがって $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G)^*$.

$$\mathrm{Lie}(G)_\pm := \{X \in \mathrm{Lie}(G) \colon X^* = \pm X\}$$

とおけば

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G)_+ \oplus \mathrm{Lie}(G)_-$$

また

$$\mathrm{Lie}(K) = \mathrm{Lie}(G) \cap \mathrm{Lie}(O(V)) = \mathrm{Lie}(G)_-$$

となる. $X \in \mathrm{Lie}(G_e)$ として

$$X = X_+ + X_-\,, \qquad X_\pm \in \mathrm{Lie}(G)_\pm$$

とする. $\mathrm{Lie}(K) \subset \mathrm{Lie}(G_e)$ だから $X_- \in \mathrm{Lie}(G_e)$. したがって $X_+ \in \mathrm{Lie}(G_e)$ で, $t \in \mathbb{R}$ に対し, $\exp(tX_+) \in G_e$. G_e はコンパクトだから $t \mapsto \exp(tX_+)$ は有界である. X_+ は対称行列だから,

$$^\exists P \in GL(V) \;\; s.t. \;\; PX_+P^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

が取れて

$$P\exp(tX_+)P^{-1} = \exp(t(PX_+P^{-1})) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t})$$

となり, $\exp(tX_+)$ が有界になるのは $X_+ = 0$ の場合に限る. よって $X = X_- \in \mathrm{Lie}(K)$. $\square$

系

上と同じ仮定で, $K = G_e$ であるとき, $X \in \mathrm{Lie}(G)$ について

$$X \in \mathrm{Lie}(K) \iff Xe = 0$$

証明.

$$X \in \mathrm{Lie}(K) = \mathrm{Lie}(G_e) \iff \exp(tX)e = e \iff Xe = 0 \qquad \square$$

3. 対称錐体の例

例 1 Lorentz 錐体

双線型形式 $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$B(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 - \cdots - x_ny_n = {}^t xJy\,, \qquad J = \mathrm{diag}(1,-1,\cdots,-1)$$

で与える. このとき

$$\Lambda_n := \{x \in \mathbb{R}^n \colon B(x,x) > 0\,,\ \ x_1 > 0\}$$

は対称錐体である.

(1) 錐体であることは自明

(2) 凸体であること

$x, y \in \Lambda_n$, $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{gathered} B(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda^2 B(x,x) + 2\lambda(1-\lambda)B(x,y) + (1-\lambda)^2 B(y,y) \\ B(x,y) \geq x_1y_1 - \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2} > 0 \end{gathered}$$

より $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Lambda_n$

(3) 等質的であること

まず

$$\begin{aligned} O(B) = O(1,n-1) &:= \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \colon B(gx,gy) = B(x,y)\,, \quad (x,y \in \mathbb{R}^n)\} \\ SO_0(B) = SO_0(1,n-1) &:= O(B) \text{ の単位元を含む連結成分} \end{aligned}$$

として $G_1 = \mathbb{R}_+ \times SO_0(B)$ とおく. まず $SO_0(B)\mathbf{e}_1 \subset \Lambda_n$ を示す. $f\colon SO_0(B) \to \mathbb{R}^n$ を $f(g) = g\mathbf{e}_1$ と定義すると $f(g) \in \Lambda_n \cup (-\Lambda_n)$. $\emptyset \neq f^{-1}(\Lambda_n) \subset SO_0(B)$ で, 連結性から $f^{-1}(\Lambda_n) = SO_0(B)$. よって $SO_0(B)\mathbf{e}_1 \subset \Lambda_n$. これから $G_1\mathbf{e}_1 \subset \Lambda_n$. 逆に $\Lambda_n \subset G_1\mathbf{e}_1$ を示す. $SO_0(B)$ は次の形の部分群を含む.

$$\begin{gathered} SO_0(B)_{\mathbf{e}_1} := \{g \in SO_0(B) \colon g\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\} = \{\widetilde{u} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}\,, \quad u \in SO(n-1)\} \\ T := \{h_t := \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} \end{gathered}$$

G_1 は Λ_n に推移的に作用する. 実際, 任意の $x \in \Lambda_n$ を固定する. $\lambda = \sqrt{B(x,x)} > 0$ として, $y = \lambda^{-1}x$ とおけば $B(y,y) = 1$. ${}^t(y_2,\cdots,y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ について $SO(n-1)$ は単位球面上に推移的に作用するから

$$\frac{1}{\sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2}} \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とできる. したがって

$$y = y_1\mathbf{e}_1 + ru\mathbf{e}_n = \widetilde{u}(y_1\mathbf{e}_1 + r\mathbf{e}_n)\,, \qquad r := \sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

$$B(y,y) = B(y_1\mathbf{e}_1 + r\mathbf{e}_n, y_1\mathbf{e}_1 + r\mathbf{e}_n) = y_1^2 - r^2 = 1$$

より (y_1, r) は双曲線上の点だから, ある $t \in \mathbb{R}$ で $(y_1, r) = (\cosh t, \sinh t)$ と書ける. すなわち $y_1\mathbf{e}_1 + r\mathbf{e}_n = h_t\mathbf{e}_1$. 以上から

$$x = \lambda y = \lambda \widetilde{u} h_t \mathbf{e}_1$$

で $x \in G_1\mathbf{e}_1$. したがって $\Lambda_n = G_1\mathbf{e}_1$.

G_1 が等質的に作用するから, G の作用も等質的である. 実際には $G_1 = G$ となる.

(4) 自己双対であること

$\Lambda_n \subset \Lambda_n^*$: $y \in \Lambda_n$ とする. $x \in \Lambda_n^- \backslash \{0\}$ に対して

$$(x,y) \geq x_1y_1 - \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2} > 0$$

ゆえに $y \in \Lambda_n^*$.

$\Lambda_n^* \subset \Lambda_n$: $y \in \Lambda_n^*$ とする. $\mathbf{e}_1 \in \Lambda_n$ より $y_1 = (\mathbf{e}_1, y) > 0$. $y_2 = \cdots = y_n = 0$ なら明らかに $y \in \Lambda_n$. そうでなければ

$$x_1 = \sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2}, \quad x_2 = -y_2, \cdots x_n = -y_n$$

と x をとれば $x \in \Lambda_n^- \backslash \{0\}$. よって

$$0 < (x,y) = y_1\sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2} - (y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$

ゆえに $y \in \Lambda_n$.

例 2 正定値対称行列

$$\Sigma_m(\mathbb{R}) := \{x \in M_m(\mathbb{R}) \colon {}^t x = x\}$$

とおく. $\Sigma_m(\mathbb{R})$ の内積を

$$(x,y) := \mathrm{Tr}(xy) = \sum_{i,j} x_{ij}y_{ij}$$

で定める. $x \in \Sigma_m(\mathbb{R})$ に対し

$$Q_x(\xi) = {}^t\xi x \xi = \sum_{i,j} x_{ij}\xi_i\xi_j\,, \qquad (\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m)$$

は 2 次形式を与える.

$$x \text{ が半正定値 } (x \geq 0) \iff Q_x(\xi) \geq 0 \quad ({}^\forall \xi \in \mathbb{R}^n)$$
$$x \text{ が正定値 } (x > 0) \iff Q_x(\xi) > 0 \quad ({}^\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0)$$

である.

$$\Pi_m(\mathbb{R}) := \{x \in \Sigma_m(\mathbb{R}) \colon x > 0\}$$

は対称錐体である．

(1) 開凸錐体であることは容易.

(2) 自己双対であること

$\Pi_m(\mathbb{R})^- = \{x \in \Sigma_m(\mathbb{R})\colon x \geq 0\}$ である．

$\Pi_m(\mathbb{R})^* \subset \Pi_m(\mathbb{R})$: $y \in \Pi_m(\mathbb{R})^*$ とする．$\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi \neq 0$ に対して, $x_\xi := \xi^t\xi \in \Pi_m(\mathbb{R})^-\backslash\{0\}$ である．よって

$$0 < (x_\xi, y) = (\xi^t\xi, y) = Q_y(\xi)$$

より, $y \in \Pi_m(\mathbb{R})$.

$\Pi_m(\mathbb{R}) \subset \Pi_m(\mathbb{R})^*$: $x \in \Pi_m(\mathbb{R})^-$ とする．半正定値行列は平方根を持つ．すなわち

$$^\exists x_1 \in \Pi_m(\mathbb{R})^- \ \ s.t. \ \ x = x_1^2 = x_1{}^t x_1$$

x_1 の列ベクトルを $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ とすれば

$$x = \alpha_1{}^t\alpha_1 + \cdots + \alpha_m{}^t\alpha_m$$

$y \in \Pi_m(\mathbb{R})$, $x \neq 0$ とすれば

$$(y, x) = \sum_j (y, \alpha_j{}^t\alpha_j) = \sum_j Q_y(\alpha_j) > 0$$

したがって $y \in \Pi_m(\mathbb{R})^*$ である．

(3) 等質的であること

$$\rho\colon GL_m(\mathbb{R}) \longrightarrow\colon GL(\Sigma_m(\mathbb{R}))$$

を

$$\rho(g)x := gx^tg\,, \qquad (x \in \Sigma_m(\mathbb{R}))$$

で定める．$x \in \Pi_m(\mathbb{R})$ ならば

$$Q_{\rho(g)x}(\xi) = Q_x(gx) > 0\,, \qquad (0 \neq \xi \in \mathbb{R}^m)$$

より $\rho(g)x \in \Pi_m(\mathbb{R})$ で $\rho(G) \subset G(\Pi_m(\mathbb{R}))$. 対称行列は直交行列により対角化できるから, $x \in \Pi_m(\mathbb{R})$ に対し

$$^\exists u \in O_m(\mathbb{R}) \ \ s.t. \ \ uxu^{-1} = ux^tu = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$$

$\lambda_i > 0$ より

$$h := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda}_1, \cdots, \sqrt{\lambda}_m)$$

が存在して,

$$hux^tu^th = I_m$$

したがって

$$x = \rho(u^th)I_m$$

で $\rho(GL_m(\mathbb{R}))$ は $\Pi_m(\mathbb{R})$ に推移的に作用する．

4. 錐体の特性関数

以下 $\Omega \subset V$ は開凸錐体で, $\Omega^* \neq \emptyset$ であるとする.

Lemma ９

V 上のルベーグ測度に関する積分

$$\int_{\Omega^*} e^{-(x,y)} dy \,, \qquad (x \in \Omega)$$

は Ω の任意のコンパクト集合上一様収束する.

証明. $U \subset \Omega$ はコンパクトとする. このとき Lemma ２より

$$^{\exists}\rho > 0 \;\; s.t. \;\; (x,y) \geq \rho ||y| \,, \qquad (^{\forall}x \in U, \; y \in \Omega^*)$$

よって

$$\int_{\Omega^*} e^{-(x,y)} dy \leq \int_{\Omega^*} e^{-\rho||y||} dy \leq \int_V e^{-\rho||y||} dy < \infty$$

より U 上一様収束である. $\square$

Def.

$x \in \Omega$ の関数

$$\varphi(x) := \int_{\Omega^*} e^{-(x,y)} dy$$

を Ω の特性関数という. $\varphi(x) \in C^\infty$ である.

Lemma １０

$g \in G(\Omega)$ に対し

$$\varphi(gx) = |\det g|^{-1} \varphi(x)$$

特に $\lambda > 0$ に対し $\varphi(\lambda x) = \lambda^{-n} \varphi(x)$ である.

証明.

$$\varphi(gx) = \int_{\Omega^*} e^{-(-gx,y)} dy = \int_{\Omega^*} e^{-(x,g^* y)} dy = |\det(g^*)|^{-1} \varphi(x) \qquad \square$$

例

(1) $\Omega = \Lambda_n$. $x = \lambda u h_t \mathbf{e}_1$ とあらわせるから

$$\varphi(x) = |\det \lambda u h_t|^{-1} \varphi(\mathbf{e}_1) = \lambda^{-n} \varphi(\mathbf{e}_1) = B(x,x)^{-n/2} \varphi(\mathbf{e}_1)$$

(2) $\Omega = \Pi_m(\mathbb{R})$. $x = \rho(g) I_m$ とあらわせるから

$$\varphi(x) = |\det(\rho(g))|^{-1} \varphi(I_m) = |\det g|^{-(m+1)} \varphi(I_m) = |\det x|^{-(m+1)/2} \varphi(I_m)$$

Lemma １１

$\partial\Omega$ を Ω の境界として, $x_0 \in \partial\Omega$ とする．このとき

$$\{x_\ell\} \subset \Omega,\ \lim x_\ell = x_0 \quad\Longrightarrow\quad \lim \varphi(x_\ell) = \infty$$

証明. V の基底 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ を $(\Omega^*)^-$ からとる．$x_0 \in \partial\Omega$ だから, ある $u \in (\Omega^*)^- \backslash \{0\}$ で, $(x_0, u) = 0$ である．適当に基底を取り替えて $u = \mathbf{e}_1$ としてよい．座標 $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n$ に関する測度について

$$^\exists c > 0 \ \ s.t.\ \ dy = c d\lambda_1 \cdots d\lambda_n$$

である．

$$\{\lambda_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n \colon \lambda_j \geq 0\} \subset (\Omega^*)^-$$

であるから

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_{\Omega^*} e^{-(x,y)} dy \geq c \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(x, \lambda_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n)} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \\
&= c \prod_{j=1}^n \int_0^\infty e^{-\lambda_j (x, \mathbf{e}_j)} d\lambda_j = c \prod_{j=1}^n \frac{1}{(x, \mathbf{e}_j)}
\end{aligned}$$

よって

$$\lim \varphi(x_\ell) = \infty$$

である． □

Lemma １２

関数 $\log\varphi(x)$ の x での２次微分を B_x とする．すなわち B_x は対称双線型形式

$$B_x \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \colon (a, b) \mapsto D_a D_b \log\varphi(x)$$

である．任意の $x \in \Omega$ で B_x は正定値である．特に $\log\varphi(x)$ は狭義凸関数である．

証明. $0 \neq u \in V$ に対して $B_x(u, u) > 0$ を示せばよい．

$$B_x(u, u) = D_u^2 \log\varphi(x) = \frac{d^2}{dt^2} \log\varphi(x + tu)\|_{t=0} = \frac{\varphi(x) D_u^2 \varphi(x) - (D_u\varphi(x))^2}{\varphi(x)^2}$$

で

$$D_u\varphi(x) = -\int_{\Omega^*} (u, y) e^{-(x,y)} dy\,, \qquad D_u^2\varphi(x) = \int_{\Omega^*} (u, y)^2 e^{-(x,y)} dy$$

そこで

$$f(y) := e^{(x,y)/2}\,, \qquad g(y) = (u, y) e^{-(x,y)/2}$$

とおけば

$$B_x(u, u) = \frac{1}{\varphi(x)^2} \left\{ \int_{\Omega^*} f(y)^2 dy \int_{\Omega^*} g(y)^2 dy - \left(\int_{\Omega^*} f(y) g(y) dy \right)^2 \right\}$$

とあらわせる．Schwarz の不等式と f, g が比例していないことから, $B_x(u, u) > 0$ である． □

関数 $f\colon V\to\mathbb{R}$ の gradient を ∇f とおく．すなわち V の正規直交基底を固定して, それに関する座標を $(x_1,\cdots,x_n)$ とおけば

$$\nabla f(x)=(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$$

である．これから

$$(\nabla f(x),u)=D_uf(x)\,,\qquad ({}^\forall u\in V)$$

が成り立つ.

定理４

$x\in\Omega$ に対して

$$x^*:=-\nabla\log\varphi(x)=-\frac{\nabla\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

とすると, $x^*\in\Omega^*$ で, 対応 $\Omega\to\Omega^*\colon x\mapsto x^*$ は全単射である．また

$$(x,x^*)=\dim V\,,\qquad (x\in\Omega)$$

が成り立つ.

証明. (1) $\varphi(\lambda x)=\lambda^{-n}\varphi(x)$ であったから, Euler の等式より

$$(x,\nabla\varphi(x))=-n\varphi(x)$$

ゆえに

$$(x,x^*)=-\frac{1}{\varphi}(x)(x,\nabla\varphi(x))=n=\dim V$$

(2) $u\in\Omega^-\backslash\{0\}$ ならば

$$(x^*,u)=-\frac{1}{\varphi(x)}D_u\varphi(x)=\frac{1}{\varphi(x)}\int_{\Omega^*}(y,u)e^{-(x,y)}dy>0$$

より $x^*\in\Omega^*$.

(3) 全射: $z\in\Omega^*$ とする.

$$H_n(z):=\{y\in V\colon (y,z)=n\}=y_0+(\mathbb{R}z)^\perp$$

とおく．Lemma ２系から $(\Omega\cap H_n(z))^-$ はコンパクトであるから $\varphi(x)$ はその上で最小値をとる．また

$$(\Omega\cap H_n(z))^-\backslash(\Omega\cap H_n(z))\subset(\Omega^-\cap H_n(z))\backslash(\Omega\cap H_n(z))\subset\partial\Omega$$

で, $\partial\Omega$ 上で $\varphi(x)$ は発散するから,

$${}^\exists x_0\in\Omega\cap H_n(z)\ \ s.t.\ \ \min_{(\Omega\cap H_n(z))^-}\varphi(x)=\min_{\Omega\cap H_n(z)}\varphi(x)=\varphi(x_0)$$

が取れる．極小値をとる点であるから

$$\nabla\varphi|_{\Omega\cap H_n(z)}(x_0)=0$$

特に $\nabla\varphi(x_0) \perp H_n(z)$ である. これから $\nabla \log\varphi(x_0) \perp H_n(z)$ で

$$x_0^* = -\nabla \log\varphi(x_0) = \lambda z \in \mathbb{R}z$$

とあらわせる. (1) と $x_0 \in H_n(z)$ から

$$n = (x_0, x_0^*) = (x_0, \lambda z) = \lambda n$$

で $\lambda = 1$. ゆえに $z = x^*$.
(4) 単射: 明らかに

$$x^* = y^* \implies y \in H_n(x^*) \text{ かつ } \nabla \log\varphi(y) \perp H_n(x^*)$$

Lemma １２より $\log\varphi(x)$ は狭義凸関数だから, このような y は $H_n(x^*)$ 上でただひとつである $\square$

5. Jordan 代数

V: 有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間

Def.

V に双線型写像 (積) $V \times V \longrightarrow V\colon (x,y) \mapsto xy$ が与えられていて, 次の２条件を満たすときに V を Jordan 代数という.

(J1) $xy = yx$, $({}^\forall x, y \in V)$

(J2) $x(x^2 y) = x^2(xy)$, $({}^\forall x, y \in V)$

(J3) ${}^\exists e \in V$ s.t. $ex = xe = x$, $({}^\forall x \in V)$

Jordan 代数は結合律を満たすとは限らない (i.e. $x(yz) \neq (xy)z$).

例

(1) $V = M_m(\mathbb{R})$ は行列の積を持つ. 新しい積を

$$x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$$

で定義すると, $M_m(\mathbb{R})$ は Jordan 代数になる.

(2) $\Sigma_m(\mathbb{R}) = \{x \in M_m(\mathbb{R})\colon {}^t x = x\}$ は (1) の積でやはり Jordan 代数になる.

(3) W は $\mathbb{R}$-ベクトル空間として, $V = \mathbb{R} \oplus W$ とおく. $B\colon W \times W \to \mathbb{R}$ を対称双線型形式とするとき, V の積を

$$(\lambda, a)(\mu, b) := (\lambda\mu + B(a,b), \lambda b + \mu a)$$

で定義する. これで V は Jordan 代数になる. $V = \mathcal{H}(W, B)$ とあらわす.

以下 V は Jordan 代数. $x \in V$ に対して, $L(x) \in \mathrm{End}(V)$ を

$$L(x)y := xy\,, \qquad (y \in V)$$

で定義する. このとき

$$\text{(J2)} \iff \text{(J2')}\ [L(x) : L(x^2)] := L(x)L(x^2) - L(x^2)L(x) = 0$$

である.

Lemma １３

任意の $x, y, z \in V$ で次が成り立つ

(1) $[L(x), L(y^2)] + 2[L(y), L(xy)] = 0$

(2) $[L(x), L(yz)] + [L(y), L(zx)] + [L(z), L(xy)] = 0$

(3) $L(x^2 y) - L(x^2)L(y) = 2(L(xy) - L(x)L(y))L(x)$

証明. (1) 写像 $y \mapsto [L(y), L(y^2)]$ を x 方向で微分すると

$$0 = D_x[L(y), L(y^2)] = \frac{d}{dt}[L(y+tx), L((y+tx)^2)]|_{t=0} = [L(x), L(y)^2] + 2[L(y), L(xy)] = 0$$

(2) 同様に D_z を (1) に適用すればよい.

(3) (1) より

$$[L(x), L(y^2)]z = L(x)(y^2z) - L(y^2)(xz) = 2L(xy)(yz) - 2L(y)((xy)z)$$

可換性から

$$L(y^2z)x - L(y^2)L(z)x = 2L(yz)L(y)x - 2L(y)L(z)L(y)x$$

これがすべての x で成り立つから

$$L(y^2z) - L(y^2)L(z) = 2(L(yz) - L(y)L(z))L(y)$$

を得る. □

V の中で $x \in V$ の冪を帰納的に

$$x^n := x \cdot x^{n-1} = x^{n-1} \cdot x$$

で定義する.

定理５

任意の $x \in V$ について

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}\,, \qquad (0 \leq p, q \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ. したがって V の中で x で生成される部分代数 $\mathbb{R}[x]$ は結合律を満たす.

(この性質を持つ代数を power associative algebra という)

証明. まず $x^p \cdot x^2 = x^{p+2}$ を示す. p の帰納法. $p = 1$ のときは冪の定義である. $p-1$ で $x^{p-1} \cdot x^2 = x^2 \cdot x^{p-1} = x^{p+1}$ が成り立つと仮定する. このとき (J2) から

$$x^{p+2} = x \cdot x^{p+1} = x(x^2 \cdot x^{p-1}) = x^2(x \cdot x^{p-1}) = x^2 \cdot x^p$$

次に $[L(x^p), L(x^q)] = 0$ を示す. Lemma １３ (3) で $y = x^{n-1}$ とおけば, 上で示したことから

$$L(x^{n+1}) = L(x^2)L(x^{n-1}) + 2L(x^n)L(x) - 2L(x)L(x^{n-1})L(x)$$

したがって帰納的に

$$L(x^{n+1}) \in \mathbb{R}[L(x), L(x^2)] = L(x) \text{ と } L(x^2) \text{ で生成された subalgebra}$$

であるが, $(J2')$ から $L(x)$ と $L(x^2)$ は可換. ゆえに $\mathbb{R}[L(x), L(x^2)]$ は可換環であるから, $L(x^p)L(x^q) = L(x^q)L(x^p)$ が成り立つ.

$x^p \cdot x^q = x^{p+q}$ を q の帰納法で示す. $q = 1$ の時は自明. $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$ が成り立つとして

$$x^{p+q+1} = x \cdot x^{p+q} = x(x^p \cdot x^q) = L(x)L(x^p)x^q = L(x^p)L(x)x^q = x^p \cdot x^{q+1}$$

で $q+1$ でも成り立つ. □

6. 最小多項式

定理５から, $x \in V$ に対し

$$\mathbb{R}[x] = \{f(x) \colon f(t) \in \mathbb{R}[t]\}$$

は可換かつ結合的である. したがって

$$\varphi \colon \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}[x] \colon f(t) \mapsto f(x)$$

は algebra の準同型である. V は有限次元だから φ は単射ではない. したがって

$$^{\exists_1} m_x(t) \in \mathbb{R}[t] \text{ monic } \ s.t. \ \operatorname{Ker}\varphi = m_x(t)\mathbb{R}[t]$$

この $m_x(t)$ を x の最小多項式という.

$$\deg m_x(t) = \min\{k > 0 \colon e, x, x^2, \cdots, x^k \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上一次従属 } \} \leq \dim V$$

である.

Def.

(1) $r = \operatorname{rank}(V) := \max\{\deg m_x(t) \colon x \in V\}$ を V のランクという.

(2) $\deg m_x(t) = \operatorname{rank}(V)$ となる $x \in V$ を正則 (regular) という.

定理６

(1) V の中の正則元全体の集合 V_r は開かつ稠密である.

(2) V 上の多項式関数 $a_1(x), \cdots, a_r(x)$, $(r = \operatorname{rank}(V))$ で

$$m_x(t) = t^r - a_1(x)t^{r-1} + a_2(x)t^{r-2} + \cdots + (-1)^r a_r(x)\,, \qquad (^\forall x \in V_r)$$

となるものが一意的に存在する. $a_j(x)$ は次数 j の同次多項式関数である.

証明. (1) 明らかに $V_r \neq \emptyset$. $y \in V_r$ を固定すると, $e, y, \cdots, y^{r-1}$ は一次独立であるから,

$$^{\exists}\mathbf{e}_{r+1}, \cdots, \mathbf{e}_n \in V \ \ s.t. \ \ e, y, \cdots, y^{r-1}, \mathbf{e}_{r+1}, \cdots, \mathbf{e}_n \text{ は } V \text{ の基底}$$

が取れる. この基底により V を $\mathbb{R}^n$ と同一視して, $x \in V$ に対し

$$D(x) := \det(e, x, x^2, \cdots, x^r, \mathbf{e}_{r+1}, \cdots, \mathbf{e}_n)$$

を考える. $D(x)$ は多項式で, $D(y) = 1$. 明らかに

$$\{x \in V \colon D(x) \neq 0\} \subset V_r$$

左の集合は開かつ稠密である.

(2) $x \in V_r$ に対して

$$m_x(t) = t^r - a_1(x)t^{r-1} + a_2(x)t^{r-2} + \cdots + (-1)^r a_r(x)$$

とあらわすことにより, V 上の関数 $a_j(x)$ が定まる. 特に $m_x(x) = 0$ より

$$a_1(x)x^{r-1} + \cdots + (-1)^{r-1}a_r(x)e = x^r$$

(1) の証明と同じように基底を固定して, $V = \mathbb{R}^n$ と見れば, クラメールの公式より

$$a_j(x) = (-1)^{j-1}\frac{b_{r-j}(x)}{D(x)}\,, \qquad b_j(x) := \det(e, x, \cdots, x^{j-1}, x^r, x^{j+1}, \cdots, x^{r-1}, \mathbf{e}_{r+1}, \cdots, \mathbf{e}_n)$$

とあらわせる. よって $a_j(x)$ は有理関数である.
$\Delta_x(t)$ を $L(x)$ の特性多項式とする.

$$\Delta_x(t) = \det(tI - L(x))$$

Cayley–Hamilton の公式から $\Delta_x(L(x)) = 0$. したがって $\Delta_x(x) = \Delta_x(L(x))e = 0$ となり $m_x(t)|\Delta_x(t)$ である. $\Delta_x(t)$ の係数は x の関数として多項式である. よって Gauss の補題 (原始的多項式の積は原始的) から $a_j(x)$ も多項式になる. $a_j(x)$ は最小多項式から一意に定まる.
$\lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(t) = m_{\lambda x}(\lambda t)$$

とおく. $f(x) = 0$ より $m_x(t)|f(t)$. $\deg m_x(t) = \deg f(t) = r$ で, $f(t)$ の最高次の係数は λ^r だから

$$m_{\lambda x}(\lambda t) = \lambda^r m_x(t)\,, \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. よって $a_j(\lambda t) = \lambda a_j(t)$ である. □

Def.
$x \in V$ に対し, $\mathrm{Tr}_J(x) := a_1(x)$ をトレース, $\det_J(x) := a_r(x)$ を determinant という.

定理 7
$u \in V$ とする. このとき

$$\det_J(xy) = \det_J(x)\det_J(y)\,, \qquad ({}^\forall x, y \in \mathbb{R}[u])$$

証明. (1) 最初に u は正則とする. $x \in \mathbb{R}[u]$ に対し

$$L_1(x) = L(x)|_{\mathbb{R}[u]}$$

とおく. x が正則ならば $\dim \mathbb{R}[x] = \dim \mathbb{R}[u]$ から $\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[u]$. さらに $\mathbb{R}[u]$ の基底として $e, x, \cdots, x^{r-1}$ をとって, これについて $L_1(x)$ を行列表示すれば

$$L_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{r-1}a_r(x) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{r-2}a_{r-1}(x) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & (-1)^{r-3}a_{r-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1(x) \end{pmatrix}$$

したがって

$$\mathrm{Tr}_J(x) = \mathrm{Tr}L_1(x)\,, \qquad \det{}_J(x) = \det L_1(x)$$

である． $\mathbb{R}[u]$ の中の正則元全体は開かつ稠密だから，これはすべての $x \in \mathbb{R}[u]$ で成り立つ． $\mathbb{R}[u]$ は associative だから

$$L_1(xy) = L_1(x)L_1(y)\,, \qquad ({}^\forall x, y \in \mathbb{R}[u])$$

よって

$$\det{}_J(xy) = \det L_1(xy) = \det L_1(x)\det L_1(y) = \det{}_J(x)\det{}_J(y)$$

$x = f(u), y = g(u)$, $(f(t), g(t) \in \mathbb{R}[t])$ とあらわせば

$$\det{}_J(f(u)g(u)) = \det{}_J f(u)\det{}_J g(u)\,, \qquad ({}^\forall u \in V_r)$$

V_r は V で稠密だから，これはすべての $u \in V$ で成立． □

系

$\mathrm{Tr}_J(e) = r$, $\det_J(e) = 1$

証明. $\mathrm{Tr}_J(e) = \mathrm{Tr}L_1(e) = r$, $\det_J(e) = \det L_1(e) = 1$． □

Def.

$x \in V$ に対し，

$${}^\exists y \in \mathbb{R}[x] \;\; s.t. \;\; xy = yx = e$$

となるとき x は可逆であるという．$\mathbb{R}[x]$ は associative であるから，このような y は存在すれば一意である．$y = x^{-1}$ を x の逆元という．

Lemma １４

$L(x)$ が可逆ならば x は可逆で $x^{-1} = L(x)^{-1}e$ である．

証明. $L(x)$ が可逆ならば，$L_0(x) := L(x)|_{\mathbb{R}[x]}$ は全単射である．したがって $y = L(x)^{-1}e \in \mathbb{R}[x]$ で，$xy = e$ である． □

Remark

$V = \Sigma_2(\mathbb{R})$ とする．

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

ととれば，

(1) $x \circ x = e$ で $x^{-1} = x$.

(2) $x \circ y = e$ かつ $y \notin \mathbb{R}[x]$ で $y \neq x^{-1}$.

(3) $L(x)z = 0$ より $L(x)$ は可逆ではない.

とくに Lemma １４の逆は不成立.

Lemma 1 5
多項式写像 $Q\colon V \to V$ を

$$Q(x) := (-1)^{r-1}(x^{r-1} - a_1(x)x^{r-2} + \cdots + (-1)^{r-1}a_{r-1}(x)e)$$

で定義する.

$$x \text{ が可逆} \iff \det{}_J(x) \neq 0$$

でこのとき

$$x^{-1} = \frac{1}{\det{}_J(x)} Q(x)$$

である.

証明. ($\Longleftarrow$): 明らかに $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ で, $xQ(x) = (\det{}_J(x))e$.
($\Longrightarrow$). x が可逆なら, $x^{-1} \in \mathbb{R}[x]$ より, ある多項式 $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ で $x^{-1} = f(x)$ と書ける. $xf(x) = e$ の determinant をとれば

$$\det{}_J x \cdot \det{}_J f(x) = 1$$

で $\det{}_J x \neq 0$. $\square$

系
$V^\times := \{x \in V\colon \text{ 可逆 } \}$ は V の中で開かつ稠密である

例
(1) $V = M_m(\mathbb{R})$ のとき, x の最小多項式は行列としての最小多項式である. これから $\operatorname{rank} M_m(\mathbb{R}) = m$ で

$$\mathrm{Tr}_J(x) = \mathrm{Tr}(x)\,, \qquad \det{}_J(x) = \det(x)$$

である. また逆元も通常の行列の逆元と一致する.
(2) $V = \mathcal{H}(W, B)$ のとき.

7. Jordan 代数の２次表現

V は前と同じ.

Def.

写像 $P\colon V \longrightarrow \mathrm{End}(V)\colon P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2)$ を V の２次表現という. また

$$P(x,y) := \frac{1}{2}(P(x+y) - P(x) - P(y)) = L(x)L(y) + L(y)L(x) - L(xy)$$

とおく.

定理８

$$x \text{ が可逆} \iff P(x) \text{ が可逆}$$

で, このとき

$$x^{-1} = P(x)^{-1}x\,, \qquad P(x)^{-1} = P(x^{-1})$$

が成り立つ.

証明. ($\Longleftarrow$): $P(x)$ の $\mathbb{R}[x]$ への制限は全単射であるから, $y := P(x)^{-1}x \in \mathbb{R}[x]$. 定義と定理５から

$$P(x)e = x^2\,, \qquad P(x)L(x) = L(x)P(x)$$

したがって

$$yx = (P(x)^{-1}x)x = x(P(x)^{-1}x) = L(x)P(x)^{-1}x = P(x)^{-1}L(x)x = P(x)^{-1}x^2 = e$$

($\Longrightarrow$): 明らかに

$$P(x)x^{-1} = x$$

また $x^{-1} \in \mathbb{R}[x]$ より $L(x)L(x^{-1}) = L(x^{-1})L(x)$ に注意して, Lemma １３ (3) で $y = x^{-1}$ とおけば

$$L(x) - L(x^2)L(x^{-1}) = 2(I - L(x)L(x^{-1}))L(x)$$

すなわち

$$L(x) = (2L(x)^2 - L(x^2))L(x^{-1}) = P(x)L(x^{-1})$$

x と x^{-1} の役割を変えれば

$$L(x^{-1}) = P(x^{-1})L(x)$$

両辺に $P(x)$ をかければ

$$P(x)P(x^{-1})L(x) = P(x)L(x^{-1}) = L(x)$$

$L(x)$ が可逆ならば $P(x)P(x^{-1}) = I$ である. $\{x \in V\colon \det L(x) \neq 0\} \subset V^{\times}$ は稠密だから, 任意の $x \in V^{\times}$ で $P(x)P(x^{-1}) = I$ が成立. $\square$

Lemma １６

(1) $x \in V^\times,\ u \in V \implies D_u(x^{-1}) = -P(x)^{-1}u$

(2) $x, y \in V^\times \implies P(x)y \in V^\times,\ \ (P(x)y)^{-1} = P(x^{-1})y^{-1}$

(3) $x, y \in V \implies P(P(y)x) = P(y)P(x)P(y)$

証明. (1) $x = P(x)x^{-1}$ を微分して

$$u = D_u(x) = D_u(P(x)x^{-1}) = 2P(x,u)x^{-1} + P(x)D_u(x^{-1})$$

ここで $D_u(P(x)) = 2P(x,u)$ と分配法則から積の微分の公式が成り立つことに注意する.

$$P(x,u)x^{-1} = (L(x)L(u) + L(u)L(x) - L(xu))x^{-1} = L(x)L(x^{-1}u + u - L(x^{-1})L(x)u = u$$

から $P(x)D_u(x^{-1}) = -u$.

(2) 定理８の証明から

$$L(x^{-1})P(x) = P(x)L(x^{-1}) = L(x)$$

両辺を y に作用させれば

$$x^{-1}(P(x)y) = L(x)y = xy$$

x の関数として, 微分すると (1) から

$$(-P(x^{-1})u)(P(x)y) + 2x^{-1}P(x,u)y = uy$$

$u = y^{-1}$ とすると

$$(-P(x^{-1})y^{-1})(P(x)y) + x^{-1}(2x) = e$$

よって

$$(P(x)y)(P(x^{-1})y^{-1}) = e\ \ i.e.\ \ L(P(x)y)(P(x^{-1})y^{-1}) = e$$

集合

$$S := \{(x,y) \in V^\times \times V^\times :\ \det(L(P(x)y)) \neq 0\}$$

を考える. S 上では, Lemma １４から

$$(P(x)y)^{-1} = L(P(x)y)^{-1}e = P(x^{-1})y^{-1}$$

が得られる. $(x_0, y_0) \in V^\times \times V^\times$ を任意に取る. S は $V^\times \times V^\times$ で稠密であるから

$$^\exists(x_n, y_n) \in S\ \ s.t.\ \ \lim(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$$

が取れる. $z_n = P(x_n)y_n \in V^\times$ とおく. Lemma １５から $P(x^{-1})y^{-1}$ は $V^\times \times V^\times$ 上極を持たない有理写像であるから,

$$\lim z_n^{-1} = \lim P(x_n^{-1})y_n^{-1} = P(x_0^{-1})y_0^{-1}$$

が存在する．定理７から

$$\det_J(P(x_0^{-1})y_0^{-1}) = \lim \det_J(z_n^{-1}) = \lim \det_J(z_n)^{-1} = \lim \det_J(z_0)^{-1}$$

したがって $\det_J(z_0) \neq 0$ であり，z_0 は可逆である．さらに

$$z_0^{-1} = \frac{Q(z_0)}{\det_J z_0} = \lim \frac{Q(z_n)}{\det_J z_n} = \lim z_n^{-1} = P(x_0^{-1})y_0^{-1}$$

である．

(3) $(x, y) \in V^\times \times V^\times$ ならば (2) から

$$(P(y)x)^{-1} = P(y^{-1})x^{-1}$$

これを x について微分すると (1) から

$$D_u((P(y)x)^{-1}) = -P(P(y)x)^{-1}P(y)u = -P(y^{-1})P(x)^{-1}u$$

となる．よって

$$P(y)P(x)P(y) = P(P(y)x)$$

両辺とも多項式写像だからこれはすべての $(x, y) \in V \times V$ で成り立つ．$\square$

8. 微分と自己同型

V: Jordan 代数, $e \in V$

Def.

(1) $D \in \mathrm{End}(V)$ が

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)\,, \qquad (^\forall x, y \in V)$$

をみたすとき, V の微分 (derivation) という．微分全体の集合 $\mathrm{Der}_J(V)$ は積

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1\,, \qquad (D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_J(V))$$

で Lie 環になる．

(2) $A \in GL(V)$ が

$$A(xy) = A(x)A(y)\,, \qquad (^\forall x, y \in V)$$

をみたすとき, V の自己同型という．自己同型全体の集合 $\mathrm{Aut}_J(V)$ は $GL(V)$ の閉部分群で Lie 群になる．

Lemma １７

$\mathrm{Aut}_J(V)$ の Lie 環は $\mathrm{Der}_J(V)$ である．

証明. $\mathrm{Lie}(GL(V)) = \mathrm{End}(V)$ であるから,

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}_J(V)) = \{D \in \mathrm{End}(V)\colon\ \exp(tD) \in \mathrm{Aut}_J(V)\,, \quad (|t| < \epsilon)\}$$

である．したがって, $D \in \mathrm{End}(V)$ について

$$D \in \mathrm{Der}_J(V) \iff \exp(tD) \in \mathrm{Aut}_J(V)$$

を示せばよい.

($\Longleftarrow$) は自明.

($\Longrightarrow$): $D \in \mathrm{Der}_J(V)$ の時

$$f(t) := (\exp(tD)x)(\exp(tD)y)$$

とする.

$$f'(t) = D(f(t))\,, \qquad f(0) = xy$$

だから, 微分方程式の解の一意性から

$$f(t) = \exp(tD)(xy)$$

である． □

Lemma １８

(1) $x, y, z \in V$ に対し $L(x(yz) - (xy)z) = [[L(x), L(z)], L(y)]$ である.

(2) $a, b \in V$ ならば $D_{a,b} := [L(a), L(b)] \in \mathrm{Der}_J(V)$ である.

($D_{a,b}$ の形の微分を内部微分 (inner derivation) という)

証明. (1) Lemma １３ (3) から

$$L(x^2z) - L(x^2)L(z) = 2(L(xz) - L(x)L(z))L(x)$$

x の関数として D_y で微分すると

$$2L((xy)z) - 2L(xy)L(z) = 2(L(yz) - L(y)L(z))L(x) + 2(L(xz) - L(x)L(z))L(y)$$

よって

$$L((xy)z) = L(xy)L(z) + L(yz)L(x) + L(xz)L(y) - L(y)L(z)L(x) - L(x)L(z)L(y)$$

x と z を入れ変えた式から上の式を引け良い.

(2) (1) から

$$L(D_{a,b}x) = [D_{a,b}, L(x)]$$

これを y に作用させれば良い. □

Lemma １９

任意の $A \in \mathrm{Aut}_J(V)$ について

$$\mathrm{Tr}_J(Ax) = \mathrm{Tr}_J(x)\,, \qquad \det{}_J(Ax) = \det{}_J(x)\,, \qquad ({}^\forall x \in V)$$

である.

証明. A は同型

$$\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[Ax] \colon f(x) \mapsto f(Ax) = A(f(x))$$

を引き起こす. これから $m_{Ax}(t) = m_x(t)$ である. $x \in V_r$ の時, 係数を比較すれば定理６ (2) より $a_j(Ax) = a_j(x)$ が成り立つ. 稠密性からこれは任意の $x \in V$ で成立. □

Def.

双線型形式 $\beta \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ は

$$\beta(xy, z) = \beta(x, yz)\,, \qquad ({}^\forall x, y, z \in V)$$

が成り立つとき結合的 (associative) であるという.

Lemma ２０

(1) $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}L(xy)$ は結合的である.

(2) $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_J(xy)$ は結合的である.

証明. (1) $\tau(x, y) = \mathrm{Tr}L(xy)$ とおけば, Lemma １８ (1) より

$$\tau(x, yz) - \tau(xy, z) = \mathrm{Tr}(L(x(yz) - (xy)z) = \mathrm{Tr}([[L(x), L(z)], L(y)]) = 0$$

(2) $D \in \mathrm{Der}_J(V)$ とすれば, Lemma １７から $\exp(tD) \in \mathrm{Aut}_J(V)$. したがって Lemma １９から

$$\mathrm{Tr}_J(\exp(tD)y) = \mathrm{Tr}_J(y)$$

t で微分すれば

$$\mathrm{Tr}_J(Dy) = 0$$

とくに $D = D_{x,z}$ ととれば

$$\mathrm{Tr}_J(x(zy) - z(xy)) = 0$$

となる. □

Lemma ２１
$w \in V$ について

$$w^2 = e \implies P(w) \in \mathrm{Aut}_J(V), \ \ P(w)^2 = I$$

である.

証明. $w^2 = e$ ならば $w^{-1} = w$ で w は可逆. 定理８より $P(w)$ も可逆である. また $P(w) = P(w^{-1}) = P(w)^{-1}$ から $P(w)^2 = I$. Lemma １６ (3) から

$$P(P(w)x) = P(w)P(x)P(w)$$

両辺を e に作用させれば, $P(w)e = w^2 = e$ に注意して,

$$(P(w)x)^2 = P(w)(x^2)$$

x について D_y で微分すれば

$$(P(w)x)(P(w)y) = P(w)(xy)$$

したがって $P(w) \in \mathrm{Aut}_J(V)$. □

9. 形式的実 Jordan 代数

V: Jordan 代数, $e \in V$

Def.
V 上に結合的な正定値対称双線型形式 $(\,,\,) \colon V \times V \to \mathbb{R}$ が存在するとき, V を形式的実 (formally real) という.

例
(1) $V = \Sigma_m(\mathbb{R})$ について, $(x, y) = \mathrm{Tr}(xy)$ は結合的内積なので, $\Sigma_m(\mathbb{R})$ は形式的実である.
(2) $V = \mathcal{H}(W, B)$ について, B が正定値ならば, $\mathcal{H}(W, B)$ は形式的実である. 実際 $((\lambda, x), (\mu, y)) = \lambda\mu + B(x, , y)$ が結合的内積になる.

Def.
V は FRJ(=Formally Real Jordan Algebra) とする. $c_1, \cdots, c_k \in V$ は

$$\begin{aligned} &c_i^2 = c_i\,, \\ &c_i c_j = 0\,, \qquad (i \neq j) \\ &c_1 + \cdots + c_k = e \end{aligned}$$

をみたすとき, 直交完備系という.

定理 9 (スペクトル分解定理 I)
V は FRJ とする. 各 $x \in V$ に対して,

$$x = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_k c_k$$

となる互いに相異なるスカラー $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ と直交完備系 $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}[x]$ が一意的に存在する. k, λ_j, c_j は x に依存する.
(λ_j を x の固有値と呼ぶ)

証明. $y \in \mathbb{R}[x]$ に対し, $L_0(y) := L(y)|_{\mathbb{R}[x]}$ とおく. $\mathbb{R}[x]$ は結合的だから $L_0 \colon \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{R}[x])$ は単射環準同型である.
V の内積を $\mathbb{R}[x]$ に制限すれば, $\mathbb{R}[x]$ は有限次元内積空間になり, $L_0(x)$ はその対称変換を与える. 対称変換は対角化可能だから, $\mathbb{R}[x]$ は $L_0(x)$ の固有空間の直和に分解する. すなわち

$$\mathbb{R}[x] = V(\lambda_1, L_0(x)) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k, L_0(x))$$

$P_j \colon \mathbb{R}[x] \longrightarrow V(\lambda_j, L_0(x))$ を正射影とすれば

$$L_0(x) = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$$

さらに $p_j(t) := \prod_{i\neq j}(t-\lambda_i) \in \mathbb{R}[t]$ とおけば, $P_j = p_j(L_0(x))$ とあらわせる．そこで $c_j := p_j(x) \in \mathbb{R}[x]$ とおくと

$$L_0(c_j) = L_0(p_j(x)) = p_j(L_0(x)) = P_j$$

を持つ．また

$$L_0(c_ic_j) = L_0(c_i)L_0(c_j) = P_iP_j = \begin{cases} P_i & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$
$$L_0(\sum_j c_j) = \sum_j P_j = I$$
$$L_0(\sum \lambda_j c_j) = \sum_j \lambda_j P_j = L_0(x)$$

L_0 の単射性から

$$c_i^2 = c_i\,, \qquad c_ic_j = 0\,, \quad (i\neq j)$$
$$\sum_j c_j = e\,, \qquad \sum_j \lambda_j c_j = x$$

が従う．

一意性を示す．もう一つの分解 $x = \sum_j \mu_j d_j$ があったとする．$q_j(t) := \prod_{i\neq j}(t-\mu_i) \in \mathbb{R}[t]$ とすれば

$$q_j(x) = \sum_i q_j(\mu_i)d_i = \prod_{i\neq j}(\mu_j - \mu_i)d_j$$

μ_i は互いに異なるから, $d_j \in \mathbb{R}[x]$. L_0 は環準同型だから $L_0(d_j)$ は d_j と同じ関係を満たし, とくに正射影になる．よって μ_j は $L_0(x)$ の固有値. $\mu_j = \lambda_j$ とすれば $L_0(d_j) = L_0(c_j)$ で $d_j = c_j$. $\square$

Def

$x \in V$ は $x^2 = x$ をみたすときべき等元という．べき等元 $x \neq 0$ で

$$^{\exists}y, z \in V\backslash\{0\}\ \ s.t.\ \ x = y+z,\ \ y^2 = y,\ \ z^2 = z$$

という分解があるとき, x は非原始的 (nonprimitive) という．そうでないとき原始的 (primitive) という．

Def.

V は FRJ とする．V の (0 でない) 原始的べき等元からなる直交完備系を Jordan 標構 (Jordan frame) という．

定理１０ (スペクトル分解定理 II)

V は FRJ で, $r = \operatorname{rank} V$ とする．各 $x \in V$ に対し, スカラー $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ と Jordan 標構 $c_1, \cdots, c_r$ が存在して

$$x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j$$

となる. $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ は x から一意に定まる.

証明. 定理９から

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j c_j$$

とあらわせる. このとき

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j) c_j\,, \qquad ({}^\forall f(t) \in \mathbb{R}[t])$$

とくに $f(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)$ とおけば $f(x) = 0$. ゆえに $f(t) = m_x(t)$ である. これから $k \le r$ で $k = r \iff x \in V_r$ である.

$x \in V_r$ の時, c_j は primitive である. そうでなければ c_j を分解して, $r+1$ 個以上の原始的べき等元からなる Jordan 標構が構成でき, その一次結合を取って最小多項式の次数が r より大の V の元ができる, これは $\operatorname{rank} V$ の定義に矛盾する.

$x \notin V_r$ の時, $x^{(n)} \in V_r$ を $\lim x^{(n)} = x$ ととる. 上から

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^{(n)} c_j^{(n)}$$

とあらわせる. これから $\lim \lambda_j^{(n)}$, $\lim c_j^{(n)}$ をとればよい. □

系

$x \in V$ に対し

$$\det_J(x) = \prod_{j=1}^{r} \lambda_j\,, \qquad \mathrm{Tr}_J(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j$$

Lemma ２２

$c \in V$ がべき等元ならば $L(c)$ の固有値は $0, 1/2, 1$ に限る.

証明. Lemma １３ (3) で $x = y = c$ とすれば

$$L(c^3) = 3L(c^2)L(c) - 2L(c)^3$$

で $c^2 = c$ から

$$2L(c)^3 - 3L(c)^2 + L(c) = 0$$

よって $L(c)$ の固有値は $2t^3 - 3t^2 + t = 0$ の根である. □

定理１１

V は Jordan 代数で $e \in V$ とする. このとき次の３条件は同値である

(FR1) V は形式的実.

(FR2) 対称双線型形式 $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_J(xy)$ は正定値.

(FR3) 対称双線型形式 $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr} L(xy)$ は正定値.

証明. (FR1) $\Longrightarrow$ (FR2): $0 \neq x \in V$ のスペクトル分解を $x = \sum \lambda_j c_j$ とすれば $x^2 = \sum \lambda_j^2 c_j$ から

$$\mathrm{Tr}_J(xy) = \sum \lambda_j^2 > 0$$

で正定値.

(FR1) $\Longrightarrow$ (FR3): 上の Lemma から

$$\mathrm{Tr} L(x^2) = \sum \lambda_j^2 \mathrm{Tr} L(c_j) > 0$$

(FR2) $\Longrightarrow$ (FR1): Lemma ２０より $(x, y) = \mathrm{Tr}_J(xy)$ は結合的な内積を与える.

(FR3) $\Longleftrightarrow$ (FR1) も同様. $\square$

10. 形式的実 Jordan 代数の中の対称錐体

$(V, (\,,\,))$: FRJ
内積の結合性から

$$(L(a)x, y) = (ax, y) = (x, ay) = (x, L(a)y)\,, \qquad ({}^\forall x, y, a \in V)$$

したがって $L(a)$ はこの内積に関して対称である. 任意の対称変換 A について

$$A \text{ が半正定値 } (A \geq 0) \iff (Ax, x) \geq 0\,, \qquad ({}^\forall x \in V)$$
$$A \text{ が正定値 } (A > 0) \iff (Ax, x) > 0\,, \qquad (0 \neq {}^\forall x \in V)$$

である.

$$Q := \{x^2 \colon x \in V\}$$

とおく. Q は錐体である. その閉双対錐体は

$$Q^\sharp := \{y \in V \colon (y, x^2) \geq 0\,, \quad ({}^\forall x \in V)\}$$

である.

$$(y, x^2) = (yx, x) = (L(y)x, x)$$

から

$$Q^\sharp = \{y \in V \colon L(y) \geq 0\}$$

ともあらわせる.

Lemma 2 3
$Q^\sharp = Q$ である. とくに Q は閉凸錐体である.
証明. $Q \subset Q^\sharp$: $x \in V$ のスペクトル分解を

$$x = \sum_j \lambda_j c_j$$

とすれば

$$x^2 = \sum_j \lambda_j^2 c_j\,, \qquad L(x^2) = \sum_j \lambda_j^2 L(c_j)$$

となる. Lemma 2 2 から $L(c_j) \geq 0$ より $L(x^2) \geq 0$. ゆえに $x^2 \in Q^\sharp$.
$Q^\sharp \subset Q$: $x \in Q^\sharp$ とすれば

$$(c_i, c_j) = (c_i^2, c_j) = (c_i, c_i c_j) = (c_i, 0) = 0$$

に注意して

$$0 \leq (L(x)c_j, c_j) = (xc_j, c_j) = (x, c_j^2) = (x, c_j) = \lambda_j ||c_j||^2$$

より $\lambda_j \geq 0$. そこで

$$z = \sum_j \sqrt{\lambda_j} c_j \in V$$

をとれば $x = z^2 \in Q$. $\square$

定理１２

$\Omega_V = \Omega := Q^o$ とすると, Ω は対称錐体で

$$\begin{aligned}\Omega &= \{y \in V : L(y) > 0\} = \{z^2 : z \in V^\times\} \\ &= V^\times \text{ の中の } e \text{ を含む連結成分}\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. (1) Ω が自己双対開凸錐体であることは Lemma ２３と定理３, Ω^* の定義から明らか.

(2) $R := \{y \in V : L(y) > 0\}$ とする. 条件 $L(y) > 0$ は y の多項式関数の不等式系で表せるから R は開である. ゆえに $R \subset \Omega$. $0 \neq x \in V$ を固定して, $\ell_x : V \to \mathbb{R}$ を $\ell_x(y) = (y, x^2)$ で与える. $\ell_x(x^2) > 0$ より $\ell_x \not\equiv 0$. 定義から

$$Q = Q^\sharp = \bigcap_{0 \neq x \in V} \{y \in V : \ell_x(y) \geq 0\}$$

したがって

$$\Omega = Q^o \subset \{y : \ell_x(y) > 0\}, \qquad (0 \neq {}^\forall x \in V)$$

よって $y \in \Omega$ ならば

$$0 < \ell_x(y) = (y, x^2) = (yx, x) = (L(y)x, x), \qquad (0 \neq {}^\forall x \in V)$$

となり $L(y) > 0$. ゆえに $\Omega \subset R$.

(3) $V^\times = \{y \in V : \det_J(y) \neq 0\}$ で上の (2) と Lemma １４から, $\Omega \subset V^\times$ である. $y \in \Omega^- \cap V^\times$ とする. y のスペクトル分解 II を

$$y = \sum_j \lambda_j c_j$$

とすれば, $y \in \Omega^- = Q$ から $\lambda_j \geq 0$. また $y \in V^\times$ から $0 \neq \det_J(y) = \prod \lambda_j$ より $\lambda_j > 0$. したがって

$$L(y) = \sum_l \lambda_j L(c_j) > 0$$

で, $y \in \Omega$ となる. これから $\Omega = \Omega^- \cap V^\times$ で, Ω は $V^\times$ の中で開かつ閉だから連結成分になる. また

$$y = \left(\sum_j \sqrt{\lambda_j} c_j \right)^2 \in \{z^2 : z \in V^\times\}$$

だから, $\Omega = \{z^2 : z \in V^\times\}$ である.

(4) 等質性を示す．$x \in V^\times$ とする．定理８より $P(x)$ は可逆で, Lemma １６より $P(x)V^\times \subset V^\times$ である．よって $P(x)\Omega$ は $V^\times$ の連結成分になる．$x^2 = P(x)e \in \Omega$ だから $P(x)\Omega = \Omega$ となり, $P(x) \in G(\Omega)$．ゆえに

$$\Omega = \{x^2 \colon x \in V^\times\} = \{P(x)e \colon x \in V^\times\} \subset G(\Omega)e \subset \Omega$$

で $G(\Omega)e = \Omega$．□

Lemma ２４

$x \in V$ に対して

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

は任意のコンパクト集合上一様収束する．

証明．$||x|| := \sqrt{(x,x)}$ でノルムを定める．$x, y \in V \backslash \{0\}$ に対して

$$f(x,y) := \frac{||xy||}{||x||||y||}$$

はスカラー倍で不変だから

$$\max_{x,y \in V \backslash \{0\}} f(x,y) = \max_{||x||=||y|=1} f(x,y) = M$$

が存在する．これから

$$||xy|| \leq M||x||||y||$$

で

$$||x^k|| \leq M^{k-1}||x||^k$$

したがって, $||x|| \leq C$ ならば

$$\frac{||x||^k}{k!} \leq \frac{1}{M}\frac{(MC)^k}{k!}$$

で, $\exp x$ はコーシー列になるので収束する．□

系

$\Omega = \exp(V)$ である．

証明．$x \in V$ として

$$x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j\,, \qquad (r = \operatorname{rank} V)$$

をスペクトル分解とする．

$$\exp x = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j} c_j$$

で,

$$y = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j/2} c_j$$

とおけば, $y \in V^\times$ かつ $\exp x = y^2 \in \Omega$. 逆も容易. □

Lemma ２５
任意の $t \in \mathbb{R}$, $x \in V$ について

$$\exp(tL(x)) = P(\exp(\frac{t}{2}x))$$

証明. ２次表現の定義から

$$P(\exp(\frac{t}{2}x)))\exp(sx) = \exp(t+s)x$$

Lemma １６ (3) より

$$P(\exp(t+s)x) = P(P(\exp(\frac{t}{2}x))\exp(sx)) = P(\exp(\frac{t}{2}x))P(\exp(sx))P(\exp(\frac{t}{2}x))$$

そこで $F(t) = P(\exp(tx/2))$ とおけば

$$F(t+s) = F(\frac{t}{2})F(s)F(\frac{t}{2}) = F(\frac{t}{2})^2F(s)$$

とあらわせる. $s = 0$ とすれば $F(t) = F(t/2)^2$ で

$$F(t+s) = F(t)F(s)$$

$F(0) = I$,

$$\begin{aligned}
F'(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{P(\exp(tx/2)) - P(e)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{2L(\exp(tx/2))^2 - L(\exp(tx)) - P(e)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{2L(\exp(tx/2))^2 - 2L(\exp(tx/2)) + 2L(\exp(tx/2)) - 2P(e) + P(e) - L(\exp(tx))}{t} \\
&= L(x) + L(x) - L(x) = L(x)
\end{aligned}$$

から $F(t) = \exp(tL(x))$. □

系
G を $G(\Omega_V)$ の単位元を含む連結成分とすると, 任意の $x \in V$ について $L(x) \in \mathrm{Lie}(G)_+$ である. 写像 $V \longrightarrow \mathrm{Lie}(G)_+$ は線型空間の同型を与える.

証明. $\exp x \in V^\times$ は容易. よって定理１２の証明から $P(\exp x) \in G(\Omega)$. 上から $L(x) \in \mathrm{Lie}(G(\Omega)) = \mathrm{Lie}(G)$. $L(x)$ は対称だから $L(x) \in \mathrm{Lie}(G)_+$.
$L(x)e = x$ より L は明らかに単射. $\dim \mathrm{Lie}(G)_+ = \dim \Omega = \dim V$ から同型になる. □

11. 対称錐体に付随する Jordan 代数

$(V, (\,,\,))$: 内積空間, $\Omega \subset V$: 対称錐体
$K = G \cap O(V) \subset G \subset G(\Omega)$, $K = G_e$ となる $e \in \Omega$ を固定する.

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G)_- \oplus \mathrm{Lie}(G)_+\,, \qquad \mathrm{Lie}(K) = \mathrm{Lie}(G)_-$$

である.

Lemma 2 6
写像 $\psi\colon \mathrm{Lie}(G)_+ \longrightarrow V\colon X \mapsto Xe$ は (線型空間の) 同型である.

証明. Lemma 8 系から, $X \in \mathrm{Lie}(G)$ について

$$Xe = 0 \iff X \in \mathrm{Lie}(K)$$

したがって ψ は単射である.

$$\dim V = \dim \Omega = \dim G/K = \dim \mathrm{Lie}(G)_+$$

より ψ は全射になる. □

$x \in V$ に対して

$$L(x) := \psi^{-1}(x) \in \mathrm{Lie}(G)_+$$

とおく. すなわち $L(x)e = x$.

定理1 3
V 上に積を

$$xy := L(x)y\,, \qquad (x, y \in V)$$

で定めれば, V は e を単位元に持つ FRJ になる. さらに $\Omega = \Omega_V$ である.

証明. (1) 積が双線型であることは明らか.
(2) (J1):

$$xy - yx = L(x)y - L(y)x = L(x)(L(y)e) - L(y)(L(x)e) = [L(x), L(y)]e$$

であるが, $[\mathrm{Lie}(G)_+, \mathrm{Lie}(G)_+] \subset \mathrm{Lie}(K)$ から $[L(x), L(y)]e = 0$. よって $xy = yx$.
(3) 内積の結合性: $L(x) \in \mathrm{Lie}(G)_+$ だから ${}^tL(x) = L(x)$. したがって

$$(xz, y) = (L(z)x, y) = (x, {}^tL(z)y) = (x, zy)$$

で V の内積は結合的である.
(4) (J2): $x, y, z \in V$ に対し,

$$[x, z, y] := x(zy) - (xz)y = [L(x), L(y)]z$$

を associator という．このとき

$$\text{(J2)} \iff [x^2, y, x] = 0\,, \qquad ({}^\forall x, y \in V)$$

である．いま $[L(x), L(y)] \in \mathrm{Lie}(K)$ から

$$[[L(x), L(y)], L(z)]e = [L(x), L(y)]z = [x, z, y] = L([x, z, y])e$$

で, ψ の単射性から

$$[[L(x), L(y)], L(z)] = L([x, z, y])$$

これを z に作用させると

$$\text{(*)} \qquad [x, z^2, y] = 2[x, z, y]z$$

を得る．内積の結合性から

$$\text{(**)} \qquad ([x^2, y, x], z) = (x^2(xy), z) - (x(x^2y), z) = (x^2, (xy)z - y(xz)) = (x^2, [z, x, y])$$

他方

$$([x^2, y, x], z) = (x, y(x^2z) - (x^2y)z) = (x, [y, x^2, z])$$

で (*) より

$$\text{右辺} = (x, 2[y, x, z]x) = 2(x^2, [y, x, z])$$

よって (**) と比較して

$$([x^2, y, x], z) = 0\,, \qquad ({}^\forall z \in V)$$

から $[x^2, y, x] = 0$ を得る．
以上により V は FRJ になる．
$\Omega_V = \{x \in V\colon L(x) > 0\}$ である．

$$\Omega = Ge = \{\exp(X)e\colon X \in \mathrm{Lie}(G)_+\}$$

で ${}^tX = X$ より $\exp(X) > 0$. したがって $\Omega \subset \Omega_V$. 自己双対性から $\Omega_V \subset \Omega$. $\square$

Remark.
一般に e の取り方は一意ではないから, V の Jordan 代数の構造も Ω からは一意には定まらない.

12. 単純 Jordan 代数と既約対称錐体

Def.
Jordan 代数 V は非自明なイデアルを含まないとき単純であるという.

定理１４
V は FRJ とする. このとき V は一意的に単純 FRJ の直和で表せる. 各直和因子は V の極小イデアルである.

証明. $I \subset V$ を極小イデアル (次元が最小の物を取ればよい) とする.

$$I^{\perp} := \{x \in V \colon (x,y) = 0\,, \quad ({}^{\forall} y \in I)\}$$

はイデアルである. 明らかに

$$V = I \oplus I^{\perp}\,, \qquad I \cdot I^{\perp} \subset I \cap I^{\perp} = \{0\}$$

と直和分解する. 以下 $I^{\perp}$ に同じことを繰り返せばよい.

$$V = I_1 \oplus \cdots \oplus I_k = J_1 \oplus \cdots \oplus J_{\ell}$$

と２通りに分解したとする. $I_i \cap J_1$ はイデアルだから, I_i の極小性と J_1 の単純性から $\{0\}$ または $J_1 = I_i$ である. □

Def.
E はユークリッド空間で $\Omega \subset E$ は対称錐体とする. Ω が可約とは

$$E = {}^{\exists}E_1 \oplus {}^{\exists}E_2\,, \;\; \emptyset \neq {}^{\exists}\Omega_i \subset E_i \;\; \text{対称錐体} \;\; s.t. \;\; \Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$$

となるときをいう. 可約でない時既約という.

定理１５
任意の対称錐体は既約な対称錐体の直和に分解される.

証明. V が単純 FRJ ならば Ω_V は既約である. これと定理１３, １４から明らか. □

定理１６
V は単純 FRJ とする. $G \subset G(\Omega_V)$, $K = G \cap O(V)$ とする.

(1) V 上任意の結合的対称双線型形式は $\mathrm{Tr}_J(xy)$ のスカラー倍である.

(2) $\{x \in V \colon Kx = x\} = \mathbb{R}e$ である.

証明. (1) $(x,y) = \mathrm{Tr}_J(xy)$ とおく. B を任意の結合的対称双線型形式とする. ある対称行列 $A \in \mathrm{End}(V)$ で

$$B(x,y) = (Ax, y)$$

とあらわせる. λ を A の固有値として

$$B'(x,y) := (Ax - \lambda x, y)$$

とおけば, B' も結合的である.

$$J := \{x \in V : B'(x,y) = 0\,, \quad ({}^\forall y \in V)\}$$

とおく. λ の固有ベクトルは J に含まれるから $J \neq \{0\}$. $J \subset V$ はイデアルだから, 単純性より $J = V$. ゆえに $A = \lambda I$.

(2) $a \in V$ が $Ka = a$ を満たせば,

$$B(x,y) := (a, xy)$$

は結合的になる. 実際 Lemma ２５から $L(x), L(y) \in \mathrm{Lie}(G)_+$ だから, $[L(x), L(y)] \in \mathrm{Lie}(G)_- = \mathrm{Lie}(K)$ に注意して

$$B(xy,z) - B(x,yz) = (a, (xy)z - x(yz)) = ([L(x), L(z)]a, y) = 0$$

(1) より $B(x,y) = \lambda(x,y) = (\lambda e, xy)$ となる. これから $a = \lambda e$. □

定理１７

V が単純 FRJ ならば

$$\mathrm{Tr}L(x) = \frac{n}{r}\mathrm{Tr}_J(x)\,, \qquad \det P(x) = (\det{}_J x)^{2n/r}\,, \qquad \det{}_J(P(y)x) = (\det{}_J y)^2 \det{}_J x$$

である.

証明. Lemma ２０と定理１６から $\mathrm{Tr}L(xy) = \lambda \mathrm{Tr}_J(xy)$ と表せる. $x = y = e$ とすれば定理７系から $r = n/r$ である.

次に Lemma ２５から

$$P(\exp x) = \exp 2L(x)$$

であったから

$$\det P(\exp x) = \exp(2\mathrm{Tr}L(x)) = \exp(\frac{2n}{r}\mathrm{Tr}_J(x))$$

スペクトル分解定理から $\det{}_J(\exp x) = \exp(\mathrm{Tr}_J(x))$ だから２つ目の等式を得る.

最後に

$$\det(P(P(y)x)) = \det(P(y)P(x)P(y)) = (\det P(y))^2 \det P(x)$$

に前の等式を適用すれば

$$\det{}_J(P(y)x) = (\det{}_J y)^2 \det{}_J(x)$$

を得る. □

定理１８

V が単純 FRJ で結合的内積が $\mathrm{Tr}_J(xy)$ であるならば

$$\mathrm{Aut}_J(V) = G(\Omega_V) \cap O(V)$$

である.

定理１９

単純 FRJ と対応する既約対称錐体は以下のものに限る.

V	Ω_V	G	K	$\dim V$	$\mathrm{rank}\, V$
$\Sigma_m(\mathbb{R})$	$\Pi_m(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^\times \cdot SL_m(\mathbb{R})$	$SO(m)$	$m(m+1)/2$	m
$\Sigma_m(\mathbb{C})$	$\Pi_m(\mathbb{C})$	$\mathbb{R}_+^\times \cdot SL_m(\mathbb{C})$	$SU(m)$	m^2	m
$\Sigma_m(\mathbb{H})$	$\Pi_m(\mathbb{H})$	$\mathbb{R}_+^\times \cdot SL_m(\mathbb{H})$	$SU(m, \mathbb{H})$	$m(2m-1)$	m
$\mathcal{H}(\mathbb{R}^{n-1}, I)$	Λ_n	$\mathbb{R}_+^\times \cdot SO_0(1, n-1)$	$SO(n-1)$	n	2
$\Sigma_3(\mathbb{O})$	$\Pi_3(\mathbb{O})$	$\mathbb{R}_+^\times \cdot E_6$	F_4	27	3

ここで

$\mathbb{H}$: Hamilton 四元数体

$\mathbb{O}$: Cayley 八元数体

$\Sigma_m(F) := \{x \in M_m(F) \colon {}^t\overline{x} = x\}$

$\Pi_m(F) := \{x \in \Sigma_m(F) \colon x > 0\}$

とする.