ディオファントス近似と Sturm 語

2021 年度 代数学 6・整数論概論 II 講義ノート

渡部隆夫

前半では, 実数の表現方法の一つである連分数展開を使いディオファントス近似の初等的な結果である Lagrange の定理と Hurwitz の定理を証明する. また, Lagrange スペクトラムと難近似数, Markov 数との関係を解説する. 後半では, ワードの基礎概念の解説から始めて, Sturm 語の定義と構成を与え, ワードから定義される b-進展開数の無理数性指数とワードの反復指数の関係を示した Bugeaud - Kim の定理を紹介する.

目次

文献

[1] M. Aigner, Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture, Springer 2013.

[2] J.-P. Allouche and J. Shallit, Automatic Sequences, Cambridge University Press, 2003.

[3] P. Arnoux, *Sturmian Sequences*, in Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics, edited by N. P. Fogg, V. Berth, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel. Lecture Notes in Math. **1794**, (2002), 143-198.

[4] V. I. Bernik and M. M. Dodson, Metric Diophantine Approximation on Manifolds, Cambridge University Press, 1999.

[5] J. Borwein, A. Poorten, J. Shallit and W. Zudilin, Neverending Fractions, Cambridge University Press 2014.

[6] Y. Bugeaud and D. H. Kim, A new complexity function, repetitions in Sturmian words, and irrationality exponents of Sturmian numbers, Transactions of American Mathematical Society 371 (2019) 3281 - 3308.

[7] J. W. S. Cassels, An Introduction to Diophantine Approximation, Cambridge at the Univeristy Press, 1957.

[8] M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words, Cambridge University Press, 2002.

[9] S. Ohnaka and T. Watanabe, A gap of exponents of repetitions of Sturmian words, Moscow J. of Combinatorics and Number Theory 10 (2021) 203 -234.

記号

実数体を $\mathbf{R}$, 有理数体を $\mathbf{Q}$, 整数全体を $\mathbf{Z}$, 1 以上の整数全体を $\mathbf{N}$ と表す. $\mathbf{R}_\infty = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ を実無理数の集合とする. 実数 c は, 整数 $n \in \mathbf{Z}$ と $0 \leq \theta < 1$ により

$$c = n + \theta$$

と一意に書ける. このとき

$$\lfloor c \rfloor = n, \qquad \lceil c \rceil = \begin{cases} n+1 & (\theta \neq 0) \\ n & (\theta = 0) \end{cases}, \qquad \{c\} = \theta$$

と定義する.

1　連分数

$\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ を実数列で $a_i > 0 \ \ (i \geq 1)$ とするとき

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{a_n}}}} \qquad (n \geq 0)$$

とおく. 数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ を

$$(1.1) \qquad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad p_0 = a_0, \quad p_{-1} = 1 \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad q_0 = 1, \quad q_{-1} = 0 \end{cases}$$

と定義する. これは行列で

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける. n についての帰納法で次が成り立つ

$$(1.2) \qquad \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \cdots, a_n] \quad (n \geq 0)$$

$$(1.3) \qquad \frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1] \quad (n \geq 1)$$

証明　(1.2) を示す.

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}, \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0, a_1]$$

より $n = 0, 1$ で成り立つ. $n - 1$ まで成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n] &= [a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}] \\ &= \frac{\left(a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}\right) p_{n-2} + p_{n-3}}{\left(a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}\right) q_{n-2} + q_{n-3}} = \frac{(a_n a_{n-1} + 1) p_{n-2} + a_n p_{n-3}}{(a_n a_{n-1} + 1) q_{n-2} + a_n q_{n-3}} \\ &= \frac{a_n (a_{n-1} p_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2}}{a_n (a_{n-1} q_{n-2} + q_{n-3}) + q_{n-2}} \\ &= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \end{aligned}$$

(1.3) も容易である. □

Lemma 1

$\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ を整数列で $a_i > 0 \ \ (i \geq 1)$ とし, 数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ を (1.1) で定義して

$$r_n = \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$$

とおけば, 次が成り立つ.

(1) $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1} \quad (n \geq 0)$ とくに $\gcd(p_n, q_n) = 1 \quad (n \geq 0)$

(2) $r_n - r_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{q_{n-1} q_n} \quad (n \geq 1)$

(3) $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \quad (n \geq 1)$

(4) $r_n - r_{n-2} = \dfrac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n} \quad (n \geq 2)$

(5) $1 \leq a_1 = q_1, \ \ q_{n-1} + q_{n-2} \leq q_n, \ \ 1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$

(6) $r_0 < r_2 < r_4 < \cdots, \cdots < r_5 < r_3 < r_1$ であり, すべての $i, j \geq 0$ について $r_{2i} < r_{2j+1}$ が成り立つ.

(7) $\lim_{n \to \infty} r_n = \alpha$ が存在する.

証明 (1) は (1.1) の行列表示で行列式をとればよい. (2) は (1) の両辺を $q_{n-1} q_n$ で割る.

(3) 定義から

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= p_n(q_n - a_n q_{n-1}) - (p_n - a_n p_{n-1}) q_n \\ &= -a_n(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) = -a_n (-1)^{n+1} = (-1)^n a_n \end{aligned}$$

(4) (3) の両辺を $q_n q_{n-2}$ で割ればよい.

(5) $n \geq 1$ で $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1}$ であり, $n \geq 2$ ならば $q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1}$ が成り立つ.

(6) (4) から n が even のとき $r_n - r_{n-2} > 0$ で, odd ならば $r_n - r_{n-2} < 0$ である. (2) から, すべての $i \geq 0$ で $r_{2i} < r_{2i+1}$ である. ある $i, j \geq 0$ で $r_{2j+1} \leq r_{2i}$ であったとすると

$$\begin{aligned} &i \geq j \text{ ならば } r_{2i} < r_{2i+1} \leq r_{2j+1} \leq r_{2i} \\ &i < j \text{ ならば } r_{2j+1} \leq r_{2i} < r_{2j} < r_{2j+1} \end{aligned}$$

でどちらの場合も矛盾である. よって $r_{2i} < r_{2j+1}$ である.

(7) $\{r_{2i}\}$ は上に有界な単調増加列で $\{r_{2j+1}\}$ は下に有界な単調増加列だから, ともに収束する.

$$\alpha = \lim_{i \to \infty} r_{2i}, \qquad \beta = \lim_{j \to \infty} r_{2j+1}$$

とおく. このとき (2) より

$$|\beta - \alpha| = \lim_{i \to \infty} |r_{2i+1} - r_{2i}| = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{q_{2i} q_{2i+1}} = 0 \quad \text{よって} \ \ \beta = \alpha$$

□

Def $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ を整数列で $a_i > 0$ $(i \geq 1)$ とし, Lemma 1 (7) から定まる極限

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, \cdots, a_n]$$

を

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$$

と表す. この右辺を単純無限連分数 **(simple continued fraction)** という. 各 a_n を第 n 部分商 **(n-th partial quotient)** といい, $r_n = p_n/q_n$ を α の 第 n 近似分数 **(n-th convergent)** とよぶ. r_n は既約分数である.

Prop 2

$\boldsymbol{\alpha = [a_0, a_1, \cdots], \beta = [b_0, b_1, \cdots]}$ を単純無限連分数とする.
(1) $\boldsymbol{\alpha}$ は無理数である.
(2) $\boldsymbol{\alpha = \beta \iff a_i = b_i \quad (\forall i \geq 0)}$
(3) 任意の無理数は, 単純無限連分数で一意的に表示できる.

証明 (1) α は r_n と r_{n+1} の間にあるので

$$0 < |\alpha - r_n| < |r_{n+1} - r_n|$$

よって

$$0 < |q_n\alpha - p_n| < q_n|r_{n+1} - r_n| = \frac{1}{q_{n+1}}$$

α が有理数と仮定して $\alpha = c/d$ とすると

$$0 < \left|q_n\frac{c}{d} - p_n\right| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

から

$$1 \leq |q_n c - p_n d| < \frac{|d|}{q_{n+1}} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

で矛盾である.
(2) α から α_i を次のように定める.

$$\alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1}, \quad \cdots \quad \alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i}, \quad \cdots$$

このとき

$$\alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}$$

から

$$\alpha = [a_0, a_1, \cdots, a_i, \alpha_{i+1}], \qquad \alpha_{i+1} = [a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots]$$

α の連分数は単純だから $0 \leq i$ のとき

$$1 \leq a_{i+1} < \alpha_{i+1} < a_{i+1} + 1 \quad \text{よって} \quad a_{i+1} = \lfloor \alpha_{i+1} \rfloor$$

また

$$a_0 < \alpha < a_0 + 1 \quad \text{よって} \quad a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$$

β についても β_i を同様に定める. いま $\alpha = \beta$ とすれば

$$a_0 = \lfloor \alpha \rfloor = \lfloor \beta \rfloor = b_0 \quad \text{したがって} \quad \alpha_1 = \beta_1$$

$i \leq k$ まで $a_i = b_i$ が成り立つと仮定すると, $\alpha_{i+1} = \beta_{i+1}$ となるから, とくに $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1}$. よって

$$a_{k+1} = \lfloor \alpha_{k+1} \rfloor = \lfloor \beta_{k+1} \rfloor = b_{k+1}$$

(3) $\gamma \in \mathbf{R}$ を無理数とする. $\gamma_i \in \mathbf{R}$, $c_i \in \mathbf{Z}$ を次のように与える.

$$\begin{aligned} & \gamma_0 = \gamma \\ c_0 = \lfloor \gamma_0 \rfloor, \quad & \gamma_1 = \frac{1}{\gamma_0 - c_0} \\ c_1 = \lfloor \gamma_1 \rfloor, \quad & \gamma_2 = \frac{1}{\gamma_1 - c_1} \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ c_i = \lfloor \gamma_i \rfloor, \quad & \gamma_{i+1} = \frac{1}{\gamma_i - c_i} \end{aligned}$$

ある $i \geq 0$ で $\gamma_{i+1} \in \mathbf{Q}$ になったとすれば, $\gamma_i \in \mathbf{Q}$ となり, 番号をさかのぼって $\gamma \in \mathbf{Q}$ となるので矛盾. よって, すべての i で γ_i は無理数になる. このとき

$$c_{i-1} < \gamma_{i-1} < c_{i-1} + 1 \quad \text{よって} \quad \gamma_i = \frac{1}{\gamma_{i-1} - c_{i-1}} > 1$$

だから $c_i = \lfloor \gamma_i \rfloor \geq 1$ $(i \geq 1)$ である. したがって $[c_0, c_1, \cdots]$ は単純無限連分数になる. 定義から

$$\gamma = \gamma_0 = c_0 + \frac{1}{\gamma_1} = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\gamma_2}} = \cdots = [c_0, c_1, \cdots, c_n, \gamma_{n+1}]$$

となる. $[c_0, c_1, \cdots]$ の近似分数を s_n/t_n とすれば

$$\gamma = [c_0, c_1, \cdots, c_n, \gamma_{n+1}] = \frac{\gamma_{n+1}s_n + s_{n-1}}{\gamma_{n+1}t_n + t_{n-1}}$$

であるから

$$\left|\gamma - \frac{s_n}{t_n}\right| = \left|\frac{\gamma_{n+1}s_n + s_{n-1}}{\gamma_{n+1}t_n + t_{n-1}} - \frac{s_n}{t_n}\right| = \left|\frac{s_{n-1}t_n - s_n t_{n-1}}{(\gamma_{n+1}t_n + t_{n-1})t_n}\right| = \frac{1}{(\gamma_{n+1}t_n + t_{n-1})t_n} < \frac{1}{t_n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

よって

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{t_n} = [c_0, c_1, \cdots]$$

である. 一意性は (2) から従う. □

2 無理数の同値性

$\mathbf{R}_\infty = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ を無理数の全体とする.

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \ \ ad - bc = \pm 1 \right\}$$

とおく. $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ は群になる. $\xi \in \mathbf{R}_\infty$ と $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ に対し

$$A\xi = \frac{a\xi + b}{c\xi + d} \in \mathbf{R}_\infty$$

と定義する.

Lemma 3

$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}_\infty \longrightarrow \mathbf{R}_\infty \ : \ (A, \xi) \to A\xi$ は作用になる.

証明 作用であるためには, 任意の $\xi \in \mathbf{R}_\infty$ と $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ について

$$(AB)\xi = A(B\xi) \quad \text{かつ} \quad I_2\xi = \xi$$

が成り立つことを示せばよいが, これは容易. □

Def $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_\infty$ に対し

$$^{\exists}A \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}) \quad \text{s.t.} \quad \alpha = A\beta$$

が成り立つとき, α と β は同値であるといい, $\alpha \sim \beta$ と表す. これは $\mathbf{R}_\infty$ の同値関係である.

例 $\alpha = [a_0, a_1, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty$ のとき $\alpha_n = [a_n, a_{n+1}, \cdots]$ とおく.

$$\alpha = [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n] = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \alpha_n$$

である.

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$$

だから $\alpha \sim \alpha_n$ である.

Lemma 4

$\boldsymbol{\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty}$, $\boldsymbol{\alpha_n = [a_n, a_{n+1}, \cdots]}$ として, $\boldsymbol{\alpha}$ の近似分数を $\boldsymbol{p_j/q_j}$ とする. $\boldsymbol{1 < \beta \in \mathbf{R}_\infty}$ に対し

$$\boldsymbol{\alpha = A\beta, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})} \ \text{かつ}\ \boldsymbol{c > d > 0}$$

と仮定する. このとき

$$\boldsymbol{{}^\exists n \in \mathbf{N}} \ \textit{s.t.}\ \boldsymbol{\frac{b}{d} = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \quad \frac{a}{c} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \quad \beta = \alpha_n}$$

となる.

証明 $\epsilon = ad - bc \in \{-1, 1\}$ より $\gcd(a, c) = 1$ である. a/c の連分数展開は

$$\frac{a}{c} = [e_0, e_1, \cdots, e_{k-1}], \qquad e_0 \in \mathbf{Z}, \quad e_1, \cdots, e_{k-1} \in \mathbf{N}, \quad e_{k-1} \geq 2$$

と書ける. その近似分数を s_j/t_j とすれば $a/c = s_{k-1}/t_{k-1}$ より

$$s_{k-1} = a, \quad t_{k-1} = c, \qquad s_{k-1}t_{k-2} - s_{k-2}t_{k-1} = (-1)^k$$

である.

(case 1) $\epsilon = (-1)^k$ のとき: $n = k$ とする.

$$s_{n-1}t_{n-2} - s_{n-2}t_{n-1} = \epsilon, \qquad ad - bc = s_{n-1}d - t_{n-1}b = \epsilon$$

から

$$s_{n-1}(d - t_{n-2}) = t_{n-1}(b - s_{n-2}) \quad \text{よって} \quad t_{n-1} \mid (d - t_{n-2})$$

Lemma 1 (5) より $0 < t_{n-2} \leq t_{n-1}$ で, 仮定より $0 < d < c = t_{n-1}$ だから $|d - t_{n-2}| < t_{n-1}$ となる. したがって $d - t_{n-2} = 0$. これから $b - s_{n-2} = 0$. よって

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d} = \frac{s_{n-1}\beta + s_{n-2}}{t_{n-1}\beta + t_{n-2}} = [e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}, \beta]$$

で, $\beta > 1$ から右辺は α の連分数展開である. 一意性から $\beta = \alpha_n$ かつ $a/c = p_{n-1}/q_{n-1}, b/d = p_{n-2}/q_{n-2}$ となる .

(case 2) $\epsilon \neq (-1)^k$ のとき: 有限連分数は

$$\frac{a}{c} = [e_0, e_1, \cdots, e_{k-1} - 1, 1] = \frac{s'_k}{t'_k}$$

とも書けるので,

$$s'_k t'_{k-1} - s'_{k-1} t'_k = (-1)^{k+1} = \epsilon$$

となる. このとき $n = k + 1$ として, s'_{n-1}, t'_{n-1} に対し, **(case 1)** の議論を当てはめればよい. □

Prop 5

$\boldsymbol{\alpha, \beta \in \mathbf{R}_\infty}$ **の連分数展開を** $\boldsymbol{\alpha = [a_0, a_1, \cdots], \beta = [b_0, b_1, \cdots]}$ **とする. このとき**

$$\boldsymbol{\alpha \sim \beta \iff {}^\exists m, n \geq 1 \quad s.t. \quad \alpha_m = \beta_n}$$

証明 $\alpha_m = \beta_n$ とする. このとき $\alpha \sim \alpha_m = \beta_n \sim \beta$ だから $\alpha \sim \beta$ である.
逆に

$$\alpha = A\beta = \frac{a\beta + b}{c\beta + d} \qquad ad - bc = \pm 1,\ a, b, c, d \in \mathbf{Z}$$

とする. $c\beta + d > 0$ としてよい. (そうでなければ A を $-A$ に置き換えて考える.)

$$B_n = \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{n-1} & s_{n-2} \\ t_{n-1} & t_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$$

とおけば $\beta = B_n\beta_n$ だから $\alpha = AB_n\beta_n$.

$$AB_n = \begin{pmatrix} as_{n-1} + bt_{n-1} & as_{n-2} + bt_{n-2} \\ cs_{n-1} + dt_{n-1} & cs_{n-2} + dt_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

とおく.

$$cs_{n-1} + dt_{n-1} = t_{n-1}\left(c\frac{s_{n-1}}{t_{n-1}} + d\right) = c'$$
$$cs_{n-2} + dt_{n-2} = t_{n-2}\left(c\frac{s_{n-2}}{t_{n-2}} + d\right) = d'$$

で

$$0 < t_{n-1}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(c\frac{s_{n-1}}{t_{n-1}} + d\right) = c\beta + d > 0$$

だから, 十分大きな n で $c' > 0$, 同様に $d' > 0$ となる. また $\beta_n > 1$ である. 更に n を偶数にとれば, Lemma 1 (6) から

$$\frac{s_{n-2}}{t_{n-2}} < \beta < \frac{s_{n-1}}{t_{n-1}} \quad \text{よって} \quad d' < c'$$

このような n で $\alpha = AB_n\beta_n$ は Lemma 4 の仮定を満たすから, ある m で $\beta_n = \alpha_m$ となる. □

3　2次無理数

$0 < d \in \mathbf{Z}$ は平方因子を持たないとする. 集合

$$\mathbf{Q}(\sqrt{d}) = \{x + y\sqrt{d} \ : \ x, y \in \mathbf{Q}\}$$

は $\mathbf{Q}$ 上拡大次数が 2 の体になる. これを実 2 次体という. $\alpha = x + y\sqrt{d}$ に対し

$$\alpha^{\iota} = x - y\sqrt{d}$$

を α の共役という. 写像 $\alpha \mapsto \alpha^{\iota}$ は $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ の自己同型写像であり,

$$(\alpha+\beta)^{\iota} = \alpha^{\iota} + \beta^{\iota}, \quad (\alpha\beta)^{\iota} = \alpha^{\iota}\beta^{\iota}$$
$$\alpha^{\iota} = \alpha \iff \alpha \in \mathbf{Q}$$

が成り立つ.
$\alpha = x + y\sqrt{d} \notin \mathbf{Q}$ ならば, α は $\mathbf{Q}$ 係数の 2 次方程式

$$t^2 - 2xt + x^2 - dy^2 = (t-\alpha)(t-\alpha^{\iota})$$

の解であり,

$$x^2 - dy^2 = \frac{c}{a}, \qquad -2x = \frac{b}{a}, \qquad a, b, c \in \mathbf{Z},\ a > 0,\ \gcd(a,b,c) = 1$$

とすれば, $\mathbf{Z}$ 係数の 2 次方程式

$$g_{\alpha}(t) := at^2 + bt + c = 0$$

の解である. $g_{\alpha}(t)$ を α の $\mathbf{Z}$-係数最小多項式 という. これは α から一意に決まる. このとき

$$D_{\alpha} = b^2 - 4ac = 4a^2y^2d$$

を α の判別式とよぶ.

Def　$\alpha \in \mathbf{R}$ が, ある $d > 0$ について $\alpha \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ かつ $\alpha \notin \mathbf{Q}$ であるとき, α を 2 次無理数という. さらに $\alpha > 1$ かつ $-1 < \alpha^{\iota} < 0$ を満たすとき, α を**簡約 2 次無理数**という.

$\mathbf{R}_2$: 2 次無理数の全体
$\mathbf{R}_2^{\circ}$: 簡約 2 次無理数の全体
とおく.

Prop 6

$0 < D \in \mathbf{Z}$ が与えられたとき

$$\mathbf{R}_2^{\circ}(D) = \{\alpha \in \mathbf{R}_2^{\circ} \ : \ D_{\alpha} = D\}$$

は有限集合である.

証明 $\alpha \in \mathbf{R}_2^\circ(D)$ とする. $g_\alpha(t) = at^2 + bt + c$ とすれば

$$\alpha = \frac{-b + \epsilon\sqrt{D}}{2a} > 1 \quad \text{かつ} \quad -1 < \frac{-b - \epsilon\sqrt{D}}{2a} < 0$$

と表せる. ここで $\epsilon \in \{\pm 1\}$. $\epsilon = -1$ とすると

$$1 < \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} - \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right) = -\frac{\sqrt{D}}{a} < 0$$

で矛盾するから, $\epsilon = 1$. よって

$$b + \sqrt{D} < 2a < -b + \sqrt{D}$$

これから

$$-\sqrt{D} < b < 0$$

で b の可能性は有限とおりしかなく, a の可能性も有限とおりである. $b^2 - 4ac = D$ から, c の可能性も有限とおりである. よって $\mathbf{R}_2^\circ$ の要素の最小多項式となりうる 2 次式は有限個である. □

Lemma 7

$\alpha, \beta \in \mathrm{R}_\infty$ で $\alpha \sim \beta$ とする. このとき $\alpha \in \mathrm{R}_2$ ならば $\beta \in \mathrm{R}_2$ で, $D_\alpha = D_\beta$ である.

証明 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ により $\alpha = A\beta$ とする. 前半は明らか. α の最小多項式を

$$g_\alpha(t) = at^2 + bt + c = (t, 1)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表示すると

$$0 = g_\alpha(A\beta) = \frac{1}{(a_{21}\beta + a_{22})^2} \cdot (\beta, 1)^t A \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. これから

$$g_\beta(t) = (t, 1)^t A \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. $\det A = \pm 1$ だから

$$D_\beta = 4 \det {}^t A \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} A = (\det A)^2 D_\alpha = D_\alpha$$

となる. □

Prop 8

$\boldsymbol{\alpha \in \mathbf{R}_2}$ として, $\boldsymbol{\alpha = [a_0, a_1, \cdots], \alpha_n = [a_n, a_{n+1}, \cdots]}$ とする. このとき, 十分大きなすべての $\boldsymbol{n}$ で $\boldsymbol{\alpha_n \in \mathbf{R}_2^\circ}$ である. $\boldsymbol{\alpha \in \mathbf{R}_2^\circ}$ ならば, すべての $\boldsymbol{n \geq 1}$ で $\boldsymbol{\alpha_n \in \mathbf{R}_2^\circ}$ である.

証明 Lemma 7 より $\alpha_n \in \mathbf{R}_2$ かつ $D_\alpha = D_{\alpha_n}$ である.

$$A_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad r_n = \frac{p_n}{q_n}$$

とおけば $\alpha = A_n\alpha_n$. よって

$$A_n^{-1} = (-1)^n\begin{pmatrix} q_{n-2} & -p_{n-2} \\ -q_{n-1} & p_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \alpha_n = A_n^{-1}\alpha = \frac{q_{n-2}\alpha - p_{n-2}}{-q_{n-1}\alpha + p_{n-1}} = (-1)\frac{q_{n-2}\alpha - p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha - p_{n-1}}$$

となる. $n \geq 1$ のとき $\alpha_n > 1$ だから, 十分大きな n で $-1 < \alpha_n^\iota < 0$ を示せばよい.

$$\alpha_n^\iota = (-1)\frac{q_{n-2}\alpha^\iota - p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha^\iota - p_{n-1}} = (-1)\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\cdot\frac{\alpha^\iota - r_{n-2}}{\alpha^\iota - r_{n-1}} \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^\iota - r_{n-2}}{\alpha^\iota - r_{n-1}} = 1$$

だから n が十分大きいとき, $\alpha_n^\iota < 0$ である. さらに Lemma 1 (1) から

$$\frac{\alpha^\iota - r_{n-2}}{\alpha^\iota - r_{n-1}} = 1 + \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{\alpha^\iota - r_{n-1}} = 1 + \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_{n-2}(\alpha^\iota - r_{n-1})}$$

だから,

$$\begin{aligned} 1 + \alpha_n^\iota &= 1 + -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_{n-2}(\alpha^\iota - r_{n-1})}\right) \\ &= \frac{1}{q_{n-1}}\left(q_{n-1} - q_{n-2} + \frac{(-1)^n}{q_{n-1}(\alpha^\iota - r_{n-1})}\right) \end{aligned}$$

ここで Lemma 1 (5), (7) から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{q_{n-1}(\alpha^\iota - r_{n-1})} = 0 \quad \text{かつ} \quad q_{n-2} < q_{n-1}$$

なので, n が十分大きいならば $1 + \alpha_n^\iota > 0$ である.
$\alpha \in \mathbf{R}_2^\circ$ とする. このとき

$$1 < \alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

で a_0 は整数, $1 < \alpha_1$ だから, $1 \leq a_0$ である. $-1 < \alpha^\iota < 0$ から

$$-\frac{1}{\alpha_1^\iota} = a_0 - \alpha^\iota > 1 \quad \text{これから} \quad -1 < \alpha_1^\iota < 0$$

で $\alpha_1 \in \mathbf{R}_2^\circ$ となる. 帰納的に $1 \leq n$ で $\alpha_n \in \mathbf{R}_2^\circ$ となる. □

Lemma 9

$\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}_2^\circ$ とする. このとき $\boldsymbol{c} \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha = c + \frac{1}{\beta} \in \mathbf{R}_2^\circ \iff c = \left\lfloor -\frac{1}{\beta^\iota} \right\rfloor}$$

証明 β は簡約なので $\beta > 1$ かつ $-1/\beta^\iota > 1$ である.

$$c = \lfloor -1/\beta^\iota \rfloor \iff c < -\frac{1}{\beta^\iota} < c + 1 \iff -1 < c + \frac{1}{\beta^\iota} < 0 \iff -1 < \alpha^\iota < 0$$

□

4　2次無理数の連分数

Def　$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$ を単純無限連分数とする.
(1) ある $k \geq 1$ で $\alpha = \alpha_k$ が成り立つとき, つまり

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, \cdots]$$

の形になるとき, これを純周期的といい $\alpha = [\overline{a_0, \cdots, a_{k-1}}]$ と表す.
(2) ある $m > n \geq 0$ で $\alpha_m = \alpha_n$ が成り立つとき, α を周期的という.

例　$\alpha = [\overline{1}] = [1, 1, 1, \cdots]$ とすると, $\alpha = [1, \alpha]$ だから

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \quad \text{つまり} \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

を満たすので

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である.

定理 10 (Euler-Lagrange)

$\alpha \in \mathbf{R}_\infty$ とする. このとき
(1)　$\alpha \in \mathbf{R}_2 \iff \alpha$ の連分数が周期的
(2)　$\alpha \in \mathbf{R}_2^\circ \iff \alpha$ の連分数が純周期的

証明　$\alpha = [a_0, a_1, \cdots], \alpha_n = [a_n, a_{n+1}, \cdots]$ とする.
(1) ($\Longrightarrow$)　$\alpha \in \mathbf{R}_2$ とする. Prop 8 から

$$^\exists N \quad \text{s.t.} \quad \alpha_n \in \mathbf{R}_2^\circ \quad (^\forall n \geq N)$$

$\alpha \sim \alpha_n$ だから, Lemma 7 より $D_\alpha = D_{\alpha_n}$ となる. Prop 6 より $\{\alpha_n\}_{n \geq N}$ は同じ判別式をもつ簡約2次無理数の集合だから有限集合になる. したがって

$$^\exists m > {}^\exists n \geq N \quad \text{s.t.} \quad \alpha_m = \alpha_n$$

よって α は周期的になる.
(2) ($\Longleftarrow$)　α が純周期的で $\alpha = [\overline{a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}}]$ とする. $\alpha_k = \alpha$, つまり

$$\alpha = [a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, \alpha]$$

だから

$$\alpha = A\alpha, \qquad A = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix}$$

と書ける. これから $\alpha \in \mathbf{R}_2$ である. Prop 8 より

$$^\exists N \quad \text{s.t.} \quad \alpha_n \in \mathbf{R}_2^\circ \quad ({}^\forall n \geq N)$$

$n = mk \geq N$ とすると, $\alpha = \alpha_{mk} \in \mathbf{R}_2^\circ$ となる.
(1) ($\Longleftarrow$) α が周期的とすると, ある $n \geq 1$ で α_n は純周期的になる. 上の証明から $\alpha_n \in \mathbf{R}_2^\circ$. $\alpha_n \sim \alpha$ だから, Lemma 7 より $\alpha \in \mathbf{R}_2$ である.
(2) ($\Longrightarrow$) $\alpha \in \mathbf{R}_2^\circ$ とする. (1) から α は周期的で

$$\alpha = [a_0, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n], \quad \alpha_n \in \mathbf{R}_2^\circ \text{ は純周期的 } \alpha_n = \alpha_{n+k}$$

と書ける. Prop 8 より, すべての α_j は簡約である. とくに

$$\alpha_{n-1} = [a_{n-1}, \alpha_n] = a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}, \qquad \alpha_{n+k-1} = [a_{n+k-1}, \alpha_{n+k}] = a_{n+k-1} + \frac{1}{\alpha_{n+k}}$$

で, Lemma 9 を適用すると

$$a_{n-1} = \lfloor -1/\alpha_n^\iota \rfloor = \lfloor -1/\alpha_{n+k}^\iota \rfloor = a_{n+k-1}$$

よって $\alpha_{n-1} = \alpha_{n+k-1}$. これを繰り返すと $\alpha = \alpha_0 = \alpha_k$ となり α は純周期的になる. □

Prop 11

$\alpha = [\overline{a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}}] \in \mathbf{R}_2^\circ$ のとき

$$-\frac{1}{\alpha^\iota} = [\overline{a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots, a_0}]$$

である.

証明 $\alpha = [a_0, \cdots, a_k, \alpha]$ だから

$$\alpha = A\alpha, \qquad A = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix}$$

となる. $\beta = [\overline{a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots, a_0}] = [a_{k-1}, \cdots, a_0, \beta]$ とすると

$$\beta = {}^tA\beta, \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-1} & q_{k-1} \\ p_{k-2} & q_{k-2} \end{pmatrix}$$

が成り立つ. これから, β は

$$g(t) = p_{k-2}t^2 + (q_{k-2} - p_{k-1})t - q_{k-1}$$

の根である.

$$g(-1/\alpha^\iota) = -(\alpha^\iota)^{-2}\left(q_{k-1}\alpha^2 + (q_{k-2} - p_{k-1})\alpha - p_{k-2}\right)^\iota = 0$$

で, β と $-1/\alpha^\iota$ はどちらも $g(t)$ の正の根になるから $\beta = -1/\alpha^\iota$ となる.

□

5　連分数による無理数の近似

Lemma 12

$\boldsymbol{\alpha = [a_0, a_1, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty}$ として, $\boldsymbol{r_n = p_n/q_n = [a_0, \cdots, a_n]}$, $\boldsymbol{\alpha_n = [a_n, a_{n+1}, \cdots]}$ とする. このとき, 任意の $\boldsymbol{n \geq 1}$ で以下が成り立つ.

(1) $\boldsymbol{q_{n-2}\alpha - p_{n-2} = \dfrac{(-1)^n \alpha_n}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}}$

(2) $\boldsymbol{q_{n-1}\alpha - p_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}}$

(3) $\boldsymbol{\dfrac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} \leq \dfrac{1}{(q_{n+1}+q_n)q_n} < |\alpha - r_n| < \dfrac{1}{q_{n+1}q_n} < \dfrac{1}{a_{n+1}q_n^2} \leq \dfrac{1}{q_n^2}}$

(4) $\boldsymbol{|\alpha - r_{n+1}| < |\alpha - r_n|}$

証明 (1), (2)　$\alpha = [a_0, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n]$ から

$$\alpha = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$$

となる. Lemma 1 (1) から

$$q_{n-2}\alpha - p_{n-2} = \frac{(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})\alpha_n}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}} = \frac{(-1)^n\alpha_n}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$$
$$q_{n-1}\alpha - p_{n-1} = \frac{p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$$

(3)　(2) から

$$|q_n\alpha - p_n| = \frac{1}{q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1}}$$

$n \geq 1$ だから $1 \leq a_{n+1} < \alpha_{n+1} < a_{n+1} + 1$ かつ $1 \leq q_{n-1} \leq q_n$. よって

$$q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1} < q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1} < q_n(a_{n+1}+1) + q_{n-1} = q_{n+1} + q_n \leq q_n(a_{n+1}+2)$$

これから

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} \leq \frac{1}{(q_{n+1}+q_n)q_n} < |\alpha - r_n| < \frac{1}{(a_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{1}{q_{n+1}q_n} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \leq \frac{1}{q_n^2}$$

(4)　Lemma 1 (5) から $q_{n+1} + q_n \leq q_{n+2}$ だから, (3) より

$$|\alpha - r_n| > \frac{1}{(q_{n+1}+q_n)q_n} > \frac{1}{q_{n+2}q_n} > \frac{1}{q_{n+2}q_{n+1}} > |\alpha - r_{n+1}|$$

□

Prop 13

$\boldsymbol{\alpha = [a_0, a_1, \cdots], \beta = [b_0, b_1, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty}$ として

$$\boldsymbol{a_0 = b_0, \cdots, a_{n-1} = b_{n-1}, \quad a_n \neq b_n}$$

とする, このとき

(1) $\boldsymbol{|\alpha - \beta| \leq 2^{2-n} \quad (n \geq 1)}$

(2) $\boldsymbol{\alpha < \beta \iff (-1)^n a_n < (-1)^n b_n \quad (n \geq 0)}$

証明 (1) $p_j/q_j = [a_0, \cdots, a_j]$ を近似分数とすれば $1 = q_0 \leq q_1 = a_1 < q_2 < \cdots$ である. 任意の $j \geq 0$ で $q_j \geq 2^{(j-1)/2}$ が成り立つ. これは $j = 0, 1$ では明らかで, 帰納法により

$$q_j = a_j q_{j-1} + q_{j-2} \geq 2q_{j-2} \geq 2 \cdot 2^{(j-3)/2} = 2^{(j-1)/2}$$

である. 仮定から, $r_{n-1} = p_{n-1}/q_{n-1} = [a_0, \cdots, a_{n-1}] = [b_0, \cdots, b_{n-1}]$ で, $\alpha, \beta \in [r_{n-1}, +\infty)$ または $\alpha, \beta \in (-\infty, r_{n-1}]$ であるから,

$$|\alpha - \beta| \leq \max(|\alpha - r_{n-1}|, |\beta - r_{n-1}|)$$

である. Lemma 12 (3) から

$$|\alpha - r_{n-1}| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \leq 2^{2-n}$$

で, 同様に $|\beta - r_{n-1}| < 2^{2-n}$ だから, $|\alpha - \beta| \leq 2^{2-n}$ である.

(2) $n = 0$ では自明である. $1 \leq n$ とする. 一般に $0 < x, y \in \mathbf{R}$ のとき

$$[a_0, x] < [a_0, y] \iff x > y \iff -x < -y$$

も自明である. $[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n] = [a_0, [a_1, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n]]$ と見れば

$$\begin{aligned}
\alpha < \beta &\iff [a_0, [a_1, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n]] < [a_0, [a_1, \cdots, a_{n-1}, \beta_n]] \\
&\iff (-1)[a_1, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n] < (-1)[a_1, \cdots, a_{n-1}, \beta_n] \\
&\iff (-1)^2[a_2, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n] < (-1)^2[a_2, \cdots, a_{n-1}, \beta_n] \\
&\iff (-1)^n \alpha_n < (-1)^n \beta_n
\end{aligned}$$

$a_n \neq b_n$ のとき

$$[a_n, x] < [b_n, y] \iff a_n < b_n \qquad ({}^\forall x, y \geq 1)$$

だから

$$\alpha < \beta \iff (-1)^n \alpha_n < (-1)^n \beta_n \iff (-1)^n a_n < (-1)^n b_n$$

□

Lemma 14

$\boldsymbol{\alpha = [a_0, a_1, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty}$ で $\boldsymbol{r_n = p_n/q_n = [a_0, \cdots, a_n]}$ とする. $\boldsymbol{r = p/q \in \mathbf{Q}\ (q > 0)}$ を既約分数とするとき, $\boldsymbol{n \geq 1}$ で次が成り立つ.

(1) $\boldsymbol{|q\alpha - p| < |q_n\alpha - p_n| \implies q \geq q_{n+1}}$

(2) $\boldsymbol{|\alpha - r| < |\alpha - r_n| \implies q > q_n}$

証明 (1) $q < q_{n+1}$ と仮定する. 連立方程式

$$\begin{cases} p_n x + p_{n+1} y = p \\ q_n x + q_{n+1} y = q \end{cases}$$

は

$$A = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \det A = \pm 1$$

だから, 整数解

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

をもつ.

($cd \neq 0$): $c = 0$ ならば $d = q/q_{n+1} > 0$ よって $q/q_{n+1} \geq 1$ で矛盾. また $d = 0$ ならば $c = p/p_n = q/q_n$. つまり $p/q = p_n/q_n$ で両辺の 既約性から $p = p_n, q = q_n$ である. これは条件 $|q\alpha - p| < |q_n\alpha - p_n|$ に矛盾する. したがって $cd \neq 0$ である.

(c, d は異なる符号をもつ): $d < 0$ ならば, $q_n c = q - q_{n+1} d > 0$ より $c > 0$. $d \geq 1$ ならば, $q_n c = q - q_{n+1} d \leq q - q_{n+1}$. $q < q_{n+1}$ と仮定しているから $q_n c < 0$ よって $c < 0$.

Lemma 1 (6) から $\alpha - r_n$ と $\alpha - r_{n+1}$ は異なる符号をもつから, $q_n\alpha - p_n$ と $q_{n+1}\alpha - p_{n+1}$ も異なる符号をもつ. よって

$$c(q_n\alpha - p_n) \text{ と } d(q_{n+1} - \alpha p_{n+1}) \text{ は同符号}$$

これから

$$q\alpha - p = (q_n c + q_{n+1} d)\alpha - (p_n c + p_{n+1} d) = c(q_n\alpha - p_n) + d(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})$$

により

$$|q\alpha - p| = |c(q_n\alpha - p_n)| + |d(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})| > |q_n\alpha - p_n|$$

となり, 条件に矛盾する.

(2) $q \leq q_n$ と仮定する.

$$q|\alpha - r| < q_n|\alpha - r_n| \quad \text{よって} \quad |q\alpha - p| < |q_n\alpha - p_n|$$

となるので, (1) より $q \geq q_{n+1} > q$ で矛盾する. □

定理 15 (Lagrange)

$\boldsymbol{\alpha \in \mathbf{R}_\infty}$ に対して, 既約分数 $\boldsymbol{p/q \in \mathbf{Q}\ (q > 0)}$ が

$$\left|\boldsymbol{\alpha - \frac{p}{q}}\right| < \boldsymbol{\frac{1}{2q^2}}$$

を満たすならば, ある $\boldsymbol{n}$ で $\boldsymbol{p/q = p_n/q_n}$ が成り立つ.

証明 p/q が近似分数でないとする. ある n で $q_n \le q < q_{n+1}$ となる. Lemma 14 (1) から

$$|q_n\alpha - p_n| \le |q\alpha - p| < \frac{1}{2q}$$

よって

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2qq_n}$$

$p/q \ne p_n/q_n$ だから $1 \le |pq_n - qp_n|$, したがって

$$\frac{1}{qq_n} \le \frac{|pq_n - qp_n|}{qq_n} = \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| + \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{2qq_n}$$

これから $q < q_n$ となり矛盾である. □

Prop 16

$\boldsymbol{\alpha \in \mathbf{R}_\infty}$ に対して, 近似分数 $\boldsymbol{p_{n-1}/q_{n-1}}$ と $\boldsymbol{p_n/q_n\ (n \ge 2)}$ の少なくとも一つは, 不等式

$$\left|\boldsymbol{\alpha - \frac{p}{q}}\right| < \boldsymbol{\frac{1}{2q^2}}$$

を満たす.

証明 背理法で

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \ge \frac{1}{2q_{n-1}^2} \quad \text{かつ} \quad \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \ge \frac{1}{2q_n^2}$$

と仮定する. α は p_{n-1}/q_{n-1} と p_n/q_n の間にあるから

$$\frac{1}{q_{n-1}q_n} = \frac{|p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n|}{q_{n-1}q_n} = \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| + \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \ge \frac{1}{2q_{n-1}^2} + \frac{1}{2q_n^2}$$

これから $(q_n - q_{n-1})^2 \le 0$ となり矛盾である. □

6 無理数性指数

Prop 17

(1) *(Legendre)* $\boldsymbol{\alpha}$ が無理数ならば, 不等式

$$\left|\boldsymbol{\alpha - \frac{p}{q}}\right| < \boldsymbol{\frac{1}{2q^2}}$$

を満たす有理数 $\boldsymbol{p/q}$ が無限にある.
(2) $\boldsymbol{\delta > 0}$ と $\boldsymbol{K > 0}$ を任意にとる. $\boldsymbol{\alpha}$ が有理数ならば, 不等式

$$\left|\boldsymbol{\alpha - \frac{p}{q}}\right| < \boldsymbol{\frac{K}{q^{1+\delta}}}$$

を満たす有理数 $\boldsymbol{p/q}$ は有限個である.

証明 (1) は Prop 16 から従う. (2) $\alpha = c/d$ として $c/d \neq p/q$ が

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{p}{q}\right| < \frac{K}{q^{1+\delta}}$$

を満たすとする. このとき

$$\frac{1}{dq} \leq \frac{|cq - dp|}{dq} = \left|\frac{c}{d} - \frac{p}{q}\right| < \frac{K}{q^{1+\delta}}$$

から

$$q^{\delta} < dK \quad つまり \quad q < (dK)^{1/\delta}$$

なので, q の可能性は有限である. q を固定すると p の可能性も有限である. □

系 18 (Dirichlet)

$\boldsymbol{\alpha \in \mathbf{R}}$ について

$$\boldsymbol{\alpha} \text{ が無理数} \iff \left|\boldsymbol{\alpha - \frac{p}{q}}\right| < \boldsymbol{\frac{1}{q^2}} \text{ を満たす有理数 } \boldsymbol{p/q} \text{ が無限にある}$$

Def 実数 α に対し, ある有理数係数の多項式 $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$ で $f(\alpha) = 0$ となるものが存在するとき, α を代数的数とよび, 代数的数でない実数を超越数とよぶ. 代数的数の全体を $\mathbf{R}_{\mathrm{alg}}$ と表し, 超越数の全体を $\mathbf{R}_{\mathrm{tr}}$ と表せば, $\mathbf{R}_{\mathrm{alg}}$ は体になり可算集合である. $\mathbf{R}_{\mathrm{tr}}$ は非可算集合である.

定理 19

$\boldsymbol{\alpha \in \mathbf{R}}$ は代数的数で, その $\mathbf{Q}$ 上の最小多項式の次数を $\boldsymbol{d}$ とする.

(1) *(Liouville)* 定数 $\boldsymbol{C = C(\alpha) > 0}$ が存在して,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^d}$$

がすべての有理数 p/q で成り立つ.

(2) *(Thue)* 任意の $\boldsymbol{\delta > 0}$ に対し, 定数 $\boldsymbol{C = C(\alpha, \delta) > 0}$ が存在して

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{d/2+\delta}}$$

がすべての有理数 p/q で成り立つ.

(3) *(Siegel)* 任意の $\boldsymbol{\delta > 0}$ に対し, 定数 $\boldsymbol{C = C(\alpha, \delta) > 0}$ が存在して

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{2\sqrt{d}+\delta}}$$

がすべての有理数 p/q で成り立つ.

(4) *(Roth)* 任意の $\boldsymbol{\delta > 0}$ に対し,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\delta}}$$

を満たす有理数 p/q は有限個である.

Roth の定理の証明は [7] を参照. Roth はこの結果により 1958 年に Fields 賞を受賞した.

Def $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し

$$\mu(\alpha) = \sup\left\{\mu > 0 \ : \ \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\mu} \quad \text{を満たす有理数 } p/q \text{ が無限に存在する}\right\}$$

を α の**無理数性指数 (irrationality exponent)** という. 系 18 と 定理 19 から

$$\mu(\alpha)\begin{cases} = 1 & \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbf{Q} \\ \geq 2 & \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbf{R}_\infty \\ > 2 & \Longrightarrow \alpha \in \mathbf{R}_{\mathrm{tr}} \text{ (逆は成り立たない)} \end{cases}$$

とくに $\mu(\alpha) = +\infty$ となる α を **Liouville 数**とよぶ

例

(1) $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ は Liouville 数である. 実際 $m \geq 1$ に対し

$$\xi_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{c_m}{d_m} \qquad d_m = 10^{m!}$$

とすると

$$|\xi - \xi_m| = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \leq \frac{10}{10^{(m+1)!}} = \frac{1}{10^{m \cdot m!}} \frac{10}{10^{m!}} \leq \frac{1}{10^{m \cdot m!}} = \frac{1}{d_m^m}$$

である. よって, 任意の $\mu > 0$ に対し

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{\mu}}$$

は無限個の解 $p/q = \xi_m$ $(m \geq \mu)$ をもつから, $\mu(\xi) = +\infty$ である.

(2) $\mu(e) = 2$.

(3) Apéry は $\zeta(3)$ の無理数性を次のように証明した. $n \in \mathbf{N}$ に対し a_n, b_n を

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^3} + \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{2j^3 \binom{n}{j} \binom{n+j}{j}} \right) \\ b_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \end{aligned}$$

として

$$p_n = \mathrm{lcm}(1, 2, \cdots, n)^3 a_n, \qquad q_n = \mathrm{lcm}(1, 2, \cdots, n)^3 b_n$$

とおくと $p_n, q_n \in \mathbf{Z}$ になる. このとき

$$\delta = \frac{4 \log(1 + \sqrt{2}) - 3}{4 \log(1 + \sqrt{2}) + 3} = 0.080259 \cdots$$

に対し

$$^{\exists}C > 0 \quad \text{s.t.} \quad \left| \zeta(3) - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{C}{q_n^{1+\delta}} \quad (^{\forall}n)$$

が成り立ち, Prop 17 (2) より $\zeta(3)$ は無理数になる.

$$\mu(\zeta(3)) \leq 1 + \frac{1}{\delta} = 13.417820 \cdots$$

である. 以上については

Van der Poorten, The Mathematical Intelligencer 1 (4) (1979) 195 - 203.

また $\mu(\zeta(3))$ の評価は改良されている.

(4) $\mu(\pi)$ はわかっていない. 最近 Zeilberger - Zudilin により

$$\mu(\pi) \leq 7.103205334137...$$

が示された. 計算は次を使う.

● $\epsilon_n = a_n + b_n\pi \in \mathbf{Z} + \pi\mathbf{Z}$ に対し,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log|\epsilon_n|}{n} \leq -\tau, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log|b_n|}{n} = \sigma, \quad (\sigma, \tau > 0) \quad \Longrightarrow \quad \mu(\pi) \leq 1 + \frac{\sigma}{\tau}$$

● $0 \leq n \in \mathbf{Z}$ に対し

$$I_n := i(-1)^{n+1} \int_{-1-2i}^{-1+2i} \frac{5(x^5 + 6x^3 + 25x)^{2n}}{(25 - x^2)^{3n+1}} dx$$

とする. また

$$P_n := \left\{ p \ \text{素数} \ : \ \max(5, \sqrt{3n}) < p, \ \ \frac{1}{2} \leq \left\{ \frac{n}{p} \right\} < \frac{2}{3} \right\}$$

として,

$$L_n := \frac{\mathrm{lcm}(1, 2, \cdots, 4n)}{\prod_{p\in P_n} p} \in \mathbf{Z}$$

とすると

$$\epsilon_n := 2^{2-\lfloor 5n/2 \rfloor} L_n I_n = a_n + b_n\pi \in \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\pi$$

で,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log|\epsilon_n|}{n} = -1.9029\cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log|b_n|}{n} = 11.6138...$$

以上については

Zeilberger and Zudilin, Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, Vol.9, No.4 (2020) 407 - 419.

また無理数性指数の上界を求めるための一般的なアイデアについては

Zeilberger and Zudilin, Automatic discovery of irrationality proofs and irrationality measures, International J. of Number Theory, Vol. 17 (2021) 815 - 825.

(5) 一般に, $\alpha = [a_0, a_1, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty$ の第 n 近似分数を p_n/q_n とすると, Lemma 12 (3) の評価から

$$\mu(\alpha) = 2 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n}$$

が容易にわかる.

実数 $\delta \geq 2$ に対し, 集合

$$\{\alpha \in (0, 1) \ : \ \mu(\alpha) \geq \delta\}$$

の測度論的な結果を紹介する.

Def $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ を $\mathbf{R}^n$ の部分集合の全体とする. $A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ の直径を

$$d(A) = \sup\{\|x - y\| \ : \ x, y \in A\}$$

で定め, 固定した $\epsilon > 0$ に対し

$$\mathcal{P}_\epsilon(\mathbf{R}^n) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \ : \ A = \mathbf{R}^n \text{ または } d(A) \leq \epsilon\}$$

とおく. 実数 $\lambda \geq 0$ に対し $H_{\lambda,\epsilon} : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$ を

$$H_{\lambda,\epsilon}(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^\lambda \ : \ E_j \in \mathcal{P}_\epsilon(\mathbf{R}^n), \ \ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right\}$$

とすると $H_{\lambda,\epsilon}$ は $\mathbf{R}^n$ の外測度になり,

$$\epsilon_1 < \epsilon_2 \implies H_{\lambda,\epsilon_1}(A) \geq H_{\lambda,\epsilon_2}(A)$$

を満たす. よって

$$H_\lambda(A) = \lim_{\epsilon \to +0} H_{\lambda,\epsilon}(A) \in [0, +\infty]$$

が存在する. H_λ を **Hausdorff** 測度とよぶ.

次が成り立つ.

- H_λ は $\mathbf{R}^n$ の外測度で , H_λ-可測集合族上の測度になる. H_λ-可測集合族は $\mathbf{R}^n$ の Borel 集合族を含む.
- H_0 は counting measure で, H_n は Lebesuge 測度の定数倍になる.
- $\lambda > n \implies H_\lambda(\mathbf{R}^n) = 0$
- $A \subset \mathbf{R}^n$ に対し, ある $\rho > 0$ で

$$H_\rho(A) < \infty \Longrightarrow H_\lambda(A) = 0 \quad (\rho < {}^\forall\lambda)$$
$$H_\rho(A) > 0 \Longrightarrow H_\lambda(A) = \infty \quad (0 \leq {}^\forall\lambda < \rho)$$

Def $A \subset \mathbf{R}^n$ に対し

$$\dim_H(A) = \inf\{\lambda \ : \ H_\lambda(A) = 0\} = \sup\{\lambda \ : \ H_\lambda(A) = \infty\}$$

を A の **Hausdorff** 次元とよぶ.

例 $A \subset \mathbf{R}^n$ に対し

(1) A が可算 $\Longrightarrow \dim_H(A) = 0$.

(2) A の Lebesgue 測度 $> 0 \Longrightarrow \dim_H(A) = n$

(3)　$k=0,1,2$ に対し Cantor の 3 進集合を

$$A_k = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \;:\; a_i \in \{0,1,2\} \setminus \{k\} \right\}$$

とする. このとき

$$\dim_H(A_k) = \frac{\log 2}{\log 3} \qquad (k=0,1,2)$$

で

$$H_{\log 2/\log 3}(A_1) = 1, \qquad H_{\log 2/\log 3}(A_0) = H_{\log 2/\log 3}(A_2) = 0.6457\cdots$$

一般に $\rho = \dim_H(A)$ のとき $H_\rho(A)$ は 0 や ∞ になることもある.
Hausdorff 測度については
長澤壮之, ルベーグ流 測度論と積分論 (2021) 共立出版
に詳しい. (3) は
H. Wegmann, Math. Annalen Vol. 193 (1971) 7 - 20.

定理 20 (Jarnik, Besicovitch, Güting)

(1)　**任意の実数 $\delta \geq 2$ に対し**

$$\begin{aligned}\dim_H\left(\{\alpha \in (0,1) \;:\; \mu(\alpha) > \delta\}\right) &= \dim_H\left(\{\alpha \in (0,1) \;:\; \mu(\alpha) \geq \delta\}\right)\\ &= \dim_H\left(\{\alpha \in (0,1) \;:\; \mu(\alpha) = \delta\}\right)\\ &= \frac{2}{\delta}\end{aligned}$$

である. とくに $\mu(\alpha) = \delta$ となる超越数は非加算存在する.
(2)　**$2 \leq \rho \in \mathbf{R}$ とする. $\alpha = [0, a_1, a_2, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty$ が**

$$^\forall\epsilon > 0 \quad {^\exists}N \geq 1 \quad s.t. \quad q_n^{\rho-2-\epsilon} < a_{n+1} < q_n^{\rho-2+\epsilon} \quad ({^\forall}n > N)$$

を満たすならば, $\mu(\alpha) = \rho$ である.

(1) は [4, Chapter 3] を参照. (2) は
R. Güting, Michigan Math. J. Vol. 10 (1963) 161 - 179.

注　Liouville 数 $\{\alpha \in (0,1) \;:\; \mu(\alpha) = \infty\}$ は非加算であるが, Hausdorff 次元 $= 0$ である.

系 21 (E.Borel)

$\{\alpha \in \mathbf{R} \;:\; \mu(\alpha) > 2\}$ の *Lebesgue* 測度は 0 である.

7 Lagrange スペクトラム

系 21 により, ほとんどすべての $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し, $\mu(\alpha) = 2$ である.

Def $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し.

$$L(\alpha) = \sup\left\{L > 0 \ :\ \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Lq^2} \quad \text{を満たす有理数 } p/q \text{ が無限に存在する}\right\}$$

を α の **Lagrange 数**という. そのような $L > 0$ が存在しない場合は $L(\alpha) = 0$ と定める. Prop 17 から

$$\alpha \in \mathbf{Q} \iff L(\alpha) = 0, \qquad \alpha \in \mathbf{R}_\infty \iff 2 \leq L(\alpha)$$

集合

$$\mathcal{L} = \{L(\alpha) \ :\ \alpha \in \mathbf{R}_\infty\}$$

を **Lagrange スペクトラム (Lagrang spectrum)** という.

Lemma 22

α が無理数で p_n/q_n を近似分数とする. このとき, $L \geq 2$ に対して

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Lq^2} \quad \text{を満たす有理数 } p/q \text{ が無限に存在する}$$
$$\iff \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{Lq_n^2} \quad \text{を満たす } n \text{ が無限に存在する}$$

である. とくに

$$L(\alpha) = \sup\left\{L > 0 \ :\ \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{Lq_n^2} \quad \text{を満たす } n \text{ が無限に存在する}\right\}$$

となる.

証明 $\Longrightarrow$ を示せばよい. p/q が条件を満たすとする. $p/q = (ks)/(kt)$ で s/t は既約とする. このとき

$$\left|\alpha - \frac{s}{t}\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Lq^2} \leq \frac{1}{Lt^2}$$

だから s/t も条件を満たす. Lagrange の定理から, ある n で $s/t = p_n/q_n$ となる. したがって, 条件を満たす p/q は $p/q = (kp_n)/(kq_n)$ の形で, n を固定したとき k のとりうる値は有限とおりである. p/q は無限にあるから, n も無限にある. □

Lemma 23

$\boldsymbol{\alpha \in \mathbf{R}_\infty}$ に対し,

$$\boldsymbol{L(\alpha) < \infty \implies \mu(\alpha) = 2}$$

証明 対偶を示す. $\mu(\alpha) > 2$ とする. $\mu(\alpha) \geq 2+\delta$ となる $\delta > 0$ を固定すれば

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\delta}} \quad \text{を満たす有理数 } p/q \text{ が無限に存在する}$$

$L \geq 2$ に対し, このような p/q で $q < L^{1/\delta}$ となる p/q は有限個である. よって無限個の p/q で

$$q \geq L^{1/\delta} \quad \text{つまり} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Lq^2}$$

よって $L(\alpha) \geq L$ で L は任意でよいから $L(\alpha) = \infty$ になる. □

定理 24 (Hurwitz)

任意の $\boldsymbol{\alpha \in \mathbf{R}_\infty}$ に対し, $\boldsymbol{L(\alpha) \geq \sqrt{5}}$ である.

証明 $\alpha = [a_0, a_1, \cdots]$ の近似分数を $r_n = p_n/q_n$ とする. Prop 16 と同様に, 各 $n \geq 2$ で r_{n-1}, r_n, r_{n+1} の少なくとも一つは, 不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

を満たすことを示す. 背理法で

$$|\alpha - r_i| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_i^2} \qquad (i = n-1, n, n+1)$$

と仮定する. α は r_{n-1} と r_n の間にあるから

$$\frac{1}{q_{n-1}q_n} = \frac{|p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n|}{q_{n-1}q_n} = \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = |\alpha - r_{n-1}| + |\alpha - r_n| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{n-1}^2} + \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}$$

である. よって

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \leq \sqrt{5}$$

任意の $x \geq 1$ に対し

$$x + \frac{1}{x} \leq \sqrt{5} \iff x^2 - \sqrt{5}x + 1 \leq 0 \iff x \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \ \frac{1}{x} \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

であるから, $x = q_n/q_{n-1}$ に当てはめれば

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad \frac{q_{n-1}}{q_n} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

r_n と r_{n+1} で同様にすれば

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ だから

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} > \frac{q_{n+1}}{q_n} = a_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \geq 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} > 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

で矛盾である. □

$\alpha = [a_0, a_1, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty$ として

$$\alpha_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots], \qquad \alpha_n^\circ = \frac{q_{n-1}}{q_n} \overset{(1.3)}{=} [0, a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1]$$

とおく. Lemma 12 (2) から

$$q_n\alpha - p_n = \frac{(-1)^n}{q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1}}$$

よって

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \alpha_n^\circ)\, q_n^2}$$

Prop 25

任意の $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}_\infty$ に対し

$$\boldsymbol{L(\alpha) = \limsup_{n\to\infty}(\alpha_{n+1} + \alpha_n^\circ)}$$

注　一般の数列 $\{x_n\}$ で

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_i \;:\; i \geq n\}$$

であるが, $\{x_n\}$ が上に有界ならば

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \sup\left\{\lim_{j\to\infty} x_{n_j} \;:\; \{x_{n_j}\} \text{ は } \{x_n\} \text{ の任意の収束部分列}\right\}$$

でもある.

証明　右辺を $M(\alpha)$ とおく．

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{Lq_n^2} \quad \text{を満たす } n \text{ が無限に存在する}$$

ような $L \geq \sqrt{5}$ を任意にとる．このとき

$$\frac{1}{(\alpha_{n+1} + \alpha_n^\circ)\, q_n^2} < \frac{1}{Lq_n^2} \quad \text{すなわち} \quad L < \alpha_{n+1} + \alpha_n^\circ$$

となる n が無限にあるから

$$L \leq M(\alpha) \quad \text{よって} \quad L(\alpha) \leq M(\alpha)$$

である．$0 < M < M(\alpha)$ を任意にとる．

$$M < \alpha_{n+1} + \alpha_n^\circ$$

を満たす n が無限にある．これから

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{Mq_n^2} \quad \text{を満たす } n \text{ が無限に存在する}$$

よって $M \leq L(\alpha)$ で $M(\alpha) \leq L(\alpha)$ が従う． □

例　$\alpha = [\overline{1}] = (1 + \sqrt{5})/2$ とすると，$\alpha_{n+1} = \alpha$ かつ

$$\frac{1}{\alpha_n^\circ} = \frac{q_n}{q_{n-1}} = [1, \cdots, 1] \longrightarrow \alpha \quad (n \to \infty)$$

だから

$$L(\alpha) = \limsup_{n\to\infty}(\alpha_{n+1} + \alpha_n^\circ) = \lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1} + \alpha_n^\circ) = \alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{5}$$

同様の計算で，$\beta = [\overline{2}] = 1 + \sqrt{2}$ とすると $L(\beta) = \sqrt{8}$ となる．

系 26

$\mathcal{L}$ の最小値は $\sqrt{5}$ である．

8 Lagrange スペクトラムと難近似数

Prop 27

任意の $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}_\infty$ に対し

$$\boldsymbol{\alpha \sim \beta \implies L(\alpha) = L(\beta)}$$

証明 Prop 5 より, ある $\gamma = [c_1, c_2, \cdots] \geq 1$ により

$$\alpha = [a_0, a_1, \cdots, a_k, \gamma], \qquad \beta = [b_0, \cdots, b_\ell, \gamma]$$

と書ける. $\gamma_n = [c_n, c_{n+1}, \cdots]$ として

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \alpha_{k+n} + \alpha^\circ_{k+n-1} = \gamma_n + [0, c_{n-1}, \cdots, c_1, a_k, \cdots, a_1] \\ \tau_n &= \beta_{k+n} + \beta^\circ_{k+n-1} = \gamma_n + [0, c_{n-1}, \cdots, c_1, b_k, \cdots, b_1] \end{aligned}$$

とおく. Prop 25 から

$$L(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} \sigma_n, \qquad L(\beta) = \limsup_{n\to\infty} \tau_n$$

Prop 13 (1) から

$$|\sigma_n - \tau_n| = |[0, c_{n-1}, \cdots, c_1, a_k, \cdots, a_1] - [0, c_{n-1}, \cdots, c_1, b_k, \cdots, b_1]| \leq 2^{2-n}$$

いま $\{\sigma_n\}$ の部分列 $\{\sigma_{n_j}\}$ で $\sigma_{n_j} \to L(\alpha)$ $(j \to \infty)$ となるものをとる. このとき

$$\lim_{j\to\infty} |\sigma_{n_j} - \tau_{n_j}| = 0$$

だから $\tau_{n_j} \to L(\alpha)$ $(j \to \infty)$. よって $L(\alpha) \leq L(\beta)$. 同様に $L(\beta) \leq L(\alpha)$ が示せるので $L(\alpha) = L(\beta)$ である. □

系 28

$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}_\infty$ が $\boldsymbol{L(\alpha) < 3}$ を満たすならば

$$\boldsymbol{{}^\exists\beta = [b_0, b_1, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty} \quad \textit{s.t.} \quad \boldsymbol{\alpha \sim \beta} \ \text{かつ}\ \boldsymbol{b_n \in \{1, 2\}} \ \boldsymbol{({}^\forall n \geq 0)}$$

さらに, $\boldsymbol{\alpha \nsim [\bar{1}], [\bar{2}]}$ のときは, 数列 $\boldsymbol{\{b_n\}}$ は **1** と **2** の両方を無限個含む.

証明 $\alpha = [a_0, a_1, \cdots]$ とする. $a_{n+1} \geq 3$ ならば

$$\alpha_{n+1} + \alpha_n^\circ = [a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots] + [0, a_1, \cdots, a_n] > 3$$

このような n が無限にあれば, $L(\alpha) \geq 3$ となるので, 有限個の n を除いて $a_n \leq 2$ である. したがって, ある n_0 で $a_n \leq 2$ $(n \geq n_0)$ となり

$$\alpha \sim [a_{n_0}, a_{n_0+1}, \cdots]$$

□

例 $\alpha = [\overline{12}] = [1, 2, 1, 2, \cdots]$ とすると $L(\alpha) = \sqrt{12} > 3$ なので, 系 28 の逆は成り立たない.

$\mathbf{R}'_\infty = \{\alpha = [a_0, a_1, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty \ : \ \{a_n\}_n$ は有界数列 $\}$ とおく.

Def $\alpha \in \mathbf{R}_\infty$ に対し,

$$^\exists C > 0 \quad \text{s.t.} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^2} \qquad (^\forall p/q \in \mathbf{Q})$$

であるとき, α を難近似数 **(badly approximable number)** という.

Prop 29

α が難近似 $\Longleftrightarrow$ $\alpha \in \mathbf{R}'_\infty$

証明 ($\Longrightarrow$): $\alpha = [a_0, a_1, \cdots]$ とする. 仮定と Lemma 12(3) から

$$\frac{C}{q_n^2} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \qquad (n \geq 1) \qquad \text{よって} \quad a_{n+1} \leq 1/C$$

($\Longleftarrow$): $\alpha \in \mathbf{R}'_\infty$ として $M = \sup a_n + 2$ とおく. $p/q \in \mathbf{Q}$ に対し $q_{n-1} \leq q < q_n$ とする. Lemma 14(2) と Lemma 12(3) から

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} \geq \frac{1}{Mq_n^2}$$

ここで

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \leq a_n + 1 < M$$

から

$$\frac{1}{q_n} > \frac{1}{Mq_{n-1}} \geq \frac{1}{Mq} \quad \text{よって} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq_n^2} > \frac{1}{M^3q^2}$$

がすべての p/q で成り立つ. □

有名な未解決問題をいくつか述べる.

予想 (Markov の一意性予想)

$\alpha, \beta \in \mathrm{R}_\infty$ に対し, $L(\alpha) = L(\beta) < 3$ ならば $\alpha \sim \beta$ である.

この予想については, 文献 [1, §2.3] を参照.

予想 (McMullen の Arithmetic Chaos 予想)

$\ell \geq 1$ に対し

$$\mathrm{R}_\infty(2, \ell) = \left\{[0, \overline{a_1, \cdots, a_\ell}] \ : \ a_j \in \{1, 2\} \quad (j = 1, \cdots, \ell)\right\}$$

とおき, 実 2 次体 F に対し $g_F(\ell) = \sharp(F \cap \mathrm{R}_\infty(2, \ell))$ と定める. このとき, 任意の F で $g_F(\ell)$ は $\ell \to \infty$ のとき指数的に増大する.

この予想については, 次を参照.

A. Kontorovich, Applications of thin orbits, in ”Dynamics and Analytic Number Theory” Cambridge University Press 2016, pp 289 - 317.

Mahler の問題

A_1 を *Cantor* の *3* 進集合

$$A_1 = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \ : \ a_i \in \{0, 2\}\right\}$$

とする. このとき A_1 に含まれる代数的数は 0 と 1 に限る.

これは

K. Mahler, Some suggestions for further research, Bull. Australian Math. Soc., Vol. 29 (1984) 101 - 108.

に載っている問題の一つである. 最近の進展については

Y. Bugeaud, D. H. Kim, M. Laurent and A. Nogueira, On the Diophantine nature of the elements of Cantor sets arising in the dynamics of contracted rotations, preprint, arXiv 2001.00380v1.

9 Lagrange スペクトラムと Markov 数

3 変数方程式

$$\text{(M)} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1x_2x_3$$

を **Markov 方程式**という

Def (M) の整数解 $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{Z}^3$ で $u_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ であるものを **Markov トリプル**という. (M) は x_1, x_2, x_3 について対称的なので, (u_1, u_2, u_3) の並び順は任意でよい. Markov トリプルに現れる整数を **Markov 数**とよぶ. Markov 数の全体を $\mathcal{M}$ と表す.

例 $u_i < 50$ であるような Markov トリプルは

$$(1, 1, 1), \quad (1, 1, 2), \quad (1, 2, 5), \quad (1, 5, 13), \quad (2, 5, 29), \quad (1, 13, 34)$$

である. よって

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 5, 13, 29, 34, \cdots\}$$

となる. $(1, 1, 1), (1, 1, 2)$ 以外の Markov トリプルを**非特異 Markov トリプル**という.

Lemma 30

(u_1, u_2, u_3) が非特異 *Markov* トリプル ならば, u_1, u_2, u_3 は互いに異なる数である.

証明 たとえば $u_1 = u_2$ とする. このとき $u_1^2 \mid u_3^2$. $u_3 = cu_1$ とおける. (M) に代入すれば

$$c^2 + 2 = 3cu_1$$

より $c \mid 2$. よって $c = 1$ または $c = 2$. $c = 1$ のときは $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ となり, $c = 2$ のときは $u_1 = u_2 = 1, u_3 = 2$ となる. □

$u = (u_1, u_2, u_3)$ が Markov トリプルのとき,

$$u_2 = \max(u_1, u_2, u_3)$$

であるように並び順を決めておく. u_2, u_3 を (M) に代入すると, u_1 は

$$x^2 - 3u_2u_3x + (u_2^2 + u_3^2) = 0$$

の解であるが, もう一つの解は

$$3u_2u_3 - u_1$$

になる.

Lemma 31

$\boldsymbol{u = (u_1, u_2, u_3)}$ が *Markov* トリプルのとき

$$\boldsymbol{\ell(u) = (u_1, 3u_1u_2 - u_3, u_2) \qquad r(u) = (u_2, 3u_2u_3 - u_1, u_3)}$$

も *Markov* トリプルである.

証明 直接の計算で確認できる. □

これから u を起点として 2 分 tree ができる.

$$u$$

$$\ell(u) \qquad r(u)$$

$$\ell(\ell(u)) \; r(\ell(u)) \; \ell(r(u)) \; r(r(u))$$

$u = (1, 5, 2)$ から始めると

$$(1, 5, 2)$$

$$(1, 13, 5) \qquad (5, 29, 2)$$

$$(1, 34, 13) \; (13, 194, 5) \; (5, 433, 29) \; (29, 169, 2)$$

この tree を **Markov tree** とよび T_M と表す.

定理 32

任意の非特異 *Markov* トリプル $\boldsymbol{u}$ は, ちょうど *1* 回だけ $\mathbf{T}_M$ の中に現れる.

証明 $u = (u_1, u_2, u_3)$ とする. $u_2 > u_3 > u_1$ のときは $(u_1, u_3, 3u_1u_3 - u_2)$ が Markov トリプルになる. $u_2 > u_1 > u_3$ のときは $(3u_1u_3 - u_2, u_1, u_3)$ が Markov トリプルになる. どちらの場合も中央の値は, 最初の u_2 よりも小さい. これを繰り返していくと, 最後は $(1, 5, 2)$ または $(2, 5, 1)$ になる. u の一段上にある Markov トリプルは一意的に決まるので, 一意性が従う. □

系 33

任意の *Markov* トリプル $\boldsymbol{u = (u_1, u_2, u_3)}$ に対し, $\boldsymbol{\gcd(u_i, u_j) = 1}$ $(\forall \boldsymbol{i \neq j})$ である.

証明 $(1,1,1),(1,2,1),(1,5,2)$ では明らか．$d = \gcd(u_1, u_2)$ とすれば, (M) から $d \mid u_3$ である．このとき u の一段上にある Markov トリプルの数もすべて d で割り切れる．遡れば $d \mid 1$ となる． □

系 34

任意の *Markov* 数は, ある *Markov* トリプルの中央の値 (つまりトリプルの中で最大の値) になる.

証明 $1, 2 \in \mathcal{M}$ については明らか．$5 \le m \in \mathcal{M}$ とする．m は Markov トリプル $u = (u_1, u_2, u_3)$ に現れるとする. $m = u_2$ ならば, これでよい. $m = u_3 > u_1$ または $m = u_1 > u_3$ ならば, u の一段上は $(u_1, u_3, 3u_1u_3 - u_2)$ または $(3u_1u_3 - u_2, u_1, u_3)$ となるので, m はその中央になる. $m = \min(u_1, u_2, u_3)$ ならば, u の一段上の u' で, m は最小または中間の値をもつ. 中間の値を持つ場合は, もう一段上の Markov トリプルで最大値になるので, それでよい. 遡っても最小値が続く場合は $m = 1$ または $m = 2$ に限る. $m \ge 5$ なのでこの場合はない. □

Lemma 35

$\boldsymbol{u = (u_1, u_2, u_3)}$ を非特異 *Markov* トリプルとする. このとき

$$\mathbf{0} < {}^{\exists}a \le \frac{u_2}{\mathbf{2}} \quad s.t. \quad u_1 a \equiv \pm u_3 \mod u_2 \text{ かつ } a^2 \equiv -1 \mod u_2$$

が存在し, この a は一意的である. ($a = a_u$ を u の特性数という.)

証明 $u_2 \ge 5$ である. 系 33 から $\gcd(u_1, u_3) = 1$ だから, 方程式

$$u_1 x \equiv u_3 \mod u_2, \qquad u_1 y \equiv -u_3 \mod u_2$$

はそれぞれ $0 < x, y < u_2$ の範囲でただ一つの解 x_0, y_0 をもつ. また

$$u_1 x \equiv u_3 \mod u_2 \iff u_1(u_2 - x) \equiv -u_3 \mod u_2$$

から, $x_0 \ne y_0$ かつ $x_0 + y_0 = u_2$ となる. したがって $a = \min(x_0, y_0)$ とすれば $0 < a \le u_2/2$. この a について, (M) から

$$(u_1 a)^2 \equiv u_3^2 \equiv -u_1^2 \mod u_2$$

で $\gcd(u_1, u_2) = 1$ から

$$a^2 = -1 \mod u_2$$

となる. □

Markov トリプル u に対し

$$\gamma_u = \frac{u_2 + 2a_u + \sqrt{9u_2^2 - 4}}{2u_2}$$

とおく. ただし $u = (1,1,1)$ のとき $a_u = 0$, $u = (1,2,1)$ のとき $a_u = 1$ とする.

定理 36 (Markov)

3 より小さい *Lagrange* 数すべての集合を

$$\boldsymbol{\mathcal{L}_{<3} = \{L(\alpha)\ :\ \alpha \in \mathrm{R}_\infty,\ \ L(\alpha) < 3\}}$$

と表す. $\boldsymbol{\mathcal{M} = \{1, 2, 5, 13, 29, \cdots\}}$ を *Markov* 数の集合とすると

$$\boldsymbol{\mathcal{L}_{<3} = \left\{\frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m}\ :\ m \in \mathcal{M}\right\}}$$

が成り立つ. さらに, $\boldsymbol{m = u_2}$ となる *Markov* トリプル $\boldsymbol{u}$ に対し

$$\boldsymbol{L(\gamma_u) = \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m}}$$

である. $\boldsymbol{u \neq u'}$ ならば $\boldsymbol{\gamma_u \nsim \gamma_{u'}}$ である. また $\boldsymbol{L(\alpha) < 3}$ ならば, $\boldsymbol{\alpha \sim \gamma_u}$ となる $\boldsymbol{u}$ が唯一つある.

この定理の証明は簡単ではない. Bombieri による証明ではワードの概念を必要とする. たとえば [1, Part V] を参照.

注

(1) $L(\alpha) = L(\beta) < 3$ のとき, 定理から $\alpha \sim \gamma_u$, $\beta \sim \gamma_{u'}$ となる u, u' が一意に決まる. このとき $u_2 = u_2'$ であるが, $u = u'$ が成り立つかはわからないので, Markov の予想は示されない.

(2) $(\sqrt{9m^2 - 4})/m \to 3$ $(m \to \infty)$ なので, 3 は $\mathcal{L}$ の集積点である.

(3) $k_1 < k_2 < \cdots$ を自然数の増加列として, $(1)^{k_i}$ を k_i 個の 1 を並べた列とする.

$$\alpha = [(1)^{k_1}, 2, 2, (1)^{k_2}, 2, 2, (1)^{k_3}, \cdots]$$

とすれば, $L(\alpha) = 3$ である. したがって, Lagrange 数が 3 に等しく互いに同値でない無理数は無限にある.

(4) 次の値は Freiman 数とよばれる.

$$c_F = \frac{2221564096 + 283748\sqrt{462}}{491993569} = 4.5278\cdots$$

$[c_F, +\infty) \subset \mathcal{L}$ かつ任意の $c' < c_F$ で $(c', +\infty) \not\subset \mathcal{L}$ が成り立つ (Freiman 1975).

(5) $[3, c_F) \cap \mathcal{L}$ については複雑で, 一般に Markov 数との対応はない.

10　ワード

Def　A を有限集合とする. A をアルファベットとよび, A の要素を文字とよぶ. A の要素の (有限または無限) 列を A 上の**語** または **ワード**という. A 上のワードは $x = (x_i) = x_1x_2\cdots$ などと表す. x の列の長さを x の長さといい, $|x|$ と表す. $|x| < \infty$ のとき有限ワード, $|x| = \infty$ のとき無限ワードという. また, 形式的に長さ 0 の語 ϵ を考え, これを**空語**という.

Def　$x = x_1x_2\cdots$ を A 上のワードとするとき, x の番号が連続する (有限または無限) 部分列 $x_ix_{i+1}\cdots$ を x の**因子 (factor)** という. $u = x_1x_2\cdots x_n$, $v = x_{n+1}x_{n+2}\cdots$ とすると, x は u と v の連結 $x = uv$ に書ける. このような u を x の **prefix** とよび, v を x の **suffix** とよぶ.

Def　x を A 上の無限ワードとする. x の prefix u と長さ有限の因子 v により

$$x = uvvv\cdots = uv^{\infty}$$

となるとき, x を**周期的**といい, さらに $u = \epsilon$ であるとき x を**純周期的**という.

例　自然数 $b \geq 2$ を固定する. $0 < \alpha < 1$ とするとき, α の b 進展開が

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k} \qquad (x_k \in \{0, 1, \cdots, b-1\})$$

と一意に書ける. このとき, 列 $x = (x_i)$ は $\{0, 1, \cdots, b-1\}$ 上のワードを与える.

$$x \text{ が有限ワードまたは周期的} \iff \alpha \in \mathbf{Q}$$

である.

Def　A 上の有限または無限ワード x に対して, x の長さ有限の因子すべての集合を $F(x)$ とおき, x の長さが n の因子すべての集合を $F_n(x)$ とおく. すなわち

$$F(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n(x), \quad F_n(x) = \{x_kx_{k+1}\cdots x_{k+n-1} \mid k \geq 1\}$$

$F_n(x)$ は有限集合であり, その要素の個数を

$$p(n, x) = \sharp F_n(x)$$

とおく. これを **subword complexity 関数** という.

注　$F_1(x) = \{x_i \ : \ i \geq 1\}$ だから $f(1, x)$ は x に現れる異なる文字の個数である. また, x が無限ワードならばすべての n で $p(n, x) \leq p(n+1, x)$ が成り立つ.

Prop 37

x を無限ワードとするとき, 次は互いに同値である.

(P1) x は周期的である.

(P2) 数列 $\{p(n,x)\}_{n\geq 1}$ は有界である.

(P3) $^{\exists}n \geq 1$ *s.t.* $p(n,x) \leq n$

(P4) $^{\exists}n \geq 1$ *s.t.* $p(n,x) = p(n+1,x)$

証明 (P1) $\Longrightarrow$ (P2) : $x = uv^{\infty}$ で $u = x_1 \cdots x_k, v = y_1 \cdots y_\ell$ とする.

$$x = x_1 \cdots x_k y_1 \cdots y_\ell y_1 \cdots y_\ell \cdots$$

だから, $n \geq k+\ell$ のとき先頭から長さ n の因子を順番にとっていくと, $k+\ell+1$ 番目以降は前と同じ因子が現れる. よって $p(n,x) \leq k+\ell$ である.

(P2) $\Longrightarrow$ (P3) は明らかである.

(P3) $\Longrightarrow$ (P4) : すべての i で $p(i,x) < p(i+1,x)$ が成り立つとすると

$$p(n,x) \geq 1 + p(n-1,x) \geq \cdots \geq n + p(0,x) = n+1$$

となるので (P2) に矛盾する.

(P4) $\Longrightarrow$ (P1) : $p(n,x) = p(n+1,x)$ とする. 各 $u \in F_n(x)$ に対し, 長さ $n+1$ の語の集合

$$\{ua \ : \ a \in A\}$$

の元で $F_{n+1}(x)$ に含まれるものはただ一つである. (ある u でそうでなければ $p(n+1,x) > p(n,x)$ となる.) よって各 u の直後にくる文字は一意に決まる. u として x の中で間隔を空けて 2 回現れる因子をとる. すなわち

$$x = x_1 \cdots x_m uvu \cdots, \qquad uvu = u_1 \cdots u_n v_1 v_2 \cdots v_k u_1 \cdots u_n$$

とする. v_1 は u の直後にくる文字であるから一意に決まる. v_2 は $u_2 \cdots u_n v_1$ の直後にくる文字なのでこれも一意に決まる. 以下同様で, したがって uvu の続きは $uvuv\cdots$ となり周期的になる. □

系 38

無限ワード x が周期的でない $\Longleftrightarrow$ $p(n,x) \geq n+1 \quad (^{\forall}n \geq 1)$

Def A 上の無限ワード x が $p(n,x) = n+1$ $(\forall n \geq 1)$ を満たすとき, x を **Sturm** 語 という.

11 Sturm 語の性質

x が Sturm 語ならば, $p(1,x)=2$ なので, x に現れる文字はちょうど 2 文字である. 文字の種類は関係しないので, 以下では $A=\{0,1\}$ として, $\{0,1\}$ 上のワードを考える.

Def u を $\{0,1\}$ 上の有限ワードとするとき,

$$h(u) = u \text{ に現れる文字 } 1 \text{ の個数}$$

とおき, $h(u)$ を u の高さという. x を $\{0,1\}$ 上の無限ワードとするとき, 各 $n \geq 0$ に対し

$$h_n(x) = h(x_1x_2\cdots x_n) \quad (n \geq 1), \qquad h_0(x) = 0$$

とおく. 定義から $x_n = h_n(x) - h_{n-1}(x)$ である.

Def $\{0,1\}$ 上の有限ワードの集合 E について,

$$u, v \in E,\ |u| = |v| \implies |h(u) - h(v)| \leq 1$$

が成り立つとき, E を **安定 (balanced)** であるという. $\{0,1\}$ 上の無限ワード x に対し, $F(x)$ が安定であるとき, x を **安定ワード** という.

Prop 39

E を $\{0,1\}$ 上の有限ワードの集合で

$$u \in E \implies F(u) \subset E$$

を満たすとする. E が安定ならば, すべての $n \geq 1$ で

$$\sharp E_n \leq n+1 \qquad \text{ただし} \quad E_n = \{\, u \in E \ :\ |u| = n \}$$

が成り立つ. とくに x が安定ワードならば, すべての $n \geq 1$ で $p(n,x) \leq n+1$ である.

証明 $p_n = \sharp E_n$ とおく. $n=1$ では明らか. $n=2$ のとき, 因子となりうるのは 00, 01, 10, 11 であるが, 安定性から 00 と 11 が同時に E の元となることはない. よって $p_2 \leq 3$ である. 背理法で

$$^\exists n \geq 3 \quad \text{s.t.} \quad p_{n-1} \leq n \ \text{ かつ } \ p_n \geq n+2$$

と仮定する. このとき鳩ノ巣原理から

$$^\exists u, v \in E_{n-1} \ \ u \neq v \quad \text{s.t.} \quad 0u, 1u, 0v, 1v \in E_n$$

である. $u \neq v$ だから,

$$^\exists w \quad \text{s.t.} \quad w0, w1 \text{ は } u, v \text{ の prefix}$$

である. ここで $w=\epsilon$ でもよい. E の仮定より $w0, w1 \in E$. したがって $0w0, 1w1 \in E$ で $h(0w0)-h(1w1)| = 2$ なので安定性に矛盾する. □

Def A 上の有限ワード $x = x_1 \cdots x_n$ に対し, $x^* = x_n x_{n-1} \cdots x_1$ を x の逆という. $x = x^*$ が成り立つとき x を回文という.

Prop 40

$\{0,1\}$ 上の無限ワード x に対し

$$\boldsymbol{x} \text{ が非安定である} \iff {}^{\exists}\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{F(x)} \quad s.t. \quad \boldsymbol{0w0, 1w1} \in \boldsymbol{F(x)} \text{ かつ } \boldsymbol{w = w^*}$$

証明 $\Longleftarrow$ は明らかである. $\Longrightarrow$ を示す. x が安定でなければ

$$\text{(UB)} \quad {}^{\exists}n \geq 2, \ {}^{\exists}u, v \in F_n(x) \quad \text{s.t.} \quad u \neq v \ \text{ かつ } \ |h(u) - h(v)| \geq 2$$

が成り立つ. n を最小にとる. このとき u, v の先頭の文字が同じならば, それを取り除いて $n-1$ で (UB) が成り立つので最小性に矛盾する. よって u, v の先頭文字は異なる. 同様に最後の文字も異なる. よって

$$u = 0wau', \qquad v = 1wbv', \qquad \{a, b\} = \{0, 1\}, \quad u' \neq v'$$

と書ける. ($w = \epsilon$ でもよい.) ここで $a = 1, b = 0$ ならば

$$2 \leq |h(u) - h(v)| = |h(u') - h(v')|$$

となり n の最小性に反する. よって $a = 0, b = 1$ となり, $u = 0w0, v = 1w1$ が成り立つ. この w で $w \neq w^*$ と仮定する. このとき $w \neq \epsilon$ は

$$w = zc \cdots dz^* \qquad z \neq w \text{ は } w \text{ の prefix で } \{c, d\} = \{0, 1\}$$

と書ける. ($z = \epsilon$ でもよい.) ここで

$$cwc = czc \cdots dz^*c \in F(x) \quad \text{かつ} \quad dwd = dzc \cdots dz^*d \in F(x)$$

だから, $czc, dz^*d \in F(x)$ となり,

$$|h(czc) - h(dz^*d)| = 2$$

となるので n の最小性に矛盾する. よって $w = w^*$ でなければならない. □

Prop 41

$\boldsymbol{x}$ を $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ 上の *Sturm* 語とする.
(1) $\boldsymbol{{}^{\forall} n \geq 0 \quad {}^{\exists 1} u \in F_n(x)}$ *s.t.* $\boldsymbol{u0, u1 \in F_{n+1}(x)}$ が成り立つ.
この $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{x}$ の *RSF (= right special factor)* とよび $\boldsymbol{u = \mathrm{r}_n(x)}$ と表す.
(2) $\boldsymbol{{}^{\forall} n \geq 0}$ で $\boldsymbol{\mathrm{r}_n(x)}$ は $\boldsymbol{\mathrm{r}_{n+1}(x)}$ の *suffix* である.

証明 Sturm 語の定義から

$$p(n+1, x) = p(n, x) + 1$$

である. (1) はこれから従う.

(2) $\mathrm{r}_{n+1}(x)$ の長さ n の suffix を u として, $\mathrm{r}_{n+1}(x) = au$ とおく. このとき $au0, au1 \in F_{n+2}(x)$ だから $u0, u1 \in F_{n+1}(x)$. よって $u = \mathrm{r}_n(x)$ である. □

定理 42

$\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ 上の無限ワード $\boldsymbol{x}$ に対し

$$\boldsymbol{x} \text{ が } \textit{Sturm} \text{ 語} \iff \boldsymbol{x} \text{ は非周期的かつ安定である}$$

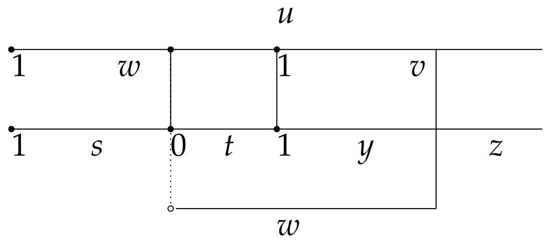
証明 $\Longleftarrow$ は系 38 と Prop 39 から従う. $\Longrightarrow$ を示す. 系 38 から x は非周期的である. x が安定でないと仮定すると. Prop 40 から

$${}^{\exists} w \in F(x) \quad \text{s.t.} \quad 0w0, 1w1 \in F(x) \text{ かつ } w = w^*$$

$|w| = n$ とする. $w0, w1 \in F_{n+1}(x)$ だから, $w = \mathrm{r}_n(x)$ である. Prop 41 (2) から $\mathrm{r}_{n+1}(x) = aw$ となる. 以下では $a = 0$ として証明する. ($a = 1$ でも証明は同様.) RSF は一意的だから $1w$ は RSF ではない. よって $1w1 \in F(x)$ から $1w0 \notin F(x)$ である. そこで

$$v \in F_n(x) \quad \text{s.t.} \quad u = 1w1v \in F_{2n+2}(x)$$

となる v をとる. このとき $0w$ は u の因子ではない. もし因子と仮定すると, $0w$ は u の因子 w の列の中のある 0 が起点になる. そこで $w = s0t$ とすると, $w = t1y, v = yz$ と表せる. $w = w^*$ なので $s0t = y^*1t^*$, よって $0 = 1$ となり矛盾である.



$$u = 1w1v = 1\underbrace{s0t}_{w}1\underbrace{yz}_{v} = 1s0\underbrace{t1y}_{w}z$$

u において長さが $n+1$ の因子を左側から順に $n+2$ 個とる. それらは

$$1w, \quad w1, \cdots, 1v \in F_{n+1}(x)$$

となるが, $0w \in F_{n+1}(X)$ はここには現れないので, $p(n+1, x) - 1 = n+1$ より, この中のふたつは等しくなる. この二つの因子は RSF(つまり $0w$) ではないので, その後に続く 1 文字は同じである. これを続けて行くと x は周期的になる. □

系 43

***x* を *Sturm* 語とする.**
(1) x の任意の *suffix* $y \neq \epsilon$ も *Sturm* 語であり, すべての $n \geq 0$ で $F_n(x) = F_n(y)$ となる.
(2) 各 $n \geq 0$ で $F_n(x)^* = \{u^* \ : \ u \in F_n(x)\}$ とおけば, $F_n(x)^* = F_n(x)$ である.

証明 (1) $F_n(y) \subset F_n(x)$ から x が安定ならば y も安定である. 定理 42 から y も Sturm 語になり, $F_n(y) = F_n(x)$ が成り立つ.
(2) $E = F(x) \cup F(x)^*$ とおけば, E は Prop 39 の仮定を満たす. よって

$$\sharp E_n = \sharp(F_n(x) \cup F_n(x)^*) \leq n+1$$

$\sharp F_n(x) = \sharp F_n(x)^* = n+1$ だから, $F_n(x) = F_n(x)^*$ となる. □

12　安定無限ワードの傾き

Def　u を $\{0,1\}$ 上の有限ワードで $u \neq \epsilon$ とするとき

$$\sigma(u) = \frac{h(u)}{|u|}$$

とおく.

Prop 44

$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{\{0,1\}}$ 上の安定無限ワードとする. このとき任意の $\boldsymbol{u, v \in F(x), u \neq \epsilon, v \neq \epsilon}$ について

$$\boldsymbol{|\sigma(u) - \sigma(v)| < \frac{1}{|u|} + \frac{1}{|v|}}$$

が成り立つ.

証明　$|u| = |v|$ のとき, 安定性から

$$|h(u) - h(v)| \leq 1$$

よって

$$|\sigma(u) - \sigma(v)| = \left|\frac{h(u) - h(v)}{|u|}\right| \leq \frac{1}{|u|} < \frac{1}{|u|} + \frac{1}{|v|}$$

$|u| > |v|$ と仮定する. $|u| + |v|$ の帰納法で示す. $u = yz,\ |y| = |v|$ とおく. $|z| + |v| < |u| + |v|$ だから, 帰納法の仮定により

$$|\sigma(z) - \sigma(v)| < \frac{1}{|z|} + \frac{1}{|v|}$$

が成り立つ. 前半から

$$|\sigma(y) - \sigma(v)| \leq \frac{1}{|y|}$$

である.

$$\sigma(u) = \sigma(yz) = \frac{h(yz)}{|u|} = \frac{h(y) + h(z)}{|u|} = \frac{|y|}{|u|}\sigma(y) + \frac{|z|}{|u|}\sigma(z)$$

より

$$\sigma(u) - \sigma(v) = \frac{|y|}{|u|}\sigma(y) + \frac{|z|}{|u|}\sigma(z) - \frac{|y| + |z|}{|u|}\sigma(v) = \frac{|y|}{|u|}(\sigma(y) - \sigma(v)) + \frac{|z|}{|u|}(\sigma(z) - \sigma(v))$$

よって

$$|\sigma(u) - \sigma(v)| < \frac{1}{|u|} + \frac{|z|}{|u|}\left(\frac{1}{|z|} + \frac{1}{|v|}\right) = \frac{2}{|u|} + \frac{|u| - |v|}{|u||v|} = \frac{1}{|u|} + \frac{1}{|v|}$$

である. □

Prop 45

x を $\{0,1\}$ 上の安定無限ワードとする.

(1) 極限 $\sigma(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{h_n(x)}{n}$ が存在する.

(2) $\epsilon \neq {}^\forall u \in F(x)$ に対し

$$-\frac{1}{|u|} \leq \sigma(u) - \sigma(x) \leq \frac{1}{|u|}$$

が成り立つ. さらに, 等号が成り立つようなすべての因子で, 同じ側の等号が成り立つ.

証明 (1) $x = x_1x_2\cdots$ として, 各 $n \geq 1$ で $s_n = x_1\cdots x_n$ とすれば,

$$\sigma(s_n) = \frac{h_n(x)}{n}$$

である. Prop 44 より

$$|\sigma(s_m) - \sigma(s_n)| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

なので, 数列 $\{\sigma(s_n)\}$ は Cauchy 列になる. よって, 極限

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(s_n)$$

が存在する.

(2) $\epsilon \neq u \in F(x)$ とすると, Prop 44 から

$$|\sigma(u) - \sigma(s_n)| < \frac{1}{|u|} + \frac{1}{n}$$

なので, $n \to \infty$ とすればよい. もし $u, v \in F(x)$ で

$$-\frac{1}{|u|} = \sigma(u) - \sigma(x) \quad \text{かつ} \quad \sigma(v) - \sigma(x) = \frac{1}{|v|}$$

となったと仮定すると

$$\sigma(v) - \sigma(u) = \frac{1}{|v|} + \frac{1}{|u|}$$

となり, Prop 44 に矛盾する. □

Def $\sigma(x)$ を x の傾きという. $0 \leq \sigma(x) \leq 1$ である.

Prop 46

x を $\{0,1\}$ 上の安定無限ワードとするとき

$$\sigma(x) \text{ が有理数} \iff x \text{ は周期的}$$

証明 $\Longleftarrow$ $x = uv^\infty$ とすると

$$\sigma(x) = \lim_{k\to\infty} \sigma(uv^k) = \lim_{k\to\infty} \frac{h(u) + kh(v)}{|u| + k|v|} = \frac{h(v)}{|v|} \in \mathbf{Q}$$

$\Longrightarrow$ $\sigma(x) = p/q \in \mathbf{Q}$ とする. Prop 45 から, $\epsilon \neq {}^\forall u \in F(x)$ に対し

$$-\frac{1}{|u|} \leq \sigma(u) - \frac{p}{q} \leq \frac{1}{|u|}$$

右側の等号を含むと仮定する. (左側の等号を仮定しても同様に証明できる.) よって

$$\text{(12.1)} \qquad \frac{p}{q}|u| - 1 < h(u) \leq \frac{p}{q}|u| + 1$$

とくに

$$|u| = q \implies h(u) = p, p+1$$

である. このとき

$$\text{(12.2)} \qquad {}^\exists y \;\; x \text{ の suffix} \quad \text{s.t.} \quad h(u) = p \;\; {}^\forall u \in F_q(y)$$

が成り立つ. これが成り立たないと仮定すると,

$${}^\forall y \;\; x \text{ の suffix} \quad {}^\exists u \in F_q(y) \quad \text{s.t.} \quad h(u) = p + 1$$

である. $u \in F_q(x)$, $h(u) = p + 1$ として, $x = x_1 \cdots u \cdots y$ で y を suffix とする. $v \in F_q(y)$ で $h(v) = p + 1$ がとれる. このとき $x = x_1 \cdots usv \cdots$, $(s \neq \epsilon)$ となるので, $usv \in F(x)$ である. しかし (12.1) から

$$2(p+1) + h(s) = h(usv) \leq \frac{p}{q}|usv| + 1 = 2p + \frac{p}{q}|s| + 1$$

よって

$$h(s) \leq \frac{p}{q}|s| - 1$$

となり (12.1) に矛盾する. (12.2) を満たす suffix y をとる. $azb \in F_{q+1}(y)$, $(a, b \in \{0, 1\})$ をとれば, $h(az) = h(zb) = p + 1$ だから $a = b$ である. $z = z_1 \cdots z_{q-1}$ として, $y = \cdots az_1 \cdots z_{q-1} a y_k y_{k+1} \cdots$ と表せば, $z_1 \cdots z_{q-1} a y_k$ で同様に $y_k = z_1$ が成り立つ. したがって $y = \cdots (za)^\infty$ となるので, x は周期的になる. □

13 Sturm 語の構成

実数 c は, 整数 $n \in \mathbf{Z}$ と実数 $\theta \in [0,1)$ により

$$c = n + \theta$$

と一意に書ける. このとき

$$\lfloor c \rfloor = n, \qquad \lceil c \rceil = \begin{cases} n+1 & (\theta \neq 0) \\ n & (\theta = 0) \end{cases}, \qquad \{c\} = \theta$$

と定義する. 任意の c_1, c_2 について

$$\lfloor c_1 + c_2 \rfloor = \lfloor c_1 \rfloor + \lfloor c_2 \rfloor + \lfloor \{c_1\} + \{c_2\} \rfloor$$
$$c_1 - 1 < \lfloor c_1 + c_2 \rfloor - \lfloor c_2 \rfloor = \lfloor c_1 \rfloor + \lfloor \{c_1\} + \{c_2\} \rfloor < c_1 + 1$$

である.

Def $0 \leq \alpha < 1$ と $\rho \in \mathbf{R}$ が与えられたとき

$$s_{\alpha,\rho}(n) = \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor \qquad (n \geq 1)$$
$$S_{\alpha,\rho}(n) = \lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil \qquad (n \geq 1)$$

として, $\{0,1\}$ 上の無限ワード $s_{\alpha,\rho} = (s_{\alpha,\rho}(n))_{n\geq 1}$, $S_{\alpha,\rho} = (S_{\alpha,\rho}(n))_{n\geq 1}$ をそれぞれ傾き α, 切片 ρ の **lower mechanical word**, **upper mechanical word** という. 両方を合わせて **mechanical word** という.

注　定義から, 任意の整数 m について $s_{\alpha,\rho+m} = s_{\alpha,\rho}$, $S_{\alpha,\rho+m} = S_{\alpha,\rho}$ が成り立つ. よって切片 ρ は modulo 1 で考えればよい.

Prop 47

傾きが無理数の *mechanical word* は *Sturm* 語である.

証明　$\alpha \in \mathbf{R}_\infty$ として $x = s_{\alpha,\rho}$ で示す. ($S_{\alpha,\rho}$ でも同様に示せる.) 長さ n の因子は

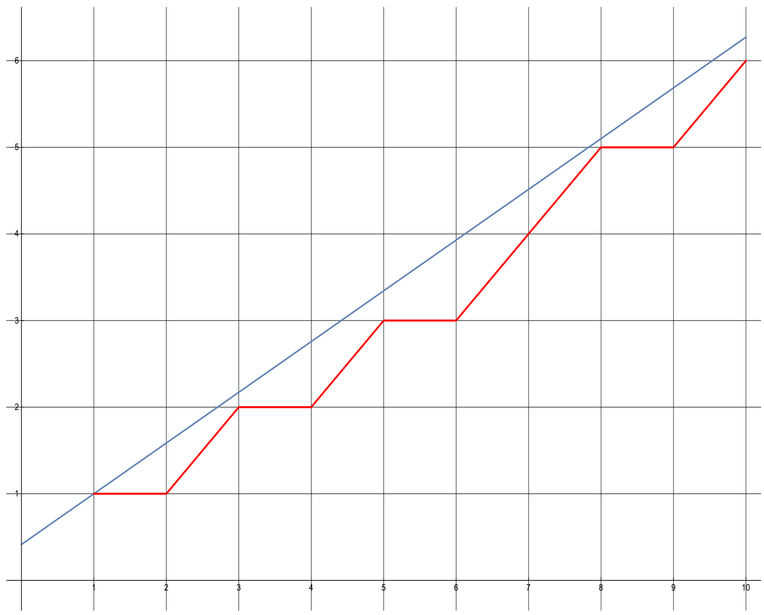
$$u = s_{\alpha,\rho}(k+1) \cdots s_{\alpha,\rho}(k+n)$$

と書けるから

$$h(u) = \sum_{i=1}^{n} s_{\alpha,\rho}(k+i) = \lfloor \alpha(k+n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha(k+1) + \rho \rfloor$$

よって
$$\alpha n - 1 < h(u) < \alpha n + 1$$
これから ${}^{\forall}u, v \in F_n(x)$ で
$$|h(u) - h(v)| < (\alpha n + 1) - (\alpha n - 1) = 2$$
が成り立つので, x は安定である. また,
$$\alpha - \frac{1}{n} < \frac{h_n(x)}{n} < \alpha + \frac{1}{n}$$
となるから, $\sigma(x) = \alpha$ である. 仮定より $\alpha \in \mathbf{R}_\infty$ だから, Prop 46 より x は非周期的になる. 定理 42 から x は Sturm 語になる. □

例　$\alpha = 2 - \sqrt{2},\ \rho = \sqrt{2} - 1$ とすると
$$s_{\alpha,\rho} = 0101011010\cdots, \qquad S_{\alpha,\rho} = 1101011010\cdots$$
となる. 各 $n = 1, 2, \cdots$ で, 直線 $y = \alpha x + \rho$ の下側にあり直線に最も近い格子点を (n, y_n) とするとき, $s_{\alpha,\rho}(n) = y_{n+1} - y_n$ である. 格子点を結ぶ折れ線グラフを描くと下の図のようになる. 直線 $y = \alpha x + \rho$ の上側にある格子点で同様に考えれば, $S_{\alpha,\rho}$ が得られる.



Lemma 48

$\boldsymbol{x}$ を $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ 上の *Sturm* 語として, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ とおく.
(1) $\ {}^{\forall}\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}$ について

$$h_n(x) \le \lfloor \alpha(n+1)+\gamma \rfloor \ ({}^{\forall}n \ge 1) \quad \text{または} \quad h_n(x) \ge \lfloor \alpha(n+1)+\gamma \rfloor \ ({}^{\forall}n \ge 1)$$

が成り立つ.
(2) $\rho = \inf\{\, \gamma \ge -\alpha \mid h_n(x) \le \lfloor \alpha(n+1)+\gamma \rfloor \ ({}^{\forall}n \ge 1)\}$ とすれば

$$h_n(x) \le \alpha(n+1)+\rho \le h_n(x)+1 \qquad ({}^{\forall}n \ge 1)$$

である.

証明 (1) 背理法で示す.

$${}^{\exists}\gamma \in \mathbf{R},\ {}^{\exists}n_1, n_2 \ge 1 \quad \text{s.t.} \quad h_{n_1}(x) > \lfloor \alpha(n_1+1)+\gamma \rfloor \quad \text{かつ} \quad h_{n_2}(x) < \lfloor \alpha(n_2+1)+\gamma \rfloor$$

と仮定する.
$n_1 > n_2$ のとき. $n_1 = n_2 + k$ として, $u = x_{n_2+1} \cdots x_{n_2+k} \in F_k(x)$ すれば

$$h(u) = h_{n_1}(x) - h_{n_2}(x) \ge (\lfloor \alpha(n_2+k+1)+\gamma \rfloor + 1) - (\lfloor \alpha(n_2+1)+\gamma \rfloor - 1) > \alpha k + 1$$

よって

$$\sigma(u) - \alpha > \frac{1}{|u|}$$

となるので, Prop 45 (2) に矛盾する.
$n_1 < n_2$ の場合も同様である.
(2) $h_n(x) \le \alpha(n+1)+\rho$ は明らかだから, $\alpha(n+1)+\rho \le h_n(x)+1$ を示せばよい. ある m で

$$\alpha(m+1)+\rho > h_m(x)+1$$

と仮定する. $\gamma = h_m(x)+1-\alpha(m+1) < \rho$ であり, Prop 45 (2) から $-\alpha \le \gamma$ で

$$h_m(x) < h_m(x)+1 = \alpha(m+1)+\gamma \quad \text{つまり} \quad h_m(x) < \lfloor \alpha(m+1)+\gamma \rfloor$$

このとき (1) から, すべての n で

$$h_n(x) \le \lfloor \alpha(n+1)+\gamma \rfloor$$

でなければならないから, これは ρ が下限であることに反する. □

定理 49

$\boldsymbol{x}$ を $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ 上の *Sturm* 語とする.

$$\boldsymbol{\alpha = \sigma(x), \qquad \rho = \inf\{\ \gamma \geq -\alpha \mid h_n(x) \leq \lfloor \alpha(n+1)+\gamma \rfloor\ \ ({}^{\forall} n \geq 1)\}}$$

とすれば, $\boldsymbol{\alpha \in \mathbf{R}_\infty}$, $\boldsymbol{0 < \alpha < 1}$, $\boldsymbol{-\alpha \leq \rho \leq 1-\alpha}$ で $\boldsymbol{x = s_{\alpha,\rho}}$ または $\boldsymbol{x = S_{\alpha,\rho}}$ となる.

証明 Prop 46 から, $\alpha \in \mathbf{R}_\infty$ で $0 < \alpha < 1$ である. Prop 45 (2) から $\rho \leq 1-\alpha$ となる. $h_n = h_n(x)$ とおけば

$$x_n = h_n - h_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

Lemma 48 (2) ら

$$h_n \leq \alpha(n+1)+\rho \leq h_n + 1 \qquad ({}^{\forall} n \geq 1)$$

$\{\alpha(n+1)+\rho\}_{n\geq 1} \cap \mathbf{Z} \neq \emptyset$ のとき: $\alpha(n_0+1)+\rho \in \mathbf{Z}$ とする. $\alpha \in \mathbf{R}_\infty$ なので, このような n_0 は唯一つしかない. よって

$$n \neq n_0 \implies h_n < \alpha(n+1)+\rho < h_n + 1$$

$\alpha(n_0+1)+\rho = h_{n_0}$ ならば

$$x_n = h_n - h_{n-1} = \lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor = s_{\alpha,\rho}(n) \qquad ({}^{\forall} n \geq 1)$$

$\alpha(n_0+1)+\rho = h_{n_0}+1$ ならば

$$x_n = (h_n+1)-(h_{n-1}+1) = \lceil \alpha(n+1)+\rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil = S_{\alpha,\rho}(n) \qquad ({}^{\forall} n \geq 1)$$

である.

$\{\alpha(n+1)+\rho\}_{n\geq 1} \cap \mathbf{Z} = \emptyset$ のとき:

$$h_n < \alpha(n+1)+\rho < h_n + 1 \qquad ({}^{\forall} n \geq 1)$$

$$h_n = \lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor \quad ({}^{\forall} n \geq 1) \quad \text{よって} \quad x = s_{\alpha,\rho}$$

□

定理 50

$\boldsymbol{x, y}$ を $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ 上の *Sturm* 語とする.

$$\boldsymbol{\sigma(x) = \sigma(y) \iff F(x) = F(y)}$$

証明 $\Longrightarrow$ $E = F(x) \cup F(y)$ とおく. E が Prop 39 の仮定を満たすことを示す.

$$u \in E \implies F(u) \subset E$$

は明らかである. $u, v \in E_n = F_n(x) \cup F_n(y)$ とすると, $\alpha = \sigma(x) = \sigma(y)$ は無理数なので, Prop 45 (2) は

$$|\sigma(u) - \alpha| < \frac{1}{n} \qquad |\sigma(v) - \alpha| < \frac{1}{n}$$

となる. よって

$$|\sigma(u) - \sigma(v)| \leq |\sigma(u) - \alpha| + |\sigma(v) - \alpha| < \frac{2}{n}$$

つまり

$$|h(u) - h(v)| < 2$$

となるので, E は安定である. したがって, Prop 39 から $\sharp E_n \leq n+1$. $\sharp F_n(x) = \sharp F_n(y) = n+1$ だから, $F_n(x) = F_n(y)$ が成り立つ.

$\Longleftarrow$ 各 n に対し $u^{(n)} \in F_n(x) = F_n(y)$ とすれば, Prop 45 (2) から

$$\left|\sigma(x) - \sigma(y)\right| \leq \left|\sigma(x) - \sigma(u^{(n)})\right| + \left|\sigma(u^{(n)}) - \sigma(y)\right| \leq \frac{2}{n}$$

が成り立つ. よって $\sigma(x) = \sigma(y)$ である. $\square$

14 Characteristic word

$\alpha \in \mathbf{R}_\infty$, $0 < \alpha < 1$ とする. すべての $n \geq 1$ で

$$\lfloor \alpha n \rfloor + 1 = \lceil \alpha n \rceil$$

が成り立つから, $s_{\alpha,0} = S_{\alpha,0}$ である.

Def $c_\alpha = s_{\alpha,0} = S_{\alpha,0}$ を **characteristic word** という.

Prop 51

x を **{0, 1}** 上の *Sturm* 語とする.
(1) 少なくとも **0*x*, 1*x*** の一つは *Sturm* 語である.
(2) **0*x*** と **1*x*** の両方が *Sturm* 語である $\iff$ ***x*** は *characteristic word* である.

証明 (1) $x = s_{\alpha,\rho}$ とする. すべての $n \geq 1$ で

$$s_{\alpha,\rho-\alpha}(n+1) = \lfloor \alpha(n+2) + \rho - \alpha \rfloor - \lfloor \alpha(n+1) + \rho - \alpha \rfloor = s_{\alpha,\rho}(n)$$

だから $s_{\alpha,\rho-\alpha} = ax$, $a \in \{0, 1\}$ となる. 同様に $x = S_{\alpha,\rho}$ のとき $S_{\alpha,\rho-\alpha} = ax$ となる.
(2) $\Longleftarrow$ $x = c_\alpha$ とすると, (1) と同じ計算で

$$s_{\alpha,-\alpha} = s_{\alpha,1-\alpha} = 0s_{\alpha,0} = 0c_\alpha, \qquad S_{\alpha,-\alpha} = S_{\alpha,1-\alpha} = 1S_{\alpha,0} = 1c_\alpha$$

となる.
$\Longrightarrow$ $0x$ と $1x$ がともに Sturm 語であるとする.

$$\sigma(0x) = \lim_{n\to\infty} \frac{h_n(0x)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{h_{n-1}(x)}{n} = \sigma(x)$$

である. 同様に $\sigma(1x) = \sigma(x)$. $\alpha = \sigma(x)$ とおく. $h_n(0x) = h_{n-1}(x)$, $h_n(1x) = h_{n-1}(x) + 1$ だから, 定理 49 により

$$\rho = 0x \text{ の切片} = \inf\{\gamma \geq -\alpha \ : \ h_{n-1}(x) \leq \lfloor \alpha(n+1) + \gamma \rfloor \quad ({}^\forall n \geq 1)\}$$
$$\rho' = 1x \text{ の切片} = \inf\{\gamma \geq -\alpha \ : \ h_{n-1}(x) + 1 \leq \lfloor \alpha(n+1) + \gamma \rfloor \quad ({}^\forall n \geq 1)\}$$

よって $\rho' = \rho - 1$. $s_{\alpha,\rho-1} = s_{\alpha,\rho}$, $S_{\alpha,\rho-1} = S_{\alpha,\rho}$ だから, $0x$ と $1x$ の可能性は $0x = s_{\alpha,\rho}$, $1x = S_{\alpha,\rho}$ に限る. このとき

$$0 = s_{\alpha,\rho}(1) = \lfloor 2\alpha + \rho \rfloor - \lfloor \alpha + \rho \rfloor, \qquad 1 = S_{\alpha,\rho}(1) = \lceil 2\alpha + \rho \rceil - \lceil \alpha + \rho \rceil$$

$0 \leq \alpha + \rho \leq 1$ であるが, $0 < \alpha + \rho < 1$ ならば $\lfloor \alpha + \rho \rfloor = 0$ より $\lfloor 2\alpha + \rho \rfloor = 0$. このとき $\lceil 2\alpha + \rho \rceil - \lceil \alpha + \rho \rceil = 0$ となるので矛盾. よって $\alpha + \rho = 0$ または 1 つまり $\rho \equiv -\alpha \mod 1$. よって $0x = s_{\alpha,-\alpha}$, $1x = S_{\alpha,-\alpha}$ から $x = c_\alpha$ となる. □

Def $\{0,1\}$ 上のすべてのワードの集合を $\mathbf{B}$ と表し, すべての無限ワードの集合を $\mathbf{B}^\infty$ と表す. $u,v \in \mathbf{B}$ を有限ワードとして, 文字 0 と 1 を u と v に置換する写像を

$$F_{u,v} : \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & u \\ 1 & \longrightarrow & v \end{array}$$

と表す. 任意の $x = x_1x_2\cdots \in \mathbf{B}^\infty$ に対し

$$F_{u,v}(x) = F_{u,v}(x_1)F_{u,v}(x_2)\cdots$$

により写像 $F_{u,v} : \mathbf{B}^\infty \longrightarrow \mathbf{B}^\infty$ を定義する. とくに

$$E = F_{1,0} : \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad G = F_{0,01} : \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & \longrightarrow & 01 \end{array}$$

と表す.

Prop 52

任意の c_α に対し次が成り立つ.

(1) $\boldsymbol{E(c_\alpha) = c_{1-\alpha}}$

(2) $\boldsymbol{G(c_\alpha) = c_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}$

証明 (1) すべての $n \geq 1$ で

$$h_n(E(c_\alpha)) = n - h(c_\alpha) = n - \lfloor (n+1)\alpha \rfloor = n + \lfloor -(n+1)\alpha \rfloor + 1 = \lfloor (n+1)(1-\alpha) \rfloor = h_n(c_{1-\alpha})$$

となるので $E(c_\alpha) = c_{1-\alpha}$ である.

(2) 無限ワード $x = x_1x_2\cdots$ に対し, 文字 1 が現れる位置を考える. 各 $k \geq 1$ に対し, k 個目の 1 が現れる番号を n , つまり

$$h_n(x) = k, \qquad h_{n-1}(x) = k-1$$

となる $n = n(x,k)$ が一意に定まる. 明らかに

$$x,y \in \mathbf{B}^\infty, \quad x = y \iff n(x,k) = n(y,k) \quad ({}^\forall k \geq 1)$$

である.

$k \geq 1$ を固定して, $n = n(c_\alpha, k), \ell = n(G(c_\alpha), k), m = n(c_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, k)$ とおく.

$$k = \lfloor (n+1)\alpha \rfloor, \qquad k-1 = \lfloor n\alpha \rfloor$$

だから

$$n\alpha < k < (n+1)\alpha \quad \text{つまり} \quad n < \frac{k}{\alpha} < n+1$$

よって

$$n = n(c_\alpha, k) = \left\lfloor \frac{k}{\alpha} \right\rfloor$$

同様に

$$m = n(c_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, k) = \left\lfloor \frac{k(1+\alpha)}{\alpha} \right\rfloor = k + \left\lfloor \frac{k}{\alpha} \right\rfloor = k + n$$

である. G の定義から $G(1) = 01$ だから,

$$\ell = n(G(c_\alpha), k) = n + k = m$$

よって $G(c_\alpha) = c_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$ である. □

系 53

$m \geq 1$ に対し

$$\theta_m = G^{m-1} \circ E \circ G \ : \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0^{m-1}1 \\ 1 & \longrightarrow & 0^{m-1}10 \end{array}$$

とする. このとき $\theta_m(c_\alpha) = c_{\frac{1}{m+\alpha}}$ である.

証明 Prop 52 と m についての帰納法から従う. □

系 54

$\alpha = [0, a_1, a_2, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty$ とする.

$$\alpha = [0, a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k + \gamma], \qquad \gamma = [0, a_{k+1}, \cdots]$$

とするとき

$$c_\alpha = \theta_{a_1} \circ \theta_{a_2} \circ \cdots \circ \theta_{a_k}(c_\gamma)$$

が成り立つ.

証明 系 53 から

$$\begin{aligned} \theta_{a_1} \circ \theta_{a_2} \circ \cdots \circ \theta_{a_k}(c_\gamma) &= \theta_{a_1} \circ \cdots \circ \theta_{a_{k-1}}(c_{\frac{1}{a_k+\gamma}}) \\ &= \theta_{a_1} \circ \cdots \theta_{a_{k-2}}\left(c_{\frac{1}{a_{k-1}+\frac{1}{a_k+\gamma}}}\right) \\ &= \cdots = c_\alpha \end{aligned}$$

□

定理 55

$\boldsymbol{\alpha = [0, a_1, a_2, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty}$ とする. $\boldsymbol{\{0, 1\}}$ 上の有限ワード $\boldsymbol{M_k}$ $(\boldsymbol{k \geq 0})$ を

$$\boldsymbol{M_0 = 0, \qquad M_1 = 0^{a_1 - 1}1, \qquad M_{k+1} = M_k^{a_{k+1}} M_{k-1} \quad (k \geq 1)}$$

により定義すれば, すべての $\boldsymbol{k \geq 1}$ で $\boldsymbol{M_k}$ は $\boldsymbol{c_\alpha}$ の *prefix* となり,

$$\boldsymbol{\lim_{k \to \infty} M_k = c_\alpha}$$

が成り立つ.

証明 $n \geq 1$ で

$$\Psi_n = \theta_{a_1} \circ \cdots \circ \theta_{a_n}$$

とおく. n についての帰納法で

$$M_n = \Psi_n(0), \qquad M_n M_{n-1} = \Psi_n(1)$$

を示す. $n = 1$ のとき

$$\Psi_1(0) = \theta_{a_1}(0) = 0^{a_1 - 1}1 = M_1$$
$$\Psi_1(1) = \theta_{a_1}(1) = 0^{a_1 - 1}10 = M_1 M_0$$

で成り立つ. $n-1$ まで成り立つと仮定すると, $\Psi_n = \Psi_{n-1} \circ \theta_{a_n}$ だから

$$\Psi_n(0) = \Psi_{n-1}(0^{a_n - 1}1) = \Psi_{n-1}(0)^{a_n - 1}\Psi_{n-1}(1) = M_{n-1}^{a_n - 1} M_{n-1} M_{n-2} = M_{n-1}^{a_n} M_{n-2} = M_n$$

また

$$\Psi_n(1) = \Psi_{n-1}(0^{a_n - 1}10) = M_{n-1}^{a_n - 1} M_{n-1} M_{n-2} M_{n-1} = M_n M_{n-1}$$

となり, n で成り立つ. よって任意の $x \in \mathbf{B}^\infty$ に対し, M_n は $\Psi_n(x)$ の prefix になる. 系 54 から $c_\alpha = \Psi_n(c_\gamma)$ と書けるので, M_n は c_α の prefix である. □

Def $\alpha = [0, a_1, a_2, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty$ から定義される有限ワードの列 $\{M_k\}_{k \geq 0}$ を傾き α の **characteristic block** とよぶ.

Prop 56

$\boldsymbol{\alpha = [0, a_1, a_2, \cdots] \in \mathbf{R}_\infty}$ の近似分数を $\boldsymbol{p_k / q_k}$ とし, *characteristic block* を $\boldsymbol{\{M_k\}}$ とする.
(1) $\boldsymbol{k \geq 2}$ のとき, $\boldsymbol{k}$ が偶数ならば **10** は $\boldsymbol{M_k}$ の *suffix* で, $\boldsymbol{k}$ が奇数ならば **01** が $\boldsymbol{M_k}$ の *suffix* となる.
(2) すべての $\boldsymbol{k \geq 0}$ で, $\boldsymbol{M_{k+1} M_k}$ と $\boldsymbol{M_k M_{k+1}}$ は最後の 2 文字だけ異なる.
(3) すべての $\boldsymbol{k \geq 1}$ で $\boldsymbol{|M_k| = q_k}$, $\boldsymbol{h(M_k) = p_k}$ である.

証明 (1) は定義から明らかである.
(2) 有限ワード $u = u_1 \cdots u_n$ $(n \geq 2)$ に対し

$$\chi(u) = u_1 \cdots u_{n-2} u_n u_{n-1}$$

と定義する. すべての k で $M_{k+1}M_k = \chi(M_k M_{k+1})$ となることを示せばよい. k の帰納法で示す. $k = 0$ のとき

$$M_1 M_0 = 0^{a_1-1}10 = \chi(0^{a_1-1}01) = \chi(00^{a_1-1}1) = \chi(M_0 M_1)$$

で成り立つ. $k-1$ まで成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} M_{k+1}M_k &= M_k^{a_{k+1}} M_{k-1} M_k = M_k^{a_{k+1}} \chi(M_k M_{k-1}) \\ &= \chi(M_k^{a_{k+1}} M_k M_{k-1}) = \chi(M_k M_k^{a_{k+1}} M_{k-1}) = \chi(M_k M_{k+1}) \end{aligned}$$

より k でも成り立つ.
(3) 定義から

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & p_0 = a_, \quad p_{-1} = 1 \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, & q_0 = 1, \quad q_{-1} = 0 \end{cases}$$

k の帰納法で示す.

$$|M_0| = 1 = q_0, \qquad h(M_0) = 0 = p_0$$

また

$$|M_1| = (a_1 - 1) + 1 = a_1, \qquad h(M_1) = 1 = p_1$$

である. $k-1$ まで成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} |M_k| &= a_k |M_{k-1}| + |M_{k-2}| = a_k q_{k-1} + q_{k-2} = q_k \\ h(M_k) &= a_k h(M_{k-1} + h(M_{k-2}) = a_k p_{k-1} + p_{k-2} = p_k \end{aligned}$$

となり, k でも成り立つ. □

Def 有限ワード $u = u_1 \cdots u_n$ $(n \geq 2)$ に対し,

$$u^- = u_1 \cdots u_{n-1}, \qquad u^{--} = (u^-)^- = u_1 \cdots u_{n-2}$$

とする. characteristic block $\{M_k\}$ に対し

$$\widetilde{M}_k = (M_{k+1}M_k)^{--} = (M_k M_{k+1})^{--}$$

とおく.

次の命題は, Bugeaud-Kim の定理の証明において鍵となる結果である.

Prop 57 (Bugeaud - Kim の補題)

x を *Sturm* 語とし, 傾き $\alpha = \sigma(x)$ の *characteristic block* を $\{M_k\}$ とする. 各 $k \geq 1$ について, 以下の $[1]_k, [2]_k, [3]_k$ の何れか唯一つのケースが成り立つ.

$[1]_k$ M_k の空でない *suffix* $^\exists W_k$ *s.t.* $x = W_k M_k \widetilde{M}_k \cdots$

$[2]_k$ M_k の空でない *suffix* $^\exists W_k$ *s.t.* $x = W_k M_{k-1} M_k \widetilde{M}_k \cdots$

$[3]_k$ M_{k-1} の 空でない *suffix* $^\exists W_k$ *s.t.* $x = W_k M_k \widetilde{M}_k \cdots$

各ケースにおいて W_k は一意である. さらに $[2]_k$ が成り立つとき $k+1$ において $W_{k+1} = W_k M_{k-1}$ となり, $[3]_k$ が成り立つとき $k+1$ において $W_{k+1} = W_k$ となる.

証明は [6, Lemma 7.2] を参照.

15　ワードの反復指数

A を有限集合として, A 上の無限ワード $x = x_1x_2\cdots$ の因子 $x_ix_{i+1}\cdots x_j$ を x_i^j と表す.

Def　A 上の無限ワード x と $n \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} r(n,x) &= \min\{\, m \geq 1 \;:\; 1 \leq {}^\exists i \leq m-n \quad \text{s.t.} \quad x_i^{i+n-1} = x_{m-n+1}^m \} \\ &= \min\{|y| \;:\; y \text{ は } x \text{ の prefix で}, x \text{ の長さ } n \text{ のある因子を 2 重に含む} \} \end{aligned}$$

と定義する.

例　x を $\{0,1\}$ 上のワードで $x = 01001001\cdots$ とすると

$$r(2,x) = 5, \qquad r(3,x) = 6, \qquad r(4,x) = 7$$

である.

Prop 58

A 上の任意の無限ワード x と $n \geq 1$ について次が成り立つ.

(1)　$n + 1 \leq r(n,x) \leq n + p(n,x)$

(2)　$x_j^{j+n-1} = x_{r(n,x)-n+1}^{r(n,x)}$ を満たす $1 \leq j \leq r(n,x) - n$ が唯一つ存在する.

(3)　$r(n,x) + 1 \leq r(n+1,x)$

証明 (1)　$r(n,x)$ が最小となるのは, $x_1^n = x_2^{n+1}$ のときである. よって $n + 1 \leq r(n,x)$. また $x_1^{r(n,x)-1}$ の長さ n の因子は $(r(n,x) - 1) - (n - 1)$ 個あり, それらはすべて異なる. よって $(r(n,x) - 1) - (n - 1) \leq p(n,x)$ が成り立つ.

(2)　これは定義から明らかである.

(3)　j を (2) の値とするとき, $r(n+1,x)$ が最小となるのは

$$x_j^{j+n-1}x_{j+n} = x_{r(n,x)-n+1}^{r(n,x)}x_{r(n,x)+1}$$

が成り立つときである. よって $r(n+1,x) \geq r(n,x) + 1$.　□

Def　A 上の無限ワード x に対し

$$\mathrm{rep}(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{r(n,x)}{n}$$

を x の反復指数 **(exponent of repetition)** とよぶ.

系 59

x を A 上の無限ワードとする.
(1)　x が周期的ならば $\mathrm{rep}(x) = 1$ である.
(2)　x が *Sturm* 語ならば $1 \le \mathrm{rep}(x) \le 2$ である.

証明　Prop 58 (1) から

$$1 + \frac{1}{n} \le \frac{r(n, x)}{n} \le 1 + \frac{p(n, x)}{n}$$

x が周期的ならば $p(n, x)$ は有界で, x が Sturm 語ならば $p(n, x) = n + 1$ であることから従う. □

Prop 60

x を $\{0, 1\}$ 上の *Sturm* 語で, $\sigma(x) = [0, a_1, a_2, \cdots]$ とする. 数列 $\{a_n\}$ が有界でなければ, $\mathrm{rep}(x) = 1$ である.

証明　$\{M_k\}_{k\ge0}$ を $\sigma(x)$ の characteristic block とする.

$$M_k = M_{k-1}^{a_k} M_{k-2}$$

である. k と a_k が十分大きいとして , $\ell = \lfloor \sqrt{a_k} \rfloor$ とおく. この k で Prop 57 から W_k が定まる.

$|W_k| > (\ell + 1)|M_{k-1}|$ のとき: $|W_k| > |M_{k-1}|$ となるから W_k は M_{k-1} の suffix ではない. よって Prop 57 の $[1]_k$ または $[2]_k$ になり, W_k は M_k の suffix である. M_{k-1} のある suffix V と $d \ge 1$ で

$$W_k = V M_{k-1}^{d} M_{k-2}$$

と書ける. 仮定から

$$(\ell + 1)|M_{k-1}| < |W_k| = |V| + d|M_{k-1}| + |M_{k-2}| < (d + 2)|M_{k-1}|$$

より $\ell - 1 < d$, つまり $\ell \le d$. $M_{k-1} = UV$ とすると

$$x = W_k \cdots = V M_{k-1}^{\ell} \cdots = V(UV)^{\ell} \cdots = (VU)^{\ell} V \cdots = (VU)^{\ell-1} VUV \cdots$$

$|VU| = |M_{k-1}|$ だから,

$$r((\ell - 1)|M_{k-1}|, x) \le \ell |M_{k-1}|$$

が成り立つ. これから

$$1 < \frac{(\ell - 1)|M_{k-1}| + 1}{(\ell - 1)|M_{k-1}|} \le \frac{r(\ell - 1)|M_{k-1}|, x)}{(\ell - 1)|M_{k-1}|} \le \frac{\ell |M_{k-1}|}{(\ell - 1)|M_{k-1}|} = \frac{\ell}{\ell - 1}$$

$|W_k| \leq (\ell+1)|M_{k-1}|$ のとき: Prop 57 からいずれの場合でも

$$x = W_k M_{k-1}^{a_k} = W_k M_{k-1}^{a_k-1} M_{k-1} \cdots$$

となる. よって

$$r((a_k-1)|M_{k-1}|, x) \leq |W_k| + a_k|M_{k-1}| \leq (a_k+\ell+1)|M_{k-1}|$$

から

$$1 < \frac{(a_k-1)|M_{k-1}|+1}{(a_k-1)|M_{k-1}|} \leq \frac{r((a_k-1)|M_{k-1}|, x)}{(a_k-1)|M_{k-1}|} \leq \frac{(a_k+\ell+1)|M_{k-1}|}{(a_k-1)|M_{k-1}|} \leq \frac{(a_k+\ell+1)}{(a_k-1)}$$

仮定から a_k はいくらでも大きくとれるので, 1 は数列 $\{r(n,x)/n\}_n$ の集積点になる. よって $\mathrm{rep}(x) = 1$ である. □

Prop 60 から $\mathrm{rep}(x) > 1$ ならば $\sigma(x) = [0, a_1, a_2, \cdots]$ の自然数列 $\{a_n\}$ は有界になる. 上の証明の方法を精密化して, 次が示される.

Prop 61

$\boldsymbol{x}$ **を** $\boldsymbol{\{0,1\}}$ **上の** ***Sturm*** **語で,** $\boldsymbol{\sigma(x) = [0, a_1, a_2, \cdots]}$ **とする.** $\boldsymbol{\mathrm{rep}(x) > 1.645}$ **ならば, 十分大きなすべての** $\boldsymbol{k}$ **において** $\boldsymbol{a_k \in \{1,2\}}$ **である. さらに数列** $\boldsymbol{\{a_n\}}$ **の中で十分大きな** $\boldsymbol{k}$ **に対し次の列は現れない.**

- $\boldsymbol{a_k a_{k+1} a_{k+2} \cdots = 111 \cdots}$
- $\boldsymbol{a_k a_{k+1} = 22}$
- $\boldsymbol{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} a_{k+4} a_{k+5} = 121212}$
- $\boldsymbol{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} a_{k+4} a_{k+5} a_{k+6} = 1211212}$

証明は [9, Lemma 2.2] を参照.

$\mathrm{rep}(x)$ の最大値については次の結果がある.

$$r_0 = \sqrt{10} - \frac{3}{2} = 1.66227\cdots, \qquad r_1 = \frac{48+\sqrt{10}}{31} = 1.65039\cdots$$

とおく.

定理 62 (Bugeaud-Kim)

任意の *Sturm* 語 x について

$$\mathbf{rep}(x) \leq r_0$$

が成り立つ. x で等号が成り立つならば, その傾き $\sigma(x)$ の連分数展開は周期的であり,

$$\sigma(x) = [0, a_1, \cdots, a_K, \overline{1, 1, 2}]$$

の形をもつ. 値 r_0 は集合 $\{\mathbf{rep}(x) \mid x$ は *Sturm* 語 $\}$ の孤立点である.

証明は [6] を参照.

定理 63 (Ohnaka-Watanabe)

Sturm 語 x で

$$r_1 < \mathbf{rep}(x) < r_0$$

となるものは存在しない. 値 r_1 は集合 $\{\mathbf{rep}(x) \mid x$ は *Sturm* 語 $\}$ の集積点である.

証明は [9] を参照.

16 反復指数と b 進数の無理数性指数

自然数 $b \geq 2$ を固定して, $A_b = \{0, 1, \cdots, b-1\}$ とする. A_b 上の無限ワード $x = x_1x_2\cdots$ に対し

$$\xi_{x,b} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k}$$

と実数 $\xi_{x,b} \in [0, 1)$ を定義する. x が周期的でなければ $\xi_{x,b}$ は無理数である. この場合に, 無理数性指数 $\mu(\xi_{x,b})$ と反復指数 $\mathrm{rep}(x)$ との関係を与える.

Lemma 64

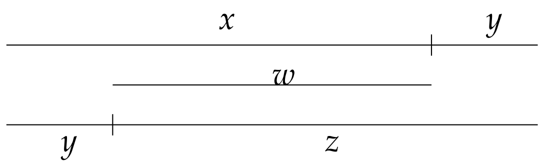
A を有限集合として, x, y, z $(x, z \neq \epsilon)$ を A 上の有限ワードとする. このとき次の 2 条件は同値である.

(a) $xy = yz$

(b) ある u, v と $e \geq 0$ により $x = uv, z = vu, y = (uv)^e u = u(vu)^e$ と書ける.

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) を示せばよい. $|y|$ の帰納法で示す. $|y| = 0$ のとき, $y = \epsilon$ だから $u = \epsilon, v = x = z, e = 0$ でよい. $|y| < n$ では (b) が成り立つと仮定する. $|y| = n \geq 1$ で示す.

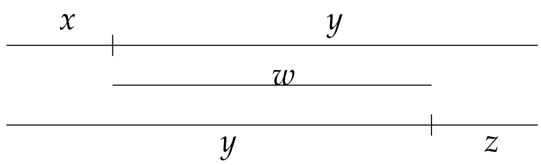
$|x| \geq |y|$ のとき: $xy = yz$ から x の suffix かつ z の prefix でもある w で $x = yw, z = wy$ となるものがとれる. よって $u = y, v = w, e = 0$ とすれば (b) が成り立つ.



$|x| < |y|$ のとき: $y = xw = wz$ となる w がとれる. $|w| = |y| - |z| < |y|$ により, 帰納法の仮定から

$$x = uv, \qquad z = vu, \qquad w = (uv)^e u = u(vu)^e$$

が成り立つ.



このとき

$$y = (uv)^{e+1} u = u(vu)^{e+1}$$

となるので, y でも (b) が成り立つ. □

Lemma 65

$\boldsymbol{x = x_1x_2\cdots}$ を $\boldsymbol{A_b}$ 上の非周期的な無限ワードとする. $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ の周期 $\boldsymbol{\ell}$ 長さ $\boldsymbol{\ell+n}$ の純周期的な因子で, $\boldsymbol{x = x_1\cdots x_d y x_{d+\ell+n+1}\cdots}$ とする. このとき, 整数 $\boldsymbol{s}$ で

$$\left|\xi_{x,b} - \frac{s}{b^d(b^\ell - 1)}\right| \le \frac{1}{b^{d+\ell+n}}$$

を満たすものが存在する.

証明 b 進展開を $\xi_{x,b} = (0.x_1x_2\cdots)_{(b)}$ と表す.

$$a = (0.x_1\cdots x_d\overline{y_1\cdots y_\ell})_{(b)}, \qquad a' = (0.\overline{y_1\cdots y_\ell})_{(b)}$$

とすると

$$ab^d = (x_1\cdots x_d)_{(b)} + a', \qquad a'b^\ell = (y_1\cdots y_\ell)_{(b)} + a'$$

となり

$$ab^d = (x_1\cdots x_d)_{(b)} + \frac{(y_1\cdots y_\ell)_{(b)}}{b^\ell - 1} = \frac{(b^\ell-1)(x_1\cdots x_d)_{(b)} + (y_1\cdots y_\ell)_{(b)}}{b^\ell - 1}$$

よって $s = (b^\ell-1)(x_1\cdots x_d)_{(b)} + (y_1\cdots y_\ell)_{(b)}$ ととれば

$$\left|\xi_{x,b} - \frac{s}{b^d(b^\ell - 1)}\right| = |\xi_{x,b} - a| \le \frac{1}{b^{d+\ell+n}}$$

となる. □

定理 66 (Bugeaud-Kim)

$\boldsymbol{x = x_1x_2\cdots}$ を $\boldsymbol{A_b}$ 上の非周期的な無限ワードとする. このとき

$$\frac{\mathrm{rep}(x)}{\mathrm{rep}(x) - 1} \le \mu(\xi_{x,b})$$

が成り立つ. $\boldsymbol{\mathrm{rep}(x) = 1}$ のときは, 両辺が $\boldsymbol{\infty}$ に等しいという意味で成り立つ.

証明 系 18 から, 任意の $\xi \in \mathbf{R}_\infty$ について $\mu(\xi) \ge 2$ である. $\mathrm{rep}(x) \ge 2$ ならば,

$$\frac{\mathrm{rep}(x)}{\mathrm{rep}(x) - 1} \le 2 \le \mu(\xi_{x,b})$$

で成り立つ. よって $\mathrm{rep}(x) < 2$ のときに示せばよい.

$$M = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{r(n,x) - n} = \frac{1}{\mathrm{rep}(x) - 1}, \qquad \text{ただし } \mathrm{rep}(x) = 1 \text{ のときは } M = \infty \text{ とする}$$

とおいて, 単調増加数列 $\{\nu_k\}$ を

$$2 < \nu_k < 1 + M, \qquad \lim_{k\to\infty} \nu_k = 1 + M$$

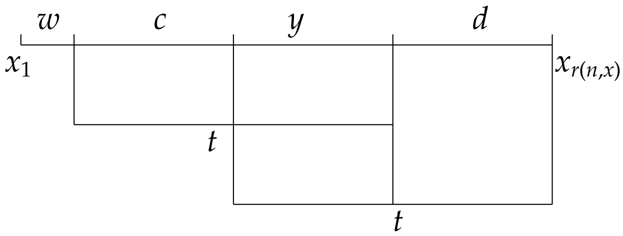
を満たすようにとる. $\nu_k - 1 < M$ より

$$\nu_k - 1 < \frac{n}{r(n,x) - n}$$

を満たす n が無限にある. $1 < \nu_k - 1$ だから

$$\nu_k - 1 < \frac{n}{r(n,x) - n} \implies r(n,x) < 2n$$

である. このような n を固定する. このとき x の長さ $r(n,x)$ の prefix の中に, 長さ n の因子 t で 2 重に含まれるものがある. $r(n,x) < 2n$ から, t のある preifx と suffix は一致しないといけない. つまり $t = cy = yd$ の形をもつ.



Lemma 64 から $y = (uv)^e u = u(vu)^e$, $c = uv$, $d = vu$ と書けて, x の長さ $r(n,x)$ の prefix は

$$x_1^{r(n,x)} = wcyd = w(uv)^{e+2}u, \qquad t = (uv)^{e+1}u$$

と書ける. このとき

$$|wuv| = |w(uv)^{e+2}u| - |(uv)^{e+1}u| = r(n,x) - n$$

である. Lemma 65 より整数 s が存在し

$$\begin{aligned}
\left|\xi_{x,b} - \frac{s}{b^{|w|}(b^{|uv|}-1)}\right| &\le \frac{1}{b^{r(n,x)}} = \frac{1}{b^{|w(uv)^{e+2}u|}} \\
&= \frac{1}{b^{|wuv|+|(uv)^{e+1}u|}} = \frac{1}{b^{|wuv|}b^n} \\
&= \frac{1}{b^{|wuv|}b^{\frac{n|wuv|}{r(n,x)-n}}} = \frac{1}{b^{|wuv|(1+\frac{n}{r(n,x)-n})}} \\
&< \frac{1}{b^{|wuv|\nu_k}} < \frac{1}{(b^{|w|}(b^{|uv|}-1))^{\nu_k}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. s, u, v, x は n に依存するので, $s/b^{|w|}(b^{|uv|}-1) = s_n/q_n$ とおけば

$$\left|\xi_{x,b} - \frac{s_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{\nu_k}}$$

このような n が無限にあるので, $\mu(\xi_{x,b}) \ge \nu_k$ が成り立つ. よって $\mu(\xi_{x,b}) \ge 1 + M$ が成り立つ. □

注　Prop 58 (3) から, 任意の無限ワード x に対し

$$r(n,x)-n \le r(n+1,x)-(n+1)$$

であるから, $n \mapsto r(n,x)-n$ は単調増加である. [6, Theorem 2.3] から

$$x \text{ が非周期的} \iff \lim_{n\to\infty}(r(n,x)-n)=\infty$$

である.

系 67

x **が** $\boldsymbol{A_b}$ **上の** ***Sturm*** **語ならば**

$$\boldsymbol{\mu(\xi_{x,b}) \ge \frac{25+4\sqrt{10}}{15} = 2.5099\cdots}$$

が成り立つ. とくに $\boldsymbol{\xi_{x,b}}$ **は超越数である.**

証明　これは 定理 62, 定理 66 と Roth の定理から従う. □

注　Sturm 語 x に対する $\xi_{x,b}$ の超越性は
S. Ferenczi and C. Mauduit, Transcendence of numbers with a low complexity expansion, J. Number Theory, Vol. 67 (1997) 146 - 161
で示されている.

x が Sturm 語の場合は, 定理 66 での等式が常に成り立つ.

定理 68 (Bugeaud-Kim)

x **が** $\boldsymbol{A_b}$ **上の** ***Sturm*** **語ならば**

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{rep}(x)}{\mathrm{rep}(x)-1} = \mu(\xi_{x,b})}$$

が成り立つ. $\boldsymbol{\mathrm{rep}(x)=1}$ **のときは, 両辺が** $\boldsymbol{\infty}$ **に等しいという意味で成り立つ.**

証明は容易ではないので [6] を参照.