２つのLorenzアトラクターによるカオス的遍歴

和田昌昭

2012年7月17日

Lorenz方程式は次で与えられる．

$$\begin{cases} \dot{x} &= -10x + 10y \\ \dot{y} &= 24x - y - xz \\ \dot{z} &= -8/3z + xy \end{cases} \tag{1}$$

Lorenzアトラクターと呼ばれるこの方程式のアトラクターは $z > 0$ の半空間内に存在することに注意する．z を $-z$ に変換すると，

$$\begin{cases} \dot{x} &= -10x + 10y \\ \dot{y} &= 24x - y + xz \\ \dot{z} &= -8/3z - xy \end{cases} \tag{2}$$

となり，そのアトラクターは $z < 0$ の半空間内に存在する．

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

は，$z \gg 0$ ではほぼ1，$z \ll 0$ ではほぼ -1 となるが，これを用いて方程式

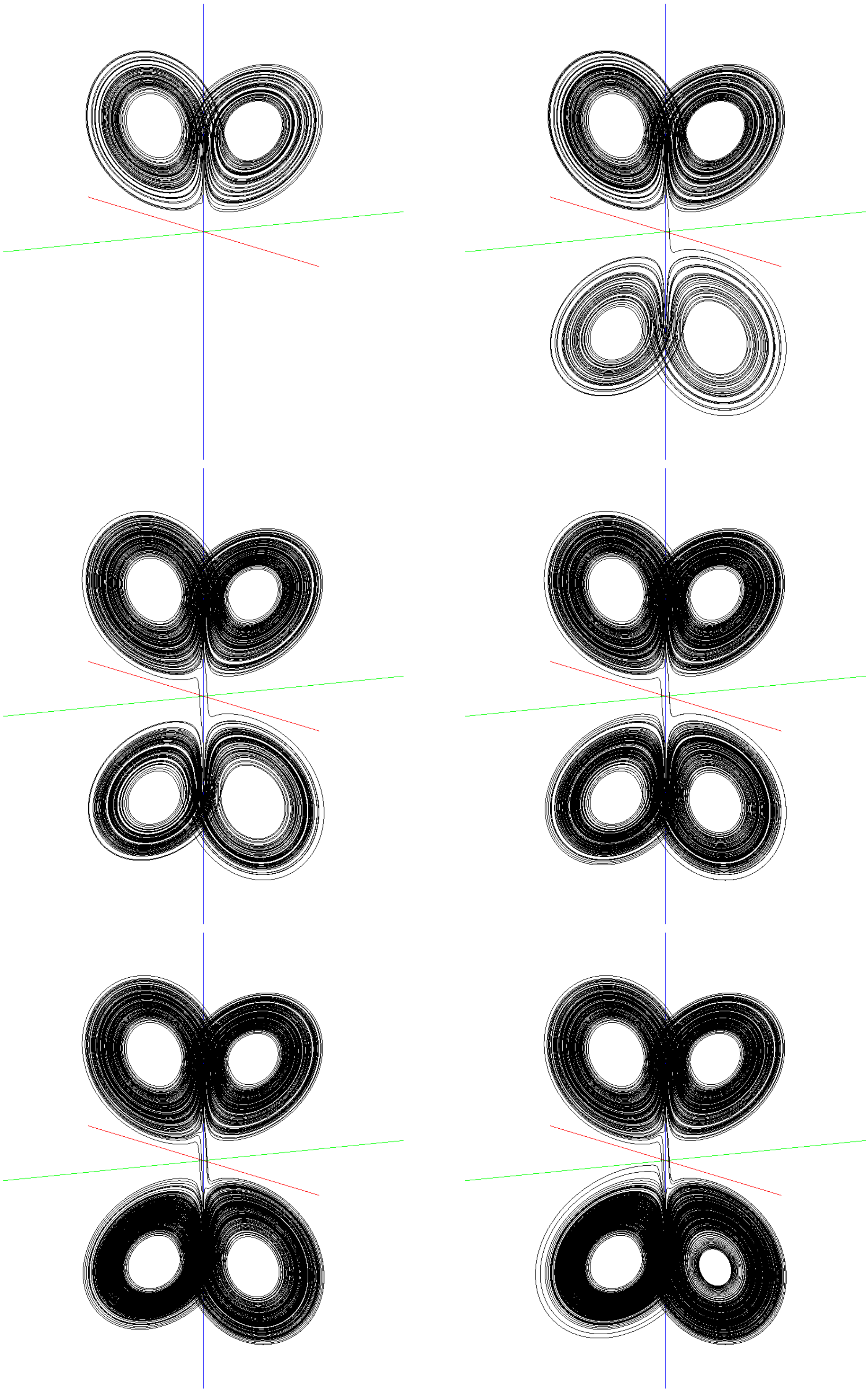
$$\begin{cases} \dot{x} &= -10x + 10y \\ \dot{y} &= 24x - y - xz\tanh z \\ \dot{z} &= -8/3z + xy\tanh z \end{cases} \tag{3}$$

を考えると，(3) は上半空間 $z > 0$ ではほぼ方程式 (1) となり，下半空間 $z < 0$ ではほぼ方程式 (2) となる．実際，$z \gg 0$ なる初期値からの (3) の解は上半空間内のLorenzアトラクターに，$z \ll 0$ なる初期値からの解は下半空間内のLorenzアトラクターに漸近することが数値シミュレーションにより確かめられる．

これらのLorenzアトラクターに収束する解は，カオス的な挙動によって不規則的に z 軸の近くを通るが，その瞬間に強制的に上半空間から下半空間，あるいはその逆の移動が起きるようにすれば，人工的にカオス的遍歴を生じさせることができるであろう．そのために，原点から一定距離の範囲の z 軸のすぐ近くで，上下両方向の入り混じったベクトル場を強制的に追加する．

$$\begin{cases} \dot{x} &= -10x + 10y \\ \dot{y} &= 24x - y - xz\tanh z \\ \dot{z} &= -8/3z + xy\tanh z + 900xe^{-(x^2+y^2+z^2/16)} \end{cases} \tag{4}$$

以下の図は，この方程式の初期値 $(10, 10, 10)$ の解を，時間0.001ごとの折れ線近似によって描いたもので，それぞれ $t \leq 100$ から $t \leq 1000$ までの100ごとと，$t \leq 10000$ の解の軌跡を表している．



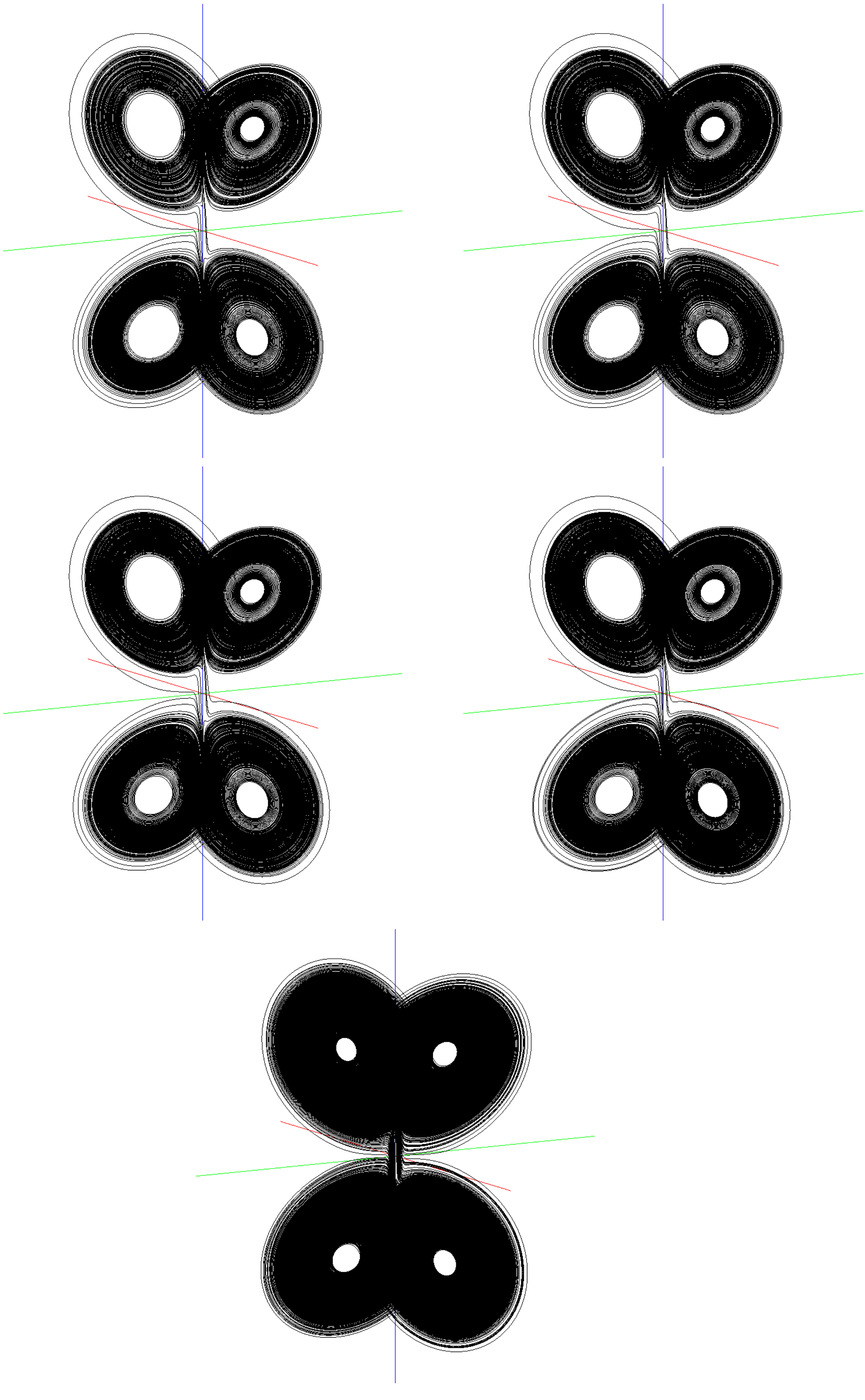


図 1: 方程式 (4) の解．順に $t \leq 100$ から $t \leq 1000$ までの 100 ごとと，$t \leq 10000$ の範囲での解の軌跡を示す．