§3. 集合の概念と習慣的に使われる記号

集合は現代数学の根幹に位置するとても大切な概念です。そこで、この節の前半では、集合についての基礎（集合の書き表わし方や空集合、部分集合、集合の相等などの概念）を身につけましょう。後半では、$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ や $:=$, $\forall$, $\exists$, $\because$ などの、数学の授業で日常的・習慣的によく使われる記号の意味や使い方を学びましょう。

§3-1 集合の記法と概念

集合 (set) とは、“もの”の集まりであって、その集まりがどのような“もの”からなるかが「客観的に規定されているもの」をいいます。集合 A に対して、それを構成している個々の“もの”を A の **元**(げん)(element) または**要素**といいます。

例 3-1　次はいずれも集合である。

(1) 数 $1, 2, 3, 4$ からなる集まり
(2) 3 で割って 2 余る自然数の集まり
(3) ひらがなの集まり

これに対して、次はどれも集合でない。

(4) 歌が上手な阪大生の集まり
(5) 大きな数の集まり

●集合の記法

集合は中括弧 $\{\ \}$ を使って書き表わします。その書き表わし方には以下の２通りの方法があります。

①元を書き並べる方法（**外延的記法**と呼ばれます）

この記法は、集合を構成している元の個数が有限個である場合に可能です。例えば、数 $1, 2, 3, 4$ からなる集合は $\{1, 2, 3, 4\}$ のように書き表わします。

元を書き並べる順番は気にしません。$\{2, 3, 1, 4\}$, $\{4, 1, 3, 2\}$, $\{1, 2, 4, 3\}$ はすべて $1, 2, 3, 4$ からなる集合を表わします。

また、同じ元を２回以上書いても構いません。例えば、$\{2, 3, 1, 4, 4\}$ も $1, 2, 3, 4$ からなる集合を表わしています。

②条件を書き記す方法（**内包的記法**と呼ばれます）

例えば、正の偶数全体からなる集合は、$\{\, x \mid x$ は正の偶数である $\}$ のように書き表わします。一般に、○○○を満たすもの全部からなる集合を書き表わしたいとき、

$\{\, x \mid x$ は○○○を満たす $\}$　あるいは　$\{\, x \mid x$ は○○○である $\}$

という書き方をします。“ | ”よりも“ : ”を好む人は、

$\{\, x : x$ は○○○を満たす $\}$　あるいは　$\{\, x : x$ は○○○である $\}$

という書き方をします。

演習 3-1 * 次の各集合を２通りの方法 (元を書き並べる方法と条件を書き記す方法) で表わせ。

(1) サイコロの目の数からなる集合
(2) アルファベットの母音からなる集合

x が集合 A の元であることを x は A に**属する** (x belongs to A) または A は x を (元として) **含む**といい、$x \in A$ または $A \ni x$ と書き表わします。逆に、x が集合 A の元でないことを $x \notin A$ または $A \not\ni x$ のように書き表わします。

例 3-2 A を偶数全体からなる集合としたとき、$2 \in A$ であるが $1 \notin A$ である。

x と y がともに集合 A の元であることを、記号で、$x \in A,\ y \in A$ や $A \ni x,\ A \ni y$ のように表わしますが、これを $x, y \in A$ または $A \ni x, y$ と略記します。同様に、x, y, z がともに集合 A の元であることを $x, y, z \in A$ や $A \ni x, y, z$ と略記します。もっと個数が増えた場合も同様の略記の仕方をします。

集合の書き表わし方のバリエーション

① ある集合 A が与えられているときに、A の元であって、○○○という条件を満たすようなもの全体からなる集合を考えたい場合があります。このようなときには、

$$\{\ x \in A \mid x \text{ は○○○を満たす}\ \}$$

という書き方をよくします。これは、もともとの書き方で、

$$\{\ x \mid x \in A\text{、かつ、}x \text{ は○○○を満たす}\ \}$$

と書いていたものと同じ集合を表わします。例えば、集合 A を偶数全体からなる集合としたとき、A の元であって、3 で割り切れるものだけを集めて作った集合は、

$$\{\ x \in A \mid x \text{ は } 3 \text{ で割り切れる}\ \}$$

のように書き表わされます。

② 奇数をすべて集めた集合を書き表わしたい場合には、$\{\ x \mid x$ は奇数である $\}$ と書くのが正式ですが、これを

$$\{\ 2n+1 \mid n \text{ は整数}\ \}$$

と書いたりします。もっと大胆に、{ 奇数の全体 } のように書いてしまうこともあります。但し、後者の書き方は、「奇数の全体」を 1 つの元とみて、その元だけからなる集合を表わしているとも解釈することができるので、誤解が生じ得る状況では使えません。

③ 0 以上 1000 以下の整数からなる集合を $\{0, 1, 2, \cdots, 1000\}$ のように書くことがあります。また、1 以上の整数全体からなる集合を $\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ のように書くことがあります。この記法は、前後の記述から「$\cdots$」に入るべきものが明確な場合に限り、使うことができます。

演習 3-2 $\{\ 2m+3n \mid m$ と n は整数$\}$ と表わされる集合に 1 は属するか？

● **空集合**(くうしゅうごう)

$\{\ x \mid x$ は $x^2 = -1$ を満たす実数 $\}$ のような、元をまったく持たない集合を**空集合** (empty set) といい、$\varnothing$ (本によっては $\emptyset$) という記号で書き表わします。記号 $\varnothing$ はギリシア文字の ϕ と区別して使われますが、授業で板書するときは ϕ で代用することもあるようです。

空集合でない集合（すなわち、少なくとも 1 つは元を持つ集合）のことを **空でない** (non-empty) 集合とも呼びます。

注意： 空集合 $\varnothing$ を $\{\varnothing\}$ のように書いてはいけません。集合 $\{\varnothing\}$ は $\varnothing$ という元を持っている集合であり、空集合とは異なります。$\varnothing$ はそれ自体で 1 つも元を持たない集合を表わしています。

●部分集合

集合 B が集合 A の**部分集合** (subset) であるとは、B に属するどの元も A の元になっているときをいいます。「集合 B に属するどの元も集合 A の元である」という事実を、論理記号の「$\Rightarrow$」を借用して、

$$\text{“}x \in B \ \Rightarrow \ x \in A\text{”}$$

と書き表わします。B が A の部分集合であるとは、条件“$x \in B \ \Rightarrow \ x \in A$”が成り立つときである、と言い換えることができます。

集合 B が集合 A の部分集合であることを、$B \subset A$ あるいは $A \supset B$ のように書き表わし、「B は A に**含まれる** (B is contained in A)」または「A は B を**含む**」と読みます。また、B が A の部分集合でないことを $B \not\subset A$ あるいは $A \not\supset B$ と書き表わします。

例 3-3　3 つの集合 $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 6\}$, $C = \{1, 2, 3, 6\}$ を考える。

(1) A は C の部分集合である（記号を使って書くと、$A \subset C$ である）。なぜならば、A に属するどの元（つまり、1, 3, 6 のいずれについて) もすべて C の元になっているからである。

(2) B は C の部分集合ではない（記号を使って書くと、$B \not\subset C$ である）。なぜならば、B に属する元 4 は C に属さないからである。

注意：「$\subset$」「$\supset$」のことを「包む」「包まれる」と呼ぶ教科書もあります。また、「$\subset$」「$\supset$」の代わりに「$\subseteq$」「$\supseteq$」や「$\subseteqq$」「$\supseteqq$」を使う教科書もあります。これらの記号を用いる教科書においては、「$\subset$」「$\supset$」はそれぞれ「$\subseteq$ かつ $\neq$」「$\supseteq$ かつ $\neq$」の意味で使われるので注意しましょう。

部分集合に関しては次の 2 つの事実が基本的です。

❶ どのような集合 A に対しても、空集合 $\varnothing$ は A の部分集合である（と約束する)。

❷ どのような集合 A に対しても、A は A 自身を部分集合として含む、すなわち、$A \subset A$ である。

❷が成立することは部分集合の定義から疑う余地のないことですが、❶に関しては疑問に思う人もいるのではないでしょうか。このように約束する理由（正当性・妥当性）を簡単に説明しておきましょう。

仮に $B = \varnothing$（空集合）が集合 A の部分集合でなかったとすると、どのようなことが起こるのかを考察してみましょう。部分集合の定義により、$B \subset A$ は B に属するどのような元も A の元であることを意味するのでしたから、その否定 $B \not\subset A$ は、B の元の中には A の元でないものがある、ということになります。このことを $B = \varnothing$ の場合に当てはめると、空集合 B の中に（A に属さない）元があることが結論されます。これは空集合の定義に矛盾します。このような理由から、「空集合はどんな集合の部分集合にもなっている」（と約束しておく）のです。

演習 3-3　集合 {1,2,3} の部分集合をすべて書け。

●集合の相等

２つの集合 A と B が**等しい**とは、$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つときをいいます。このことを $A = B$ と書き表わします。また、２つの集合 A と B が等しくないことを $A \neq B$ と書き表わします。

例 3-4

(1) ２つの集合 $A = \{1,2,3,4\}$ と $B = \{\, x \mid x$ は 1 以上 4 以下の整数$\,\}$ は等しい、すなわち、$A = B$ である。

(2) ２つの集合

$A = \{\, x \mid x$ は単語 *ishibashi* に使われているアルファベット$\,\}$,

$B = \{\, x \mid x$ は単語 *toyonaka* に使われているアルファベット$\,\}$

は等しくない、すなわち、$A \neq B$ である。なぜならば、$s \in A$ であるのに、$s \notin B$ であるからである。

演習 3-4* 集合

$A = \{1,4,7\}$,

$B = \{\, x \mid x$ は 3 で割ると 1 余る整数$\,\}$,

$C = \{\, x \mid\ x$ は $x^2 = 4$ を満たす奇数$\,\}$,

$D = \{1,4\}$

について、次は成り立つか？簡単な理由をつけて答えよ。

(1) $A \subset B$　　(2) $A \supset C$　　(3) $A = D$

(4) $D \not\subset A$　　(5) $D \not\supset B$　　(6) $D \neq C$

§3-2 習慣的に使われる記号

数学の教科書や授業は、沢山の記号で溢れています。記号を上手に使うと、書く時間の節約になるばかりでなく、命題や推論を明解に表現できるようになります。ここでは、特に多く使われる記号について、その意味と使い方を説明します。

●数の集合を表わす記号

数の集合に関しては、習慣的に次の記号を用います。

$\mathbb{N} = \{$ 自然数 (natural number) の全体 $\} = \{1,2,3,\cdots\cdots\}$

$\mathbb{Z} = \{$ 整数 (integer) の全体 $\} = \{\cdots\cdots -3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\cdots\}$

$\mathbb{Q} = \{$ 有理数 (rational number) の全体 $\} = \{\, \frac{r}{s} \mid r,s \in \mathbb{Z}$ かつ $s \neq 0\,\}$

$\mathbb{R} = \{$ 実数 (real number) の全体 $\}$

$\mathbb{C} = \{$ 複素数 (complex number) の全体 $\} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\,\}$　(但し、i は虚数単位)

注意：1. 整数全体からなる集合を $\mathbb{Z}$ で表わし、有理数全体からなる集合を $\mathbb{Q}$ で表わすのは、それぞれ、数を意味するドイツ語 Zahl と商を意味する英語 quotient の頭文字に由来します。

2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ が成り立っています。
3. 教科書によっては、$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ の代わりに $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ が使われます。
4. この授業では自然数に 0 を含めていませんが、自然数に 0 を含める流儀もあります。

●カンマによる「かつ」の省略

一般に、2 つ以上の条件がカンマ「,」で区切られている場合、そのカンマ「,」は「かつ」を意味します。

例 3-5 $0 < |x-1| < 2,\ x \geq 0$ を満たす実数 x を考える、と書いてあれば、それは、「$0 < |x-1| < 2$ かつ $x \geq 0$」を満たす実数 x を考える、ということを意味します。

カンマを使って「かつ」を省略することはできますが、「または」を省略することは (方程式の解を書き並べるときなどの慣例を除いて) できません。

例 3-6 集合 $\{\ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2$ または $x \geq 3\ \}$ を $\{\ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2,\ x \geq 3\ \}$ のように書くことはできません。これは $\{\ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2$ かつ $x \geq 3\ \}$ という集合を表わし、もともとの集合とは違う集合です。

●「$\Longrightarrow$」という論理記号

数学の授業で使われる記号「$\Longrightarrow$」は、2-1 節で説明した論理における「ならば」として使われるよりも、

「○○○という条件や命題から△△△という条件や命題が得られる」

という意味を暗示的に含んで使われることが多いようです（2-2 節における仮定と結論の説明を参照)。このような「$\Longrightarrow$」の使い方は、特に、証明の記述の中に顕著に見られます。

●「$\Longleftrightarrow$」という論理記号

記号「$\Longleftrightarrow$」は、2-2 節で説明したように、2 つの命題が同値であることを表わすときに使います。必要十分であることを強調したいときには、$\underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ や $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ という記号を使うこともあります。ここで、「iff」は「if and only if」の略です。

例 3-7 (ピタゴラスの定理) △ABC について、

$$\angle\mathrm{A} = 90^\circ \iff \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$$

が成り立つ。

読み方と意味：△ABC について、$\angle\mathrm{A} = 90^\circ$ であるための必要十分条件は、$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$ が成り立つことである。

コメント：数学の教科書や授業では“ が成り立つ。”という部分はしばしば省略されます。

数学の楽しみ 1C・第 3 回 (2006 年 4 月 27 日)

●「存在」と「任意」を表わす記号

記号「∃」は「○○○が存在する」ということを意味する記号です。「∃」という記号は、“exist” の頭文字の大文字 E を左右反転して作られています。

記号「∀」は「すべての○○○について……」ということを意味する記号です。「∀」という記号は、“ all ” の頭文字の大文字 A を上下反転して作られています。

例 3-8

(1) $\forall\,\alpha \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{Z}\ \text{ s.t. }\ n \leq \alpha < n+1$

英文：For all $\alpha \in \mathbb{R}$ there exists an element $n \in \mathbb{Z}$ such that $n \leq \alpha < n+1$.

読み：すべての実数 α に対して、整数 n が存在して、$n \leq \alpha < n+1$ である。

意味：すべての実数 α に対して、$n \leq \alpha < n+1$ を満たす、整数 n が存在する。

(2) $0 \neq z \in \mathbb{C} \implies \exists\, r, \theta \in \mathbb{R}\ \text{ s.t. }\ z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ r > 0$

英文：If a complex number z is not zero, then there exist real numbers r and θ such that $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ and $r > 0$.

読み：複素数 z が 0 でないならば、実数 r と実数 θ が存在して、$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ であり、かつ、$r > 0$ である。

意味：複素数 z が 0 でなければ、$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を満たす正の実数 r と実数 θ が存在する。

コメント：1.「∀」は「すべての」と読むよりもむしろ、「任意の」と読むことのほうが多いかもしれません。**任意** (any, arbitrary) とは、作為性がないという意味です。

“ $\forall\, s \in S$ ” = “ 集合 S に属するすべての元 s について ”

= “ 集合 S から任意に取った (つまり、無作為に選んだ) s について ”

2. “ s.t. ” は “ such that ” の略です。“ ∼ such that — ” は “ — であるような ∼ ” という意味を持っています。

●唯一つ存在することを意味する記号

数学では、条件△△△を満たすものが唯一つしかないことを、

「条件△△△を満たすものは**一意的**(いちいてき)(unique) である」

と表現します。例えば、例 3-8(1) において、実数 α に対して条件 $n \leq \alpha < n+1$ を満たす整数 n は唯一つですから、このことを“ $n \leq \alpha < n+1$ を満たす整数 n は一意的である ” と表現します。

ここで 1 つ注意して欲しいことは、「一意的である」とは、「もし、その条件を満たすものがあれば、それは唯一つである」ということであって、実際にその条件を満たすものが存在するかどうかは問わないということです。

「条件△△△を満たす○○○が存在して、かつ、その条件を満たす○○○が唯一つしかない」ことを言い表わしたいときには、

「△△△を満たす○○○は一意的に存在する」

といいます。「一意的に存在する」ことを意味する記号としては「∃!」や「∃1」が用いられます。例えば、

$$\forall\,\alpha \in \mathbb{R},\ \exists!\ n \in \mathbb{Z}\ \ \text{s.t.}\ \ n \leq \alpha < n+1$$

のように書きます。なお、「一意的である」ことのみを意味する記号はありません。

演習 3-5 *

(1) 次の文章を、∀, ∃ などの論理記号を使って書き直せ。

どんな自然数 n に対しても、$|\sqrt{2} - r| < \frac{1}{n}$ となる有理数 r が存在する。

(2) 次の論理記号で表わされた文章を、論理記号のない文章に書き直せ。

$$a, b \in \mathbb{Z},\ b > 0 \implies \exists!\ q, r \in \mathbb{Z}\ \ \text{s.t.}\ \ a = qb + r,\ 0 \leq r < b$$

●何かを定義したいときに使われる記号

次のような記号がよく使われます。

$$:=,\quad \underset{\text{def}}{=},\quad \overset{\text{def}}{=},\quad \underset{\text{def}}{\iff},\quad \overset{\text{def}}{\iff}$$

使い方

① $A := B$ または $A \underset{\text{def}}{=} B$ または $A \overset{\text{def}}{=} B$ と書いて、「A を B によって定義する」ということを表わします。

② $A \underset{\text{def}}{\iff} B$ または $A \overset{\text{def}}{\iff} B$ と書いて、「A を B によって定義する」ということを表わします。

注意：1. B の方に既知の量、もの、性質が入り、A の方にこれから定めようとする量、もの、性質に対する名前や記号が入ります。

2. ②の書き方で、定義を書いていることが前後の文脈から明確な場合、単に、$A \iff B$ と書く場合もあります。

例 3-9

(1) $S := \{\ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + ax + b > 0\ \}$

読み：S を、x という実数であって、$x^2 + ax + b > 0$ を満たすもの全体からなる集合として定義する。

意味：右辺の集合を S という記号で書く。

(2) $n, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$ とする。このとき、

$$q : n \text{ の}\textbf{約数} \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, p \in \mathbb{Z}\quad \text{s.t.}\ \ n = pq$$

読み：「q が n の約数である」ということを次のように定義する、「ある p という整数が存在して、$n = pq$ を満たす。」

意味：q が n の約数であるとは、$n = pq$ となる整数 p が存在するときをいう。

数学の楽しみ1C・第3回 (2006年4月27日)

演習 3-6　次の記号化された文章の意味を書け。

(1) 平面上の3点 A, B, C に対して、

$$\text{A, B, C が同一直線上にある} \overset{\text{iff}}{\iff} \exists k \in \mathbb{R} \ \text{ s.t. } \ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

(2) $f(x)$：$\mathbb{R}$ 上で定義された関数　とする。このとき、

$$f(x)：\textbf{奇関数} \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$$

●「故に」と「何故ならば」

「$\therefore$」は「ゆえに (therefore)」、「$\because$」は「何故ならば (because)」と読みます。記号の意味は、その読み方の通りです。

大学の授業では、「$\therefore$」よりも「$\because$」という記号の方が多く用いられます。最初に、証明したい命題を提示し、次に、「$\because$」と書いて、それを証明していきます。

例 3-10　$a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して、

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

が成り立つ。

$\because$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) &= \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) \\ &= \frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$　□

●証明の開始と終了を表わす記号

定理の証明を開始するときには、

(Proof), (証明), $\because$

などと宣言してから書き始めます。そして、定理の証明の最後には「ここで証明が完了した」ということを知らせるための印しを置きます。その印しとしては、

□, ■, (Q.E.D.), (q.e.d.), (証明終), //

が主に使われます。“Q.E.D.”とは、ラテン語の “quod erat demonstrandum”(これが証明されるべきことであった) の略です。

●「$\cdots$」という記号

「$\cdots$」という記号は便利なのでよく使われます。但し、この記号を使うことができるのは、前後の記述から「$\cdots$」に入るべきものが明確な場合に限られます (集合の書き方のバリエーションの第③項を参照)。例えば、自然数 n に対して、「$a_1, \cdots, a_n$ を実数とする」あるいは「$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ とする」あるいは「$a_i \in \mathbb{R} \ \ (i = 1, \cdots, n)$ とする」のような記述は、1 から n までの各自然数 i について a_i と名付けられた実数が1つずつ定められている、ということを表わしています。