訂正：$\pi_{ni(n)}\pi_{n-1i(n-1)}\cdots\pi_{2i(2)}$ **を** $\pi_{i(n)\,n}\pi_{i(n-1)\,n-1}\cdots\pi_{(2)2}$ **に訂正します。**

定理　$n \in \mathbb{N}$ **とする。つぎの（ア）（イ）が成り立つ。**

（ア）$n+1$ **個の** n **項ベクトル** $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ **は１次従属である。**

（イ）n **個の** n **項ベクトル** $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix},\ldots,\boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ **が１次独立である**

必要十分条件は $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$**が正則行列である事である。**

行列式

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$**とする。**$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$ **を行列式という。**

定理　**（ア）**$\det(A)\det(B) = \det(AB)$, $\det(I_n) = 1$

（イ）$\det(A) \neq 0 \iff A$ **は正則行列**

n 次の簡単な正則行列による逆行列の求め方

$n \in \mathbb{N}$ **とする。**$i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$**にたいして** $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$**を**$(i,j)$**成分が** 1 **で**

り、他の成分が 1 **であるものとする。**

（あ）$a \in \mathbb{R}$**を０でないものとする。**$X = I_n + (a-1)E_{ii}$

（い）$b \in \mathbb{R}$**とする。**$i \neq j$ **とする。**$Y = I_n + bE_{ij}$

（う）$i<j$ とする。$Z=I_n-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}$

上の X, Y, Z の様な n 次の正則行列を簡単な n 次の正則行列とよぼう。n 次の正方行列 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ にたいして n 行２n 列の行列 $[A, B] \in \mathrm{M}(n, 2n; \mathbb{R})$ を 1〜n 列目が A の 1〜n 列目、$n+1$〜２n 列目が B の 1〜n 列目であるものとする。$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ にたいして $[A, I_n] \in \mathrm{M}(n, 2n; \mathbb{R})$ をかんがえる $[A, I_n]$ の左からいくつかの簡単な n 次の正則行列かけて $[I_n, C]$ となったとする。このとき A は正則行列であり、$A^{-1}=C$ である。しかしながら $[A, I_n]$ の左からいくつかの簡単な n 次の正則行列かけて $[J, C] \in \mathrm{M}(n, 2n; \mathbb{R})$ で

$$J=\begin{bmatrix} 1 & & 0 & a_{1i+1} & a_{1i+2} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{ii+1} & a_{ii+2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1i+2} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{ni+2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

となれば、J は正則行列でないので A も正則行列でない。J がもし正則行列であれば $\mathbf{0} \neq \begin{bmatrix} -a_{1i+1} \\ \vdots \\ -a_{ii+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = J^{-1}J\begin{bmatrix} -a_{1i+1} \\ \vdots \\ -a_{ii+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ だから J は正則行

列でない。

内積

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ にたいして

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

を内積という。$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ を長さまたはノルムという。

$$||\boldsymbol{a}|| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ。$||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||$を距離という。

> **定理**　（ア）$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqq ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||$
>
> （イ）$||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|| \leqq ||\boldsymbol{a}|| + ||\boldsymbol{b}||$,　したがって
>
> $||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|| \leqq ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}|| + ||\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}||$

$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \cos\theta = ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||$となる$\theta$を角度という。

2 次の回転行列

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

を回転行列という。$\det(A(\theta)) = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ である。

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ にたいして$A(\theta)[\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}] = A(\theta)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} x & y_1 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$となる$\theta \in \mathbb{R}$がある。$S = \{ s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq s, t \leqq 1 \}$ とお

く。

このとき　S の面積 $= |xy_2| = |\det(\begin{bmatrix} x & y_1 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix})| = |\det(A(\theta)[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])| = |\det([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])|$　である。

３次の回転行列

$$H(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ G(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

とおく。$H(\theta)$は z 軸を軸とする回転をあらわす行列である。$G(\theta)$は x 軸を軸とする回転をあらわす行列である。$\det(H(\theta)) = 1$, $\det(G(\theta)) = 1$ である。

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とおく。$G(\gamma)H(\beta)G(\alpha)[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \begin{bmatrix} x & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{bmatrix}$となる$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$がある。$T = \{ s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqq s, t, u \leqq 1 \}$ とおく。このとき　T の体積 $= |x\ y_2\ z_3| = |\det(\begin{bmatrix} x & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{bmatrix})| = |\det(G(\gamma)H(\beta)G(\alpha)[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}])| = |\det([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}])|$　である。