連立方程式

連立方程式①②③

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \text{ --- ①}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2 \text{ --- ②}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3 \text{ --- ③}$$

を考える。Sol(①②③)を連立方程式①②③の解の集合とする。すなわち

$$\text{Sol(①②③)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \text{は①②③をみたす} \right\}$$

である。$\boxed{a_{11} \neq 0}$とする。④ = $a_{11}{}^{-1}$① とおく。

$$x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 + c_{15}x_5 = d_1 \text{ --- ④} = a_{11}{}^{-1}\text{①}$$

ここで $c_{12} = a_{11}{}^{-1}a_{12}$, $c_{13} = a_{11}{}^{-1}a_{13}$, $c_{14} = a_{11}{}^{-1}a_{14}$, $c_{15} = a_{11}{}^{-1}a_{15}$, $d_1 = a_{11}{}^{-1}b_1$ とおいた。

$$\text{①②③} \Leftrightarrow \text{④②③}$$

である。⑤ = ② $- a_{21}$④, ⑥ = ③ $- a_{31}$④ とおく。

$$c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 + c_{25}x_5 = d_2 \text{ --- ⑤} = \text{②} - a_{21}\text{④}$$

$$c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4 + c_{35}x_5 = d_3 \text{ --- ⑥} = \text{③} - a_{31}\text{④}$$

ここで $c_{22} = a_{22} - a_{21}c_{12}$, $c_{23} = a_{23} - a_{21}c_{13}$, $c_{24} = a_{24} - a_{21}c_{14}$, $c_{25} = a_{25} - a_{21}c_{15}$, $d_2 = b_2 - a_{21}d_1$, $c_{32} = a_{32} - a_{31}c_{12}$, $c_{33} = a_{33} - a_{31}c_{13}$, $c_{34} = a_{34} - a_{31}c_{14}$, $c_{35} = a_{35} - a_{31}c_{15}$, $d_3 = b_3 - a_{31}d_1$, とおいた。

④②③ ⇔ ④⑤⑥

である。$\boxed{c_{22} \neq 0}$とする。⑦ = c_{22}^{-1}⑤ とおく。

$$x_2 + e_{23}x_3 + e_{24}x_4 + e_{25}x_5 = f_2 \text{ --- ⑦ } = c_{22}^{-1}\text{⑤}$$

ここで $e_{23} = c_{22}^{-1}c_{23}$, $e_{24} = c_{22}^{-1}c_{24}$, $e_{25} = c_{22}^{-1}c_{25}$, $f_2 = c_{22}^{-1}d_2$ とおいた。

④⑤⑥ ⇔ ④⑦⑥

である。⑧ = ④ $- c_{12}$⑦, ⑨ = ⑥ $- c_{32}$⑦ とおく。

$$x_1 + e_{13}x_3 + e_{14}x_4 + e_{15}x_5 = f_1 \text{ --- ⑧ } = \text{④} - c_{12}\text{⑦}$$

$$e_{33}x_3 + e_{34}x_4 + e_{35}x_5 = f_3 \text{ --- ⑨ } = \text{⑥} - c_{32}\text{⑦}$$

ここで $e_{13} = c_{13} - c_{12}e_{23}$, $e_{14} = c_{14} - c_{12}e_{24}$, $e_{15} = c_{15} - c_{12}e_{25}$, $f_1 = d_1 - c_{12}f_2$, $e_{33} = c_{33} - c_{32}e_{23}$, $e_{34} = c_{34} - c_{32}e_{24}$, $e_{35} = c_{35} - c_{32}e_{35}$, $f_3 = d_3 - c_{32}f_2$, とおいた。

④⑦⑥ ⇔ ⑧⑦⑨

である。$\boxed{e_{33} \neq 0}$とする。⑩ = e_{33}^{-1}⑨ とおく。

$$x_3 + g_{34}x_4 + g_{35}x_5 = h_3 \text{ --- ⑩ } = e_{33}^{-1}\text{⑨}$$

ここで g_{34} ＝ $e_{33}{}^{-1}e_{34}$，g_{35} ＝ $e_{33}{}^{-1}e_{35}$，h_3 ＝ $e_{33}{}^{-1}f_3$ とおいた。

⑧⑦⑨ ⇔ ⑧⑦⑩

である。⑪ ＝ ⑧ $-e_{13}$⑩, ⑫ ＝ ⑦ $-e_{23}$⑩ とおく。

$x_1+g_{14}x_4+g_{15}x_5=h_1$ --- ⑪ ＝ ⑧ $-e_{13}$⑩

$x_2+g_{24}x_4+g_{25}x_5=h_2$ --- ⑫ ＝ ⑦ $-e_{23}$⑩

ここで g_{14} ＝ $e_{14}-e_{13}g_{34}$，g_{15} ＝ $e_{15}-e_{13}g_{35}$，h_1 ＝ $f_1-e_{13}h_3$，g_{24} ＝ $e_{24}-e_{23}g_{34}$，g_{25} ＝ $e_{25}-e_{23}g_{35}$，h_2 ＝ $f_2-e_{23}h_3$ とおいた。

⑧⑦⑩ ⇔ ⑪⑫⑩

である。$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ∈ Sol(⑪⑫⑩) ＝ Sol(①②③) である。つぎに連立方程式⑬⑭⑮

$x_1+g_{14}x_4+g_{15}x_5=0$ --- ⑬

$x_2+g_{24}x_4+g_{25}x_5=0$ --- ⑭

$x_3+g_{34}x_4+g_{35}x_5=0$ --- ⑮

を考える。Sol(⑬⑭⑮) ＝ { $\begin{bmatrix} -g_{14}x_4-g_{15}x_5 \\ -g_{24}x_4-g_{25}x_5 \\ -g_{34}x_4-g_{35}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$ ¦ $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$} ＝

$\{ x_4 \begin{bmatrix} -g_{14} \\ -g_{24} \\ -g_{34} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -g_{15} \\ -g_{25} \\ -g_{35} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$ である。ゆえに $\boxed{a_{11} \neq 0,\ c_{22} \neq 0,\ e_{33} \neq 0}$ がなりたつとき

$$\boxed{\mathrm{Sol}(①②③) = \{ \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -g_{14} \\ -g_{24} \\ -g_{34} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -g_{15} \\ -g_{25} \\ -g_{35} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid a, b \in \mathbb{R}\}}$$

である。

つぎに $\boxed{a_{11} \neq 0,\ c_{22} \neq 0,\ e_{33} = 0,\ e_{34} \neq 0}$ がなりたつときを考える。①～⑨は上と同じである。$x_4 + i_{35}x_5 = j_3$ --- ⑯ = $e_{34}{}^{-1}$⑨とする。⑧⑦⑨ ⇔ ⑧⑦⑯である。$x_1 + e_{13}x_3 + i_{15}x_5 = j_1$ --- ⑰ = ⑧ $- e_{14}$⑯, $x_2 + e_{23}x_3 + i_{25}x_5 = j_2$ --- ⑱ = ⑦ $- e_{14}$⑯とする。⑧⑦⑯ ⇔ ⑰⑱⑯である。ゆえに

$$\boxed{\mathrm{Sol}(①②③) = \{ \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ 0 \\ j_3 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -e_{13} \\ -e_{23} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -i_{15} \\ -i_{25} \\ 0 \\ -i_{35} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid a, b \in \mathbb{R}\}}$$

である。

$\boxed{a_{11} \neq 0,\ c_{22} \neq 0,\ e_{33} = e_{34} = 0,\ e_{35} \neq 0}$ がなりたつときも

同じようにして Sol(①②③)がとける。

$\boxed{a_{11} \neq 0,\ c_{22} \neq 0,\ e_{33} = e_{34} = e_{34} = 0,\ f_3 \neq 0}$ がなりたつとき Sol(①②③)は<u>空集合</u> ϕ である。すなわち連立方程式①②③の解は<u>存在しない</u>。

行列の階数と連立方程式

$\mathbb{R}^n$ の m 個の要素 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ にたいして n 行 m 列の行列 $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m] \in \mathrm{M}(n, m; \mathbb{R})$ を $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(n, m; \mathbb{R})$ で定める。$A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m] \in \mathrm{M}(n, m; \mathbb{R})$ とおく。$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ のなかから r 個の $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r$ をとってきて

（あ）$\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r$ は１次独立である。

（い）$i = 1, \ldots, m$ にたいして $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r$ は１次従属である。

がなりたつとき r を行列 $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m]$ の階数（教科書１６ページ）といい rank A であらわす。（すなわち $\{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r\} \subset \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ で $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r$ はすべて異なり、１次独立であって、$i = 1, \ldots, m$ にたいして $\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r$ の１次結合である。）

定理　$A = [\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m] \in \mathrm{M}(n, m; \mathbb{R})$**とする。**$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ **とする。**

$$\mathrm{Sol}(A,\boldsymbol{b}) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \,\}$$

とおく。

（１） $\mathrm{Sol}(A,\boldsymbol{b}) \neq \phi \iff \mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}([\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}])$

（２） $\mathrm{Sol}(A,\boldsymbol{b}) \neq \phi$ **のとき** $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ **となる**$\mathbb{R}^m$ **の要素** $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m$ **を 1 つとってくる。このとき** $s = m - \mathrm{rank}\,A$ **個の**$\mathbb{R}^n$ **の 1 次独立な要素** $\boldsymbol{d}_1,\ldots,\boldsymbol{d}_s \in \mathbb{R}^m$ **で**

$$\mathrm{Sol}(A,\boldsymbol{b}) = \{\, \boldsymbol{c} + k_1\boldsymbol{d}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{d}_s \in \mathbb{R}^m \mid k_1,\ldots,k_s \in \mathbb{R} \,\}$$

となるものがある。さらに

$$\mathrm{Sol}(A,\boldsymbol{0}) = \{\, k_1\boldsymbol{d}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{d}_s \in \mathbb{R}^m \mid k_1,\ldots,k_s \in \mathbb{R} \,\}$$

である。