行列を用いて連立方程式を解く

　この段落の事は簡単な事であるが重要である。行列の積の$\boxed{\text{結合法則}}$

$$A(BC) = (AB)C$$

が成り立つことに注意しよう。ここで $A \in \mathrm{M}(n, m; \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(m, r; \mathbb{R})$, $C \in \mathrm{M}(r, l; \mathbb{R})$である。$ABC = A(BC)$ と定義する。結合法則より $ABC = (AB)C$ でもある。

　連立方程式 ①②③

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \text{ --- } ①$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \text{ --- } ②$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \text{ --- } ③$$

を考える。Sol(①②③)を連立方程式①②③の解の集合とする。すなわち

$$\mathrm{Sol}(①②③) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{は①②③をみたす} \right\}$$

である。この連立方程式①②③にたいして 3 行 4 列の行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

を考える。$\boxed{a_{11} \neq \mathbf{0}}$とする。3次の正則行列 $X = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を

考える。$X^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ である。

$$XA = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}$$

という形をしている。3次の正則行列 $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c_{21} & 1 & 0 \\ -c_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を考える。

$Y^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 \\ c_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ である。

$$YXA = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 0 & d_{32} & d_{33} & d_{34} \end{bmatrix}$$

という形をしている。$\boxed{d_{22} \neq \mathbf{0}}$とする。3次の正則行列 $Z =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を考える。$Z^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ である。

$$ZYXA = \begin{bmatrix} 1 & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ 0 & 1 & e_{23} & e_{24} \\ 0 & e_{33} & e_{33} & e_{34} \end{bmatrix}$$

という形をしている。３次の正則行列 $G = \begin{bmatrix} 1 & -e_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -e_{32} & 1 \end{bmatrix}$ を考える。

$G^{\hat{}\,122} = \begin{bmatrix} 1 & -e_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -e_{32} & 1 \end{bmatrix}$ である。

$$GZYXA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & f_{13} & f_{14} \\ 0 & 1 & f_{23} & f_{24} \\ 0 & 0 & f_{33} & f_{34} \end{bmatrix}$$

という形をしている。$\boxed{f_{33} \neq 0}$ とする。３次の正則行列 $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f_{33} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -f_{13} \\ 0 & 1 & -f_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を考える。

$$KHGZYXA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & 1 & 0 & g_{24} \\ 0 & 0 & 1 & g_{34} \end{bmatrix}$$

という形をしている。$B = KHGZYXX$ とおく。B は３次の正則行列である。$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とおく。このとき

Sol($\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$)

$$= \left\{ \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -g_{14} \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -g_{24} \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -g_{34} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

である。

3次の正則行列 $L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ を考える。$L_1{}^{\wedge 22} = L_1, L_2{}^{\wedge 22} = L_2, L_3{}^{\wedge 22} = L_3$ である。3つの1行4列の行列 $\mathbf{z}_1 = [z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}], \mathbf{z}_2 = [z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}], \mathbf{z}_3 = [z_{31}, z_{32}, z_{33}, z_{34}]$ にたいして3行4列の行列 $\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(3, 4; \mathbb{R})$ を $\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(3, 4; \mathbb{R})$ で定める。$L_1 \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_3 \end{bmatrix}, L_2 \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}, L_3 \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix}$ である。

$L_3 = L_1L_2L_1, L_3 = L_1L_2L_1$ である（なにが言いたいかと言うと L_3 が L_1 と L_2 のいくつかの積でかけるという事である）。

上で出て来た様な3次の正則行列を $\boxed{\text{簡単な3次の正則行列}}$ とよぶことにする。

4次の正則行列 $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_3 =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **を考える。** $M_1^{-1} = M_1$, $M_2^{-1} = M_2$, $M_3^{-1} = M_3$ **である。** $\mathbb{R}^3$ **の** 4 **個の要素** $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \in \mathbb{R}^3$ **にたいして** 3 **行** 4 **列の行列** $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] \in \mathrm{M}(3, 4; \mathbb{R})$ **を** 1 **列目が** $\boldsymbol{a}_1$**、２列目が** $\boldsymbol{a}_2$ **、３列目が** $\boldsymbol{a}_3$ **、４列目が** $\boldsymbol{a}_4$ **であるものとする。** $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]M_1 = [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]$, $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]M_2 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4]$, $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]M_3 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_3]$ **である。**

定理　3 **行** 4 **列の行列** $A \in \mathrm{M}(3, 4; \mathbb{R})$ **の左からいくつかの簡単な３次の正則行列かけて、右からいくつか** M_1, M_2, M_3 **かけてつぎのどれかの形にできる。（あ）** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & 1 & 0 & g_{24} \\ 0 & 0 & 1 & g_{34} \end{bmatrix}$ **（い）** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & g_{13} & g_{14} \\ 0 & 1 & g_{23} & g_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **（う）** $\begin{bmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **（え）零行列** $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

注意：いくつか正則行列の積は正則行列である。

$A \in \mathrm{M}(n, m; \mathbb{R})$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ **にたいして** $\mathbf{Sol}(A, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ **とおく。** X **を** n **次の正則行列、** Y **を** m **次の正則行列とする。このとき全単射写像** $f : \mathbf{Sol}(A, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \mathbf{Sol}(XAY, X\boldsymbol{b})$ **が** $f(\boldsymbol{x}) = Y^{-1}\boldsymbol{x}$ **によって定め**

られる。逆写像 f^{-1}: Sol(XAY, Xb) $\longrightarrow$ Sol(A, $\boldsymbol{b}$) は $f(x) = Yx$ によって定められる。

上の簡単な３次の正則行列による逆行列の求め方

３次の正方行列 $A, B \in \mathrm{M}(3, 3; \mathbb{R}) = \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ にたいして３行６列の行列 $[A, B] \in \mathrm{M}(3, 6; \mathbb{R})$ を 1〜３列目が A の 1〜３列目、４〜６列目が B の 1〜３列目であるものとする。

$A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ にたいして３行６列の行列 $[A, I_3] \in \mathrm{M}(3, 6; \mathbb{R})$ をかんがえる（$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$）。$[A, I_3]$ の左からいくつかの簡単な３次の正則行列かけて $[I_3, C]$ となったとする。このとき A は正則行列であり、$A^{-1} = C$ である。すなわち $[A, I_3]$ の２つの行を入れ替えたり、１つの行に０でない実数をかけたり、ある行に別の行を足したり引いたりすることを繰り返して $[I_3, C]$ となったとすると A は正則行列であり、$A^{-1} = C$ である。

４次の正方行列の行列式と逆行列

４次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ の行列式 det(A)

$= |A|$ は $\mathbf{det}(A) = a_{11}\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right) - a_{21}\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right)$

$+ a_{31}\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right) - a_{41}\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}\right)$ で与えられる。

$A, B \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ にたいして $\mathbf{det}(AB) = \mathbf{det}(A)\mathbf{det}(B)$が成り立つ。

ふつうは下の性質（ア）～（え）を使って行列式を求める。

（ア） $\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right) =$

$a_{11}\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right)$, **（イ）** $\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right) =$

$\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\right)\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right)$,

（ウ） $\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}\right) = \mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right) =$

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

（あ）２つの異なる行（または列）が同じ行列の行列式はである。

（い）２つの異なる行（または列）を入れ替えたとき、行列式は-１倍となる。

（う）ある行（または列）を $a\ (\in \mathbb{R})$ 倍したとき行列式は a 倍となる。

（え）ある行に別の行（またはある列に別の列）を足しても引いても行列式は同じ。

det(A)が零でないとき逆行列は A^{-1} はつぎで与えられる。

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}\begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| & -|A_{41}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| & |A_{42}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| & -|A_{43}| \\ -|A_{14}| & |A_{24}| & -|A_{34}| & |A_{44}| \end{bmatrix}$$

$\in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$。ここで A_{ij} は A から i 行 j 列を除いた３次の正方行列 $A_{ij} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$であり、$|A_{ij}|$ は A_{ij} の行列式である。

det$(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ は正則行列 $\Leftrightarrow A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]$ にたして $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は 1 次独立。